

Seria 9
Ekstrema funkcji wielu zmiennych

Zad. 1. Który z trójkątów o obwodzie $2p$ i bokach a, b, c ma największe pole P ? (Wsk. $P = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$)

Zad. 2. Niech $h(x, y) = ay(e^x - 1) + x \sin x - \cos y$. Dla jakich $a \in \mathbb{R}$ funkcja h ma lokalne ekstremum w punkcie $(0, 0)$. Wsk. dla pewnego a badanie drugiej różniczki może nie wystarczyć, warto zainteresować się prostą przechodzącą przez $(0, 0)$ złożoną z takich punktów (u, v) , że:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(0, 0)u^2 + 2\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y}(0, 0)uv + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}(0, 0)v^2 = 0.$$

Zad. 3. Znaleźć ekstrema funkcji

1. $f(x, y) = x^2 y(4 - x + y)$,
2. $f(x, y) = 6xy - x^3 - y^3$,
3. $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4a^2 xy + 2a^2$.

Zad. 4. Niech $f(x, y) = (e^x \cos y, e^x \sin y)$. Wykazać, że dla każdego $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ kolumny macierzy $Df(x, y)$ są wzajemnie prostopadłymi wektorami o równej długości.

Zad. 5. Znaleźć punkty krytyczne funkcji $x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z$ i wyjaśnić w których z nich ma ona lokalne minima, maksima, a w których nie ma ona ekstremum lokalnego.

Zad. 6. Znaleźć punkty krytyczne funkcji $f(x, y) = x^4 - y^4 - 4xy^2 - 2x^2$, natępnie wskazać lokalne ekstrema. (Wsk. w otoczeniu tego z punktów krytycznych, którego charakteru nie da się wyjaśnić ogólnym twierdzeniem, rozważyć f na jednej z osi oraz na paraboli $x = -y^2$)

Zad. 7. Znaleźć największą i najmniejszą wartość funkcji $f(x, y) = xy - x - y + 3$ na zbiorze E , jeśli E to domknięty trójkąt o wierzchołkach $(0, 0), (2, 0), (0, 4)$.