

Matematyka II, zadania domowe, seria 4

Zadanie 1. Zbiór wektorów $e = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ tworzy bazę. Czy zbiory $f = (\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$ oraz $g = (\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3)$ zadane przez równości

$$\begin{cases} \vec{f}_1 = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3 \\ \vec{f}_2 = 3\vec{e}_1 + 5\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3 \\ \vec{f}_3 = 4\vec{e}_1 + 6\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3 \end{cases} \quad \begin{cases} \vec{g}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_3 \\ \vec{g}_2 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + 3\vec{e}_3 \\ \vec{g}_3 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + 4\vec{e}_3 \end{cases}$$

także tworzą bazy? Jeśli tak, znaleźć macierze przejścia z bazy f do bazy g oraz z bazy g do bazy e . Znaleźć współrzędne wektora

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}_e$$

w bazach f i g .

Zadanie 2. Dla jakich wartości parametrów a, b i c wektory

$$\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \vec{e}_3 = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

tworzą bazę przestrzeni 3-wymiarowej? W przypadku gdy $e = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ jest bazą, wyrazić w bazie e wektory (zapisane w bazie standardowej)

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} a \\ c \\ b \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} c \\ a \\ b \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_4 = \begin{bmatrix} c \\ b \\ a \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_5 = \begin{bmatrix} b \\ c \\ a \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_6 = \begin{bmatrix} b \\ a \\ c \end{bmatrix}.$$

Zadanie 3. Opisz podprzestrzeń najmniejszego wymiaru, do którego należą poniższe wektory

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \\ 3 \\ -5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \\ -9 \\ 7 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ 6 \\ -7 \end{bmatrix}.$$

Zadanie 4. W przestrzeni \mathbb{R}^4 określamy podprzestrzenie

$$U = \left\{ a \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}, \quad V = \left\{ a \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

Wykazać, że $\mathbb{R}^4 = U \oplus V$, tzn. każdy wektor z przestrzeni \mathbb{R}^4 jest kombinacją liniową wektorów z przestrzeni U i V oraz przecięcie przestrzeni U i V zawiera tylko wektor zerowy.

Zadanie 5. Zdefiniować poniższe podprzestrzenie liniowe przy użyciu układów równań liniowych

$$V_1 = \left\{ a \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\}, \quad V_2 = \left\{ a \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 7 \end{bmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\},$$

$$V_3 = \left\{ a \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} : a \in \mathbb{R} \right\}, \quad V_4 = \left\{ a \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

Zadanie 6. Opisać następujące podprzestrzenie wektorowe:

$$V_1 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0 \right\}, \quad V_2 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x = -2y \wedge y = z \right\}.$$

Jakie są wymiary tych podprzestrzeni?

Zadanie 7. Dla jakich wartości parametrów $a, b, c, d, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ istnieje macierz odwrotna do macierzy

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & b & 0 & \beta \\ 0 & 0 & c & \gamma \\ 0 & 0 & 0 & d \end{bmatrix}.$$

Znaleźć macierz odwrotną.

Zadanie 8. Zapisać wektor $w(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ w bazie

$$e = (x^3 + x^2 + x + 1, x^2 + x + 1, x + 1, 1).$$