Seria 1 zadań z Matematyki II. Szeregi

Zadanie 1.
Znaleźć wzory na ciągi sum cząstkowych $S_N \equiv \sum_{n=n_0}^{N}$ ($n_0 = 0$ lub 1) i podać sumę szeregu (jeśli jest on zbieżny)

$$a) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}\,,$$

$$b) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}\,,$$

$$c) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\alpha+n)(\alpha+n+1)} \qquad \alpha > 0\,,$$

$$d) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\alpha+n)(\alpha+n+1)(\alpha+n+2)} \qquad \alpha > 0\,,$$

$$e) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right),$$

$$f) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)q^n\,,$$

$$g) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{7^n}\,,$$

Zadanie 2.
Zbadać zbieżność następujących szeregów ($E(x)$ = część całkowita x):

$$a') \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3 - n^2 + n - 1}{n^4 - n^2 + 1}\,,$$

$$a) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \sin(\cos\frac{1}{n})\,,$$

$$b) \qquad \sum_{n=2}^{\infty} (n-1)\left(\sqrt{n^2-2n+2} - \sqrt{n^2-2n}\right)\,,$$

$$c) \qquad \sum_{n=2}^{\infty} \left[(n^2-2n+2)^{1/3} - (n^2-2n))^{1/3}\right]\,,$$

$$d) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}\ln^2\left(1+\frac{1}{n}\right)\,,$$

$$e) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\,\mathrm{tg}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right),$$

f) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\,E(\sqrt{n}\,)}\,,$$

g) $$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{n}\,,$$

h) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+1}}{(2n^2+n+1)^{\frac{n-1}{2}}}\,,$$

i) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n+1}{n(n+1)^n}\,,$$

j) $$\sum_{n=34}^{\infty} \frac{1}{(3n-100)^s} \qquad s\in\mathbb{R}\,,$$

k) $$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)\,,$$

l) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^s} \qquad s\in\mathbb{R}\,,$$

m) $$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1+2\cos n}{5-4\cos n}\right)^{n}\,,$$

n) $$\sum_{n=10}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}\,,$$

o) $$\sum_{n=10}^{\infty} \frac{1}{[\ln(\ln n)]^{\ln n}}\,,$$

p) $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3-n^2+n-1}{n^4-n^2+1}\,,$$

r) $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2 2^n}{(2n)!}\,,$$

s) $$\sum_{n=1}^{\infty} \left[1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n}\right]\,,$$

t) $$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha}\,\mathrm{th}^2\frac{1}{n}\,, \qquad \alpha\in\mathbb{R}\,,$$

u) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^{\alpha}}\,, \qquad \alpha\in\mathbb{R}\,,$$

v) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}\,,$$

$$w) \qquad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^n}\,,$$

$$x) \qquad \sum_{n=5}^{\infty} \frac{1}{n\ \ln n(\ln(\ln n))^s} \qquad s \in \mathbb{R}\,,,$$

$$y) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\,(n)^{1/n}}\,. \tag{1}$$

Zadanie 3.
Zbadać zbieżność szeregów

$$a) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}\,,$$

$$b) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(\ln n)}\,,$$

$$c) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{|n-a|^{1/p}}\,, \quad p \in \mathbb{R}\,,$$

$$d) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{2n+1}{7n+2}\right)^n\,,$$

$$e) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(2^{1/n}-1\right)\,,$$

$$f) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n\, q^{n+1}\,,$$

$$g) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^{-1/n}\,,$$

$$h) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a+(-1)^n}{n}\,, \quad a > 0\,,$$

$$i) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+(-1)^n}\,,$$

$$j) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\sqrt{n}}{n+3}\,,$$

$$k) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n}\,,$$

$l)$ $$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{n}\right)^{1/n},$$

$m)$ $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(\pi n^2)}{\ln(\ln n)},$$

$n)$ $$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(7^{1/n}-1),$$

Kryteria Abela i Direchleta (punkt o) są nadoobowiązkowe

$o)$ $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n}{n}.$$

Zadanie 4.

Podać promień R zbieżności szeregów potęgowych. Zbadać zbieżność szeregów na krańcach przedziału ich zbieżności, (tj. dla $x=-R$ oraz $x=+R$).

$a)$ $$\sum_{n=0}^{\infty}x^n,$$

$b)$ $$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!},$$

$c)$ $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2},$$

$d)$ $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^\alpha}, \quad \alpha\in\mathbb{R},$$

