ZADANIA Z ODWZOROWAŃ LINIOWYCH I PRZYLEGŁOŚCI

Zadanie 1. Wzór

$$F\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_1 + 2x_2 \\ x_2 + 3x_3 \end{bmatrix},$$

zadaje odwzorowanie liniowe przestrzeni wektorowej $\mathbb{R}^3$ w nią samą: $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Sprawdzić, czy jest ono liniowe. Znaleźć jego macierz w bazie kanonicznej (zero-jedynkowej) $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, oraz w bazie tworzonej przez trzy wektory $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \,, \\ \mathbf{v}_2 &= \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + 2\,\mathbf{e}_3 \,, \\ \mathbf{v}_3 &= \mathbf{e}_1 + 2\,\mathbf{e}_2 + 3\,\mathbf{e}_3 \,. \end{aligned}$$

Podać składowe w baze $\mathbf{v}_i$ obrazu wektora $\mathbf{u}$, który w bazie $\mathbf{e}_i$ ma składowe $(1, 2, 3)$.

Zadanie 2. F odwzorowuje przestrzeń wektorową wielomianów stopnia ≤ 3 w przestrzeń wektorową wielomianów stopnia ≤ 2:

$$F[W(x)] = W'(x) + x^2 W(0) + 12x \int_0^1 dt\, W(t)\,.$$

Czy odwzorowanie F jest liniowe? Jeśli tak, to znaleźć jego macierz w bazach kanonicznych $(\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ dla przestrzeni wielomianów stopnia ≤ 3 i $(\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ dla przestrzeni wielomianów stopnia ≤ 2, gdzie $\mathbf{e}_n \equiv x^n$.

Zadanie 3. Czy wielomiany $\mathbf{f}_0 = 1 + x$, $\mathbf{f}_1 = x + x^2$, $\mathbf{f}_2 = x^2 + x^3$, $\mathbf{f}_3 = x^3$ mogą być bazą przestrzeni wektorowej wielomianów stopnia ≤ 3 ? Jeśli tak, to znaleźć tej bazie dla wielomianów stopnia ≤ 3 oraz w bazie kanonicznej dla wielomianów stopnia ≤ 2 macierz odwzorowania F z Zadania 2.

Zadanie 4. Czy wielomiany $\mathbf{g}_0 = 1 + 2x + 3x^2$, $\mathbf{g}_1 = 3x + 4x^2$, $\mathbf{g}_2 = 2x^2$ mogą być bazą przestrzeni wektorowej wielomianów stopnia ≤ 2 ? Jeśli tak, to znaleźć tej bazie dla wielomianów stopnia ≤ 2 oraz bazie kanonicznej dla wielomianów stopnia ≤ 3 macierz odwzorowania F z Zadania 2.

Zadanie 5. Znaleźć jądro (ker) i obraz (im) odwzorowania F trójwymiarowej przestrzeni wektorowej V w inną (a może tę samą - nie jest to istotne) przestrzeń wektorową W mającą również wymiar 3; w bazach $\mathbf{v}_i \in V$ i $\mathbf{w}_i \in W$ macierz F ma postać

$$F_{(w)(v)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

Zadanie 6. Pewne odwzorowanie liniowe G z $\mathbb{R}^3$ w $\mathbb{R}^3$ jest takie, że

$$G\left(\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}3\\2\\2\end{bmatrix},\qquad G\left(\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}-1\\1\\4\end{bmatrix},\qquad G\left(\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}-1\\1\\-3\end{bmatrix}.$$

Znaleźć macierz tego odwzorowania w bazie kanonicznej

$$\mathbf{e}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\qquad \mathbf{e}_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\qquad \mathbf{e}_2=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}.$$

Znaleźć także wynik działania

$$G\left(\begin{bmatrix}2\\0\\-1\end{bmatrix}\right).$$

Zadanie 7. O odwzorowaniu liniowym H z $\mathbb{R}^3$ w $\mathbb{R}^3$ wiadomo, że

$$H\left(\begin{bmatrix}1\\3\\0\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix},\qquad H\left(\begin{bmatrix}0\\-1\\1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}-1\\1\\-3\end{bmatrix},\qquad H\left(\begin{bmatrix}1\\0\\3\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}-1\\3\\-8\end{bmatrix}.$$

Znaleźć wynik działania odwzorowania H na wektor

$$\begin{bmatrix}-1\\-5\\2\end{bmatrix}.$$

Czy da sie znaleźć macierz $H_{(e)(e)}$ tego odwzorowania np. w bazie kanonicznej (zero-jedynkowej)?

