

Matematyka II

2013.III.23

Szeregi liczbowe

1. Oblicz sumę: $\ln 2 + \ln(1 + \frac{1}{2}) + \ln(1 + \frac{1}{3}) + \dots$.
2. Między krzywymi $y = \frac{1}{x^3}$ i $y = \frac{1}{x^2}$, na prawo od ich punktu przecięcia przeprowadzono odcinki równoległe do osi Oy , tak że każdy odcinek odległy jest o 1 od swoich najbliższych sąsiadów. Czy suma długości tych odcinków jest skończona? Czy będzie ona skończona gdy krzywą $y = \frac{1}{x^2}$ zastąpimy krzywą $y = \frac{1}{x}$?
3. Rozważmy ciąg trójkątów prostokątnych równoramiennych takich, że przyprostokątna n -tego trójkąta jest przeciwprostokątną następnego. Przeciwprostokątna pierwszego trójkąta ma długość 1. Zbadaj zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, gdzie a_n jest długością przyprostokątnej n -tego trójkąta.
4. Zbadaj zbieżność szeregów:
 - (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{nE(\sqrt{n})}$, gdzie $E(x)$ jest częścią całkowitą x .
 - (b) $\sum_{n=1}^{\infty} (1 - \frac{1}{\sqrt{n}})^n$
 - (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+1}}{(2n^2+n+1)^{\frac{n-1}{2}}}$
 - (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n - \frac{1}{2n})^n}{n^{n - \frac{1}{2n}}}$
 - (e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n + 1}{n(n+1)^n}$
 - (f) $\sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{1}{n}$
 - (g) $\sum_{n=1}^{\infty} \tan \frac{1}{n}$
 - (h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2 5^n}{(2n)!}$
 - (i) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} (3^{1/n} - 1)$.