27.10.2016

Matematyka I, zadania domowe seria I

1. Wykazać, że dla dowolnego naturalnego n:

   a) liczba $n^3 + 2n$ jest podzielna przez 3,

   b) liczba $5^{n+1} + 2 \cdot 3^n + 1$ jest podzielna przez 8,

   c) liczba $5 \cdot 2^{3n-2} + 3^{3n-1}$ jest podzielna przez 19,

2. Dla jakich liczb naturalnych prawdziwe są następujące nierówności:

   a) $6n + 6 < 2^n$

   b) $3n^2 + 3n + 1 < 2^n$

   c) $n^3 < 2^n$

   Wskazówka: przy rozwiązywaniu kolejnych podpunktów można wykorzystać wyniki udowodnione we wcześniejszych.

3. Udowodnij, że dla dowolnej liczby naturalnej n:

   a) $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + ... + (-1)^{n-1}n^2 = (-1)^{n-1}\frac{n(n+1)}{2}$

   b) $2 \cdot 1^2 + 3 \cdot 2^2 + 4 \cdot 3^2 + ... + n(n-1)^2 + (n+1)n^2 = \frac{n(n+1)(n+2)(3n+1)}{12}$

   c) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(3k-2)(3k+1)} = \frac{n}{3n+1}$

   d) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)$

   e) $\sum_{k=n+1}^{2n+1} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{2n+1} (-1)^{k-1}\frac{1}{k}$

4. Znaleźć współczynnik

   a) stojący przy x^{99} w rozwinięciu $(1+3x)(1+x)^{100}$

   b) stojący przy wyrazie stałym (tzn. przy wyrazie nie zawierającym x) w rozwinięciu $(3x - \frac{2}{x^2})^9$

5. Pokazać, że

   a) $\sum_{k=0}^{n} (-2)^k \binom{n}{k} = (-1)^n$

   b) $\sum_{k=0}^{n} (2^k + 2^{2n+1-k}) \binom{2n+1}{k} = 3^{2n+1}$

6. Udowodnij, że dla dowolnej liczby naturalnej n

   a) $\binom{2n}{n} \le 4^n$

   b) $\binom{2n}{n} \ge \frac{4^n}{2\sqrt{n}}$

7. Udowodnij, że dla n naturalnych:

   a) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \ge \sqrt{n}$

   b)* $n! \le 2^{1-n}n^n$