Matematyka II 2012/2013

Zadanie 1. Podaj przykład przekształcenia liniowego $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ spełniającego warunki:

$$\ker\varphi = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, x_1 - x_2 + 6x_3 + 2x_4 = 0 \right\}, \qquad \operatorname{im}\varphi = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Zadanie 2. Niech $\mathbb{R}_2[x]$ będzie przestrzenią wektorową wszystkich rzeczywistych funkcji wielomianowych nie posiadających stopnia większego niż 2, oraz niech F_s będzie odwzorowaniem liniowym określonym przez wzór

$$F_s : \mathbb{R}_2[x] \ni P \longmapsto 6x^2 \int_0^1 P(x)\,dx + s\frac{dP}{dx} \in \mathbb{R}_2[x]\,.$$

Dla jakich parametrów $s \in \mathbb{R}$ funkcja wielomianowa $x^2 + 2x + 1$ należy do obrazu F_s?

Zadanie 3. Niech F będzie odwzorowaniem określonym (na przestrzeni wektorowej rzeczywistych funkcji wielomianowych których stopień nie jest większy niż 2 w przestrzeń wektorową rzeczywistych funkcji wielomianowych których stopień nie jest większy niż 3) przez wzór

$$F\colon \mathbb{R}_2[x] \ni P \longmapsto 2\frac{dP}{dx} + P \in \mathbb{R}_3[x]\,.$$

Sprawdź że F jest $\mathbb{R}$-liniową injekcją. Podaj bazę obrazu i kojądra odwzorowania F. (Przypomnijmy że kojądro odwzorowania liniowego $f\colon V \to W$ to $\operatorname{coker} f := \frac{W}{f(V)}$.)

Zadanie 4. W bazie kanonicznej macierz F_s odwzorowania liniowego $f_s\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ dana jest wzorem

$$F_s := \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 4 & 4 & 7 \\ 5 & s & 11 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Znajdź macierz odwzorowania f_s zmieniając bazę kanoniczną $\mathbb{R}^3$ na

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

W zależności od parametrów $s,\ t \in \mathbb{R}$, oblicz kiedy zbiór

$$G_{s,t} = \left\{ v \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, f_s(v) = \begin{pmatrix} 2 \\ t \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

a) jest zbiorem pustym?

b) jest zbiorem jednoelementowym, jaki to element?

c) jest zbiorem nieskończonym?

Zadanie 5. Wiadomo że dla pewnej macierzy $B \in M_3(\mathbb{R})$

$$B\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\2\\2\end{pmatrix},\quad B\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\1\\4\end{pmatrix},\quad B\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\1\\-3\end{pmatrix}.$$

Oblicz wartości macierzy B na wektorach bazy kanonicznej.

Zadanie 6. Znaleźć $\ker(A)$ i $\operatorname{im}(A)$ dla odwzorowania $A : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ zadanego w bazie standardowej przez macierz

$$\mathbf{A} := \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1\\ 1 & 2 & 2 & 2 & 1\\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Zadanie 7. Endomorfizm (czyli odwzorowanie liniowe o takiej samej dziedzinie i przeciwdziedzinie) $F \in \operatorname{End}(\mathbb{R}_n[\mathbb{N}])$, gdzie $\mathbb{R}_n[\mathbb{N}] := \{w \in \mathbb{R}[\mathbb{N}] \mid \deg w \leqslant n\} \cup \{0\}$ dany jest wzorem $(Fw)(t) = (t+1)w'(t)$. Znaleźć macierz F w bazie uporządkowanej $(1, t, t^2, \ldots, t^n)$ oraz znaleźć $\ker(F)$ i $\operatorname{im}(F)$.

Zadanie 8. Czy przekształcenie $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$,

$$\varphi\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} := \begin{pmatrix}(x_1+2)^2 - x_1 - x_3 - 4\\ 4x_1 + 2x_2 + 6x_3\end{pmatrix},$$

jest przekształceniem liniowym? Jeśli tak, to napisać macierz tego przekształcenia w bazie kanonicznej.

Zadanie 9. Znaleźć wzór na przekształcenie liniowe $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ zadane następującymi warunkami

$$\varphi\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\5\\-1\end{pmatrix},\quad \varphi\begin{pmatrix}7\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\0\\5\end{pmatrix}.$$

Zadanie 10. Dane są wektory w $\mathbb{R}^4$:

$$v_1=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\ v_2=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\ v_3=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix},\ v_4=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix},$$

oraz permutacja zadana wzorem $\sigma(i) = (3i \bmod 4) + 1$, $i \in \{1, 2, 3, 4\}$.

a) Znajdź w bazie standardowej macierz odwzorowania liniowego $B : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ przekształcającego v_i na i-ty wektor bazy standardowej.

b) Znajdź w bazie standardowej macierz odwzorowania liniowego $M : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4 : v_i \mapsto v_{\sigma(i)}$.