

Matematyka I, zadania domowe, seria II

Zad. 1. Podziel wielomian $(x^4 + 5x^2 + 7x + 1)$ przez wielomian $(x - 1)$.

Zad. 2. Znajdź reszty z dzielenia wielomianu $x^{2016} + x^3 + 1$ przez wielomiany
a) $x^3 - x$, b) $7x^3 - 7x$, c) $x^2 - 4$, d) $x^3 + 1$.

Zad. 3. Znajdź odległość między wierzchołkami parabol $y = 2x^2 + 4x + 3$, $y = -x^2 + 4x - 7$.

Zad. 4. Rozwiąż równanie $2x^6 + 3x^5 - 10x^4 - 14x^3 + 9x^2 + 8x - 4 = 0$.

Zad. 5. Rozwiąż nierówność $\frac{x^3+x^2+2}{x^2+x-2} < \frac{2}{(x-1)^2}$.

Zad. 6. Wiedząc, że równanie $x^3 - 6x + 3 = 0$ ma trzy pierwiastki x_1, x_2, x_3 , oblicz $(x_1)^2 + (x_2)^2 + (x_3)^2$.

Zad. 7. Pierwiastki wielomianu $x^3 + ax^2 + bx + c = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$, spełniają $x_1^2 = x_2^2 = x_3^2$. Znajdź te pierwiastki, jeżeli $b=1$.

Zad. 8. Dla jakich wartości parametru c , równanie $x^3 + x^2 - c = 0$ ma dokładnie jedno rozwiązanie?

Zad. 9. Niech N będzie parzystą liczbą naturalną. Znajdź liczby całkowite l , dla których funkcja

$$f_N(x) = \frac{\prod_{k=1}^N (x - 2k)}{\prod_{k=1}^N (x + 2k)} = \frac{(x - 2)(x - 4)\dots(x - 2N)}{(x + 2)(x + 4)\dots(x + 2N)}$$

przyjmuje ujemne wartości. Innymi słowy, znajdź zbiór $\{l : f_N(l) < 0 \wedge l \in \mathbb{Z}\}$.

Zad. 10. Niech $x_i, i = 1, 2, 3$ będą pierwiastkami wielomianu $x^3 + px + q, q \neq 0$. Znając p i q , znaleźć wielomian, którego jedynymi pierwiastkami są liczby:

(a) $1/x_i, i = 1, 2, 3$; (b) $(x_i)^2, i = 1, 2, 3$; (c) $(x_i)^3, i = 1, 2, 3$

Odpowiedzi (i ew. podpowiedzi)

1. $x^3 + x^2 + 6x + 13 + \frac{14}{x-1}$

2. a) $x^2 + x + 1$, b) $x^2 + x + 1$, c) $4x + 2^{2016} + 1$, d) 1,

3. 5

4. $-2, -1, \frac{1}{2}, 2, \frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

5. $] - \infty, -2[\cup] - \sqrt{3}, 1[\cup] 1, \sqrt{3}[$

6. $(x_1)^2 + (x_2)^2 + (x_3)^2 = 12$ (Podnieś do kwadratu $x_1 + x_2 + x_3$.)

7. $x_1 = x_2 = x_3 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

8. $c < 0$ lub $c > \frac{4}{27}$ ($x^3 + x^2 - (1 + x_0)x_0^2 = (x - x_0)[x^2 + (1 + x_0)x + (1 + x_0)x_0]$)

9. $\left\{4k - 1 : 1 \leq k \leq \frac{N}{2} \wedge k \in \mathbb{N}\right\} \cup \left\{-4k + 1 : 1 \leq k \leq \frac{N}{2} \wedge k \in \mathbb{N}\right\}$ (Zamień iloraz na iloczyn.)

10. (a) $x^3 + \frac{p}{q}x^2 + \frac{1}{q}$; (b) $x^3 + 2px^2 + p^2x - q^2$; (c) $x^3 + 3qx^2 + (p^3 + 3q^2)x + q^3$