19 grudnia 2016

Matematyka I, zadania domowe seria 8

1. Oblicz granice:

   (a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x + x^2 + \ldots + x^p - p}{x-1}$

   (b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)(1+2x)\ldots(1+px) - 1}{x}$

   (c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin\sin x}{\sin x}$

   (d) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{(x^3+4x^2)^{\frac{1}{3}} - x}{\sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x}}$

   (e) $\lim\limits_{x\to 0} \left(1 - x\left[\dfrac{1}{x}\right]\right)$ (przez $[x]$ oznaczamy część całkowitą liczby x)

   (f) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^4 - 3x + 2}{x^5 - 4x + 3}$

   (g) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{1-x} - \dfrac{3}{1-x^3}\right)$

   (h) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^2 2x}{1-\cos x}$

   Odpowiedzi: a: $p(p+1)/2$, b: $p(p+1)/2$, c: 1, d: 8/3, e: 0, f: 1, g: -1, h: 8.

2. Znajdź granice

   (a) $\lim\limits_{x\to 7} \dfrac{\ln x - \ln 7}{x-7}$

   (b) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\ln(x^2-x+1)}{\ln(x^4+x^2+1)}$

   (c) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x^7}{e^x}$

   (d) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\sqrt[7]{x}}{\ln x}$

   (e) $\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt[7]{x}\ln x$

   (f) $\lim\limits_{x\to 7^-} \ln(x-6)\ln(7-x)$

   (g) $\lim\limits_{x\to 2} \left(\dfrac{1}{\ln(x-1)} - \dfrac{1}{x-2}\right)$

   (h) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{6}} (\sin 3x)^{\operatorname{tg} 3x}$

   (i) $\lim\limits_{x\to \infty} (\dfrac{x^2-1}{x^2+2})^x$

Odpowiedzi: a: 1/7, b: 1/2, c: 0, d: inf, e: 0, f: 0, g: 1/2, h: 1, i: 1.

3. Zbadaj przebieg zmienności funkcji

   (a) $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{2}{x}$

   (b) $f(x) = \frac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2}$

   (c) $f(x) = x^{\frac{2}{3}} + (x-2)^{\frac{2}{3}}$

   (d) $f(x) = x\sqrt{\frac{x}{2-x}}$

   (e) $f(x) = x^2 \ln x$

   (f) $f(x) = x^2 e^{\frac{1}{x}}$

4. Znajdź dwa nieznikające wyrazy rozwinięcia w szereg Taylora wokół minimum następujących funkcji

   (a) $f(x) = \alpha^2 \left[\left(\frac{\sigma}{x}\right)^{12} - \left(\frac{\sigma}{x}\right)^{6} \right] \quad x > 0$

   Odp: $\alpha^2(-\frac{1}{4} + \frac{9x^2}{\sigma^2 2^{\frac{1}{3}}})$ wokół $x_0 = 2^{\frac{1}{6}}\sigma$

   (b) $f(x) = \alpha^2 \left(1 - e^{-ax+b}\right)^2 \quad x > 0,\ a > 0$

   Odp: $\alpha^2 a^2 x^2 (1 - ax)$ wokół $x_0 = b/a$