Zadanie 8. Odwzorowanie liniowe $F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ działając na trzy wektory

$$\mathbf{f}_1=\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix},\qquad \mathbf{f}_2=\begin{bmatrix}2\\0\\3\end{bmatrix},\qquad \mathbf{f}_3=\begin{bmatrix}1\\4\\1\end{bmatrix},$$

daje

$$F(\mathbf{f}_1)=\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}\equiv\mathbf{g}_1\,,\qquad F(\mathbf{f}_2)=\begin{bmatrix}2\\-3\\1\end{bmatrix}\equiv\mathbf{g}_2\,,\qquad F(\mathbf{f}_3)=\begin{bmatrix}-3\\3\\0\end{bmatrix}\equiv\mathbf{g}_3\,.$$

Znaleźć, jeśli to możliwe postać macierzy tego odwzorowania w bazach kanonicznych (zero-jedynkowych). Jakie jest jądro tego odwzorowania?

Zadanie 9. Odwzorowanie liniowe $F : V \to W$ odwzorowuje wektory o składowych

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix},$$

w bazie $\mathbf{e}_i$, $i = 1, 2$ przestrzeni V odpowiednio w wektory o składowych

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix},$$

w bazie $\mathbf{g}_i$, $i = 1, 2, 3$ przestrzeni W. Podać macierz tego odwzorowania. Wyznaczyć jego jądro i obraz.

Zadanie 10. W bazie $\mathbf{e}_i$, $i = 1, 2, 3$ wektory $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ oraz $\mathbf{u}$ mają odpowiednio składowe

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Znaleźć rzut wektora $\mathbf{u}$ na wektor $\mathbf{v}_1$ "wzdłuż" podprzestrzeni rozpinanej przez wektory $\mathbf{v}_2$ i $\mathbf{v}_3$. Podać macierz rzutu w bazie $\mathbf{e}_i$.
Wskazówka: napisać najpierw macierz rzutu w bazie tworzonej przez wektory $\mathbf{v}_i$, $i = 1, 2, 3$ i przejść potem do bazy $\mathbf{e}_i$.

Odpowiedzi

1: Jest liniowe. Macierz w bazie kanonicznej:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Macierz w bazie $\mathbf{v}_i$:

$$\begin{pmatrix} 0 & -3 & -5 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Składowe w bazie $\mathbf{v}_i$ wektora będącego obrazem $\mathbf{u}$: $(-5, 2, 4)$.

2: Jest liniowe. Macierz w bazie kanonicznej:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 12 & 6 & 6 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

3: Mogą. Macierz w podanych bazach:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 18 & 12 & 9 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

4: Mogą. Macierz w podanych bazach:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & \frac{4}{3} & 2 & 1 \\ -\frac{15}{2} & -\frac{25}{6} & -4 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

5: Wektory jądra:

$$\lambda\,(\mathbf{v}_1 - 2\,\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_1) \in \ker F\,,$$

z czynnikiem λ dowolnym. Obraz rozpinają wektory

$$\mathbf{h}_1 = \mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_3\,, \qquad \mathbf{h}_2 = \mathbf{w}_2 + 2\,\mathbf{w}_3\,.$$

6: Macierz odwzorowania G w bazach kanonicznych:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Działanie na podany wektor:

$$G\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

7: Działanie na podany wektor:

$$H\left(\begin{bmatrix} -1 \\ -5 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ -7 \end{bmatrix}.$$

Macierzy nie daje się znaleźć.

8: Daje się. Macierz ma postać:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Postać wektorów jądra:

$$\lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \in \ker F\,.$$

z dowolnym λ.

9: Macierz odwzorowania w podanych bazach:

$$\begin{pmatrix} -11 & 37 \\ -13 & 44 \\ 7 & -22 \end{pmatrix}.$$

Jądro jest trywialne. Wektory rozpinające obraz: $\mathbf{u}_1 = 4\mathbf{g}_1 + 5\mathbf{g}_2 - \mathbf{g}_3$ i $\mathbf{u}_2 = -3\mathbf{g}_1 + 5\mathbf{g}_3$.

10: Rzut $\mathbf{u}$ na $\mathbf{v}_1$ "wzdłuż" $\mathbf{v}_2$ i $\mathbf{v}_3$: $\Pi(\mathbf{u}) = 2\mathbf{v}_1$. Macierz rzutu w bazie $\mathbf{e}_i$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$