

Matematyka II, zadania domowe, seria 3

Zadanie 1. Rozwiąż następujące układy równań:

1.

$$\begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ x - y + 2z = -1, \\ 2x + z = 1 \end{cases}$$

2.

$$\begin{cases} x - y + z = -2 \\ x + 3z = -2, \\ -x + 2y + z = 2 \end{cases}$$

3.

$$\begin{cases} 2x + 3y + 5z = -2 \\ 4x - 2y + 2z = -1. \\ 2x + y + 3z = 4 \end{cases}$$

Zadanie 2. Wykonaj mnożenie macierzy AB i BA (o ile jest to możliwe) w następujących przypadkach:

1.

$$A = [1 \quad -2 \quad -4 \quad 5], \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}$$

2.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

3.

$$A = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix}, \quad B = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ -1 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$$

Zadanie 3. Znajdź macierze odwrotne do macierzy

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)}} \begin{bmatrix} 1 & -\beta \\ -\beta & 1 \end{bmatrix},$$

gdzie $\varphi \in \mathbb{R}$ i $-1 < \beta < 1$.

Zadanie 4. Pokaż, że dla każdego naturalnego n zachodzi

$$\begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} 1 & na \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

gdzie a jest dowolną liczbą rzeczywistą.

Zadanie 5*. Niech

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Znajdź wszystkie rozwiązania równania

$$A^2 = \mathbf{1},$$

gdzie $\mathbf{1}$ jest macierzą jednostkową 2×2 . *Wskazówka:* Przekształć powyższe równanie tak, aby po jednej jego stronie pojawiła się macierz odwrotna A^{-1} , a następnie pokaż, że $ad - bc = \pm 1$.

Odpowiedzi

Zadanie 1.

1. $x = 1, y = 0, z = -1$;

2.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix};$$

3. Układ równań nie ma rozwiązań.

Zadanie 2.

1.

$$AB = [-11], \quad BA = \begin{bmatrix} 2 & -4 & -8 & 10 \\ -1 & 2 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 6 & 12 & -15 \end{bmatrix};$$

2.

$$BA = \begin{bmatrix} 2 & -10 & -15 \\ 4 & -6 & -2 \end{bmatrix};$$

3.

$$AB = BA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Zadanie 3.

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)}} \begin{bmatrix} 1 & \beta \\ \beta & 1 \end{bmatrix}.$$

Zadanie 5*.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ lub } A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ lub} \\ A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ lub } A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ lub} \\ A = \begin{bmatrix} \sqrt{1-bc} & b \\ c & -\sqrt{1-bc} \end{bmatrix} \text{ lub } A = \begin{bmatrix} \sqrt{1-bc} & b \\ c & -\sqrt{1-bc} \end{bmatrix}$$

dla $b, c \in \mathbb{R}$ i $bc \leq 1$.