

Seria 12
Wektory i wartości własne macierzy

Zad. 1. Obliczyć wartości i wektory własne

$$J_x = \frac{h}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad J_y = \frac{h}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i\sqrt{3} & 0 & 0 \\ i\sqrt{3} & 0 & -2i & 0 \\ 0 & 2i & 0 & -i\sqrt{3} \\ 0 & 0 & i\sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}$$

Zad. 2. Obliczyć wartości własne macierzy

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a & \sqrt{2}b & 0 \\ \sqrt{2}b & a & \sqrt{2}b \\ 0 & \sqrt{2}b & a \end{pmatrix},$$

gdzie $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ i $b \in \mathbb{R}$.

Zad.* 3. Niech $w(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0$ będzie wielomianem charakterystycznym macierzy $A \in M_{n \times n}(K)$. Wykazać, że

1. $\det A = a_0$,
2. $\operatorname{tr} A = (-1)^{n-1} a_{n-1}$

Zad.* 4. Podać przykład macierzy $A \in M_{2 \times 2}(\mathbb{Q})$, która nie jest diagonalizowalna nad \mathbb{Q} , ale jest diagonalizowalna nad \mathbb{R} .

Zad.* 5. Wykazać, że jeśli macierz $A \in M_{n \times n}(K)$ ma dokładnie jedną wartość własną to A jest diagonalizowalna nad K wtedy i tylko wtedy, gdy A jest diagonalna.

Zad.* 6. Pokaż że, jeśli $f, g \in \operatorname{End}(\mathbb{C}^n)$ mają n liniowo niezależnych wspólnych wektorów własnych, to $f \circ g = g \circ f$.

Zad.* 7. Niech

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Sprawdzić, że C jest macierzą odwracalną zaś $D := C^{-1}TC$ jest macierzą diagonalną. Podać spektrum macierzy T oraz D . Obliczyć T^{2013} .