

Matematyka I, zadania domowe, seria 5

1. Oblicz:

(a) $\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$,

(d) $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$,

(g) $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{4\pi}{5}\right)$,

(b) $\operatorname{arctg}(1)$,

(e) $\arccos\left(\cos\frac{4\pi}{5}\right)$,

(h) $\arccos\left(\sin\frac{4\pi}{5}\right)$,

(c) $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$,

(f) $\arcsin\left(\sin\frac{4\pi}{5}\right)$,

(i) $\arccos(\sin(2014\pi/5))$.

2. Oblicz:

(a) $\cos(\operatorname{arc}\operatorname{tg}(2))$,

(c) $\sin\left(\arccos\left(\frac{1}{3}\right)\right)$,

(b) $\sin(\operatorname{arc}\operatorname{ctg}(3))$,

(d) $\operatorname{tg}\left(\arccos\left(\frac{3}{5}\right)\right)$.

3. Rozwiąż równania:

(a) $\operatorname{tg}(3\arcsin x) = 1$,

(c) $\arccos(\sin x) = \frac{\pi}{6}$,

(b) $\arcsin(\cos x) = \frac{\pi}{3}$,

(d) (*) $\arcsin 2x + \arcsin x = \frac{\pi}{3}$,

(e) (*) $\arcsin\frac{2}{3\sqrt{x}} - \arcsin\sqrt{1-x} = \arcsin\frac{1}{3}$.

Wskazówka: (d) Zapisać $2x = \sin y = 2\sin z$ oraz $y = \frac{\pi}{3} - z$,

(e) $\frac{2}{\sqrt{3}}x = \sin y$, $\sqrt{1-x} = \sin z$, $\sin(y-z) = \frac{1}{3}$.

4. Która z pary liczb jest większa? Znaleźć odpowiedź bez użycia kalkulatora.

(a) $\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{5}{6}}$ czy $\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{2}{3}}$,

(b) $(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$ czy $(\sqrt{3})^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$.

5. Rozwiąż nierówności:

(a) $\frac{1}{x-\sqrt{x}} \geq \frac{4}{15}$,

(b) $2x > \sqrt{x+2} + \sqrt{2-x}$.

6. Dla jakich wartości parametru a równanie $ax^{-11/6} - 3x^{-5/6} + 9x^{1/6} = 0$ ma dwa różne rozwiązania?

7. (*) Wykaż, że:

(a) $\operatorname{arc}\operatorname{tg}\frac{7}{9} + \operatorname{arc}\operatorname{ctg}8 = \frac{\pi}{4}$,

(b) $2\operatorname{arc}\operatorname{tg}\frac{1}{4} + \operatorname{arc}\operatorname{tg}\frac{7}{23} = \frac{\pi}{4}$.

Wskazówka: Pokazujemy, że oba sumowane kąty należą do przedziału $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$. Następnie bierzemy tangens obu stron równania.

Odpowiedzi:

1. (a) $\frac{\pi}{3}$, (c) $-\frac{\pi}{6}$, (e) $\frac{4\pi}{5}$, (g) $-\frac{\pi}{5}$, (i) $\frac{3\pi}{10}$.
(b) $\frac{\pi}{4}$, (d) $\frac{2\pi}{3}$, (f) $\frac{\pi}{5}$, (h) $\frac{3\pi}{10}$.
2. (a) $\frac{1}{\sqrt{5}}$, (b) $\frac{3}{\sqrt{10}}$, (c) $2\sqrt{\frac{2}{3}}$, (d) $\frac{4}{3}$.
3. (a) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ lub $\frac{\sqrt{3}\pm 1}{2\sqrt{2}}$, (c) $\frac{\pi}{3} + 2n\pi$, $\frac{2\pi}{3} + 2n\pi$, (e) $\frac{2}{3}$.
(b) $\pm\frac{\pi}{6} + 2n\pi$, (d) $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{7}}$.
4. (a) $\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{5}{6}} < \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{2}{3}}$, (b) $(\sqrt{2})^{\sqrt{2}} > (\sqrt{3})^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$.
5. (a) $x \in]1, \frac{25}{4}]$, (b) $x \in]\frac{\sqrt{7}}{2}, 2]$.
6. $a \in]0, \frac{9}{4}[$.