$e)$ $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{a^n},$$

$f)$ $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^n},$$

$g)$ $$\sum_{n=0}^{\infty}n^n\,x^n,$$

$h)$ $$\sum_{n=1}^{\infty}x^n\,\mathrm{tg}\frac{1}{n},$$

$i)$ $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}\,x^n,$$

$j)$ $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!}\,x^n,$$

$k)$ $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{2^n}\, x^n \,,$$

$l)$ $$\sum_{n=0}^{\infty} (\mathrm{arctg} n)^n x^n \,,$$

$Wm)in)poobliczeniupromieniazbienociprzeczytajodpowiedzi$

$m)$ $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{(2n)!}\, x^n \,,$$

$n)$ $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(\ln n)^n} \,,$$

Zadanie 5.
Sprawdź, czy funkcje f_1 i f_2 definiowane w odpowiednim kole zbieżności) przez szeregi

$$f_1(x) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} x^n \,, \qquad f_2(x) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!} \,,$$

spełniają równanie różniczkowe

$$(x-2)(x-1)\, f''(x) + (x^2 - 4x + 5) f'(x) + (3 - x)\, f(x) = 0 \,.$$

To samo, gdy

$$\psi(x) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2^n n!} \,,$$

a równanie ma postać

$$\psi''(x) + (3 - x^2)\psi(x) = 0 \,.$$

Zadanie 6.
Pokazać mnożąc bezpośrednio szeregi, którymi wyrażają się $\sin\alpha$ i $\cos\alpha$, że

$$2\sin\alpha\cos\alpha = \sin 2\alpha \,.$$

Zadanie 7.
Rozwinąć w szereg potęgowy do czwartego nietrywialnego wyrazu następujące funkcje

$a)$ $$f(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{1-x}\right) ,$$

$b)$ $$f(x) = \sin\left(1 - \frac{x}{1-x}\right) ,$$

$$\begin{array}{ll}
c) & f(x) = \dfrac{1}{2-\sin x}, \\
d) & f(x) = \exp(\sin x), \\
e) & f(x) = \ln\left(\cos^2 x\right), \\
f) & f(x) = \left(1 + \dfrac{1}{1+x}\right)^{-1}, \\
g) & f(x) = \sin^2\left(1 + \dfrac{1}{1-x}\right), \\
h) & f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x+x^2}}.
\end{array}$$

Podać przedział zmiennej x, w którym szeregi te są zbieżne.

Zadanie 8.
Zsumować szeregi potęgowe

$$\begin{array}{ll}
a) & \sum\limits_{n=1} \dfrac{(3x)^n}{n}, \\
b) & \sum\limits_{n=0} (n+1)\left(\dfrac{x}{2}\right)^2, \\
c) & \sum\limits_{n=0} (an+b)x^n, \\
d) & \sum\limits_{n=0} (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}, \\
e) & \sum\limits_{n=0} (-1)^n (2n+1)(2x)^{2n}, \\
f) & \sum\limits_{n=0} \dfrac{1}{3!}(n+1)(n+2)(n+3)x^n, \\
g) & \sum\limits_{n=0} \dfrac{x^{3n+1}}{3n+1},
\end{array}$$

wykorzystując możliwość przestawiania kolejności sumowania i całkowania (lub sumowania i różniczkowania).

Odpowiedzi

NZB≡ niezbieżny, ZB≡ zbieżny, ZBB≡ zbieżny bezwzględnie,ZBW≡ zbieżny warunkowo (ZBB i ZBW dotyczą szeregów o wyrazach niekoniecznie dodatnich)

Zadanie 1.

a) $$S_N = \sum_{n=1}^{N} a_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\frac{1}{3N+1}\,, \quad \text{szereg ZB} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{1}{3}\,,$$

b) $$S_N = \sum_{n=1}^{N} a_n = 1 - \frac{1}{(N+1)^2}\,, \quad \text{szereg ZB} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1\,,$$

c) $$S_N = \sum_{n=1}^{N} a_n = \frac{1}{\alpha+1} - \frac{1}{\alpha+N+1}\,, \quad \text{szereg ZB} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{1}{\alpha+1}\,,$$

d) $$S_N = \sum_{n=1}^{N} a_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\alpha+1} - \frac{1}{\alpha+2}\right) - \frac{1}{2}\frac{1}{\alpha+N+1} + \frac{1}{2}\frac{1}{\alpha+N+2}$$

$$\text{szereg ZB} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{1}{2(\alpha+1)(\alpha+2)}\,,$$

e) $$S_N = \sum_{n=1}^{N} a_n = -\ln 2 + \ln\frac{N+1}{N+2}\,, \quad \text{szereg ZB} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = -\ln 2\,,$$

f) $$S_N = \sum_{n=1}^{N} a_n = \frac{1 - q^{N+2} - (N+2)(1-q)q^{N+1}}{(1-q)^2}\,,$$

$$\text{szereg ZB dla } |q| < 1 \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{1}{(1-q)^2}\,,$$

g) $$S_N = \sum_{n=1}^{N} a_n = 2\,\frac{q-(N+1)q^{N+1}}{1-q} + 2q\,\frac{q-q^{N+1}}{(1-q)^2} - \frac{q-q^{N+1}}{1-q}\,, \quad q = 1/7$$

$$\text{szereg ZB} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{2}{9}\,.$$

