01.06.2015

Seria 14
Wektory i wartości własne macierzy

Zad. 1. Obliczyć wartości i wektory własne macierzy

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 0 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & -2 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 3 & 0 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 0 & 3 & 3 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 2 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

Zad. 2. Obliczyć wartości i wektory własne

$$J_x = \frac{h}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \qquad J_y = \frac{h}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i\sqrt{3} & 0 & 0 \\ i\sqrt{3} & 0 & -2i & 0 \\ 0 & 2i & 0 & -i\sqrt{3} \\ 0 & 0 & i\sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}$$

Zad. 3. Obliczyć wartości własne macierzy

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} a & \sqrt{2}b & 0 \\ \sqrt{2}b & a & \sqrt{2}b \\ 0 & \sqrt{2}b & a \end{pmatrix},$$

gdzie $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ i $b \in \mathbb{R}$.

Zad. 4. Niech

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Sprawdzić, że C jest macierzą odwracalną zaś $D := C^{-1}TC$ jest macierzą diagonalną. Podać spektrum macierzy T oraz D. Obliczyć T^{2013}.

Zad.* 5. Niech $w(\lambda) = (-1)^n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$ będzie wielomianem charakterystycznym macierzy $A \in M_{n\times n}(K)$. Wykazać, że

1. $\det A = a_0$,
2. $\mathrm{tr} A = (-1)^{n-1}a_{n-1}$

Zad.* 6. Podać przykład macierzy $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{Q})$, która nie jest diagonalizowalna nad $\mathbb{Q}$, ale jest diagonalizowalna nad $\mathbb{R}$.

Zad.* 7. Wykazać, że jeśli macierz $A \in M_{n\times n}(K)$ ma dokładnie jedną wartość własną to A jest diagonalizowalna nad K wtedy i tylko wtedy, gdy A jest diagonalna.

Zad.* 8. Pokaż że, jeśli $f, g \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^n)$ mają n liniowo niezależnych wspólnych wektorów własnych, to $f \circ g = g \circ f$.