Zadanie 2. a$'$) NZB, ($a_n \sim 1/n$; uściślić ten argument) a) NZB (wyraz ogólny nie dąży do zera), b) NZB ($a_n \to 1$), c) ZB ($a_n \sim (2/3)n^{-4/3}$), d) ZB ($a_n \sim n^{-3/2}$) e) ZB ($a_n \sim n^{-3/2}$) f) ZB ($E(\sqrt{n}) > \sqrt{n} - 1$ więc $a_n < 1/(n(\sqrt{n}-1))$), g) ZB ($a_n < (\frac{1}{2})^{\ln_2 n^2} \equiv 1/n^2$), h) ZB (kryt. C. daje $\lim(a_n)^{1/n} = \frac{1}{\sqrt{2}}\lim(2n^4+n^3+2n^2)^{1/2n} \to \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$, i) NZB (kryt. por. ilor. z $b_n = 1/n$ daje $\lim(a_n/b_n) = 1/e$, a szereg b_n jest NZB), j) ZB dla $s > 1$ ($3n - 100 > 3(n-34)$ i przesunąć zmienną sumowania), k) ZB (pokazać, że $a_n < 1/2n^2$), l) ZB dla $s > 1$, NZB dla $s \leq 1$ (zastosować kryt. por. ilorazowe), m) ZB (wyrażenie w nawiasie zawsze < 1) n) ZB (albo zagęścić, albo pomanipulować by dostrzec, że $a_n = 1/n^{\ln[\ln n]}$

a to znaczy, że od pewnego wyrazu $a_n < 1/n^2$), o) ZB (podobnie jak w poprzednim: $a_n = 1/n^{\ln[\ln(\ln n)]}$ i znów od pewnego daaaaleeeeekieeeeego wyrazu $a_n < 1/n^2$), p) NZB ($a_n \sim 1/n$), r) NZB ($a_n = (n!)^2/n! = n!$), s) ZB (skorzystać z kryt. por. ilorazowego z $b_n = 1/n^2$), t) ZB dla $\alpha < 1$, rozbieżny dla $\alpha \geq 1$, u) ZB dla $\alpha > 1$, NZB dla $\alpha \leq 1$, v) ZB (przesunąć zmienną sumowania i zagęścić), w) ZB ($\ln n > 2$ od pewnego n i szacować geometrycznym), x) ZB dla $s > 1$ (zagęścić i oszacować przez $1/(n \ln^s n)$), y) NZB,

Zadanie 3.
a) WZB (Leibnitz), b) WZB (Leibnitz), c) WZB (Leibnitz), d) NZB (warunek konieczny zbieżnosci szeregu nie jest spełniony), e) WZB (Leibnitz), f) ZBB dla $|q| < 1$, g) NZB (warunek konieczny zbieżnosci szeregu nie jest spełniony), h) NZB (bo mozna przedstawic jako sume szeregu zbieżnego i rozbieżnego), i) ZBB, j) WZB (Leibnitz), k) ZB (Leibnitz), l) NZB (warunek konieczny zbieżnosci szeregu nie jest spełniony), m) ZBW ($\cos(\pi n^2) = \pm 1$ naprzemian i Leibnitz), n) ZBW, o) WZB (kryt. Abela, czy też Dirichleta: ciąg $S_N = \sum_{n=0}^{N} \cos n$ jest ogranicznoy przez $1/\cos(1/2)$).

Zadanie 4.
a) $R = 1$; na obu krańcach NZB, b) $R = \infty$, c) $R = 1$; na obu krańcach ZBB, d) $R = 1$; dla $x = -R$ ZBB, gdy $\alpha > 1$ i ZBW, gdy $\alpha > 0$; dla $x = +R$ ZB, gdy $\alpha > 1$, e) $R = a$; na obu krańcach NZB, f) $R = \infty$, g) $R = 0$, h) $R = 1$; dla $x = -R$ ZBW, dla $x = R$ NZB, i) $R = e$ na obu krańcach NZB (bo ciąg $a_n = (n!/n^n)e^n$ jest rosnący), j) $R = 1/e$; dla $x = R$ NZB zadanie wykracza ponad ramy kursu. Mimo to sugerujemy siegnąć do materiału nadobowiązkowego (np. kryt. Raabego: $\lim_{n\to\infty}\{n[(a_n/a_{n+1}) - 1]\} = \frac{1}{2} < 1$) bo jest ono sciśle zwiazane z wzorem Stirlinga: $\lim_{n\to\infty} \frac{n! e^n}{\sqrt{2\pi n} n^n} = 1$, k) $R = 2$; na obu krańcach NZB, l) $R = 2/\pi$; na obu krańcach NZB m) $R = \infty$, n) $R = \infty$,

Zadanie 7.
Takie rzeczy sprawdzamy programem *Mathematica*...

Zadanie 8.
a) $-\ln(1 - 3x)$, ZB dla $|x| < \frac{1}{3}$, b) $(1 - x/2)^2$, ZB dla $|x| < 2$, c) $(b + (a - b)x)/(1 - x)^2$, ZB dla $|x| < 1$, d) arctg$x$, ZB dla $|x| < 1$, e) $(1 - 4x^2)/(1 + 4x^2)^2$, ZB dla $|x| < \frac{1}{2}$, f) $(1 - x)^{-4}$, ZB dla $|x| < 1$, g) $-\frac{1}{3}\ln(1-x) + \frac{1}{6}\ln(1+x+x^2) + \frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) - \frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}$, ZB dla $|x| < 1$.