

Seria zadań domowych z Matematyki I

1. Oblicz pochodne następujących funkcji (tam gdzie pochodne te istnieją):
 a) $\cos^2(\sin(x^2))$, b) $\frac{x\sqrt{x+1}}{x+2}$, c) $\frac{\sin(x)-x \cos(x)}{\cos(3x)}$, d) $\frac{\cos(x+1)}{\sin(x)}$, e) $\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}$, f) $\cos(4x) + \frac{x+1}{\sqrt{x+1}}$ g) $\ln(\cosh(x))$ i) $\sin(x^2)$ – druga pochodna.
2. Znajdź punkty, w których styczna do wykresu funkcji $f(x) = x^3 + 1$ jest nachylona do osi x pod kątem większym niż $\frac{\pi}{4}$.
3. Znajdź kąty pod jakimi przecinają się wykresy funkcji $f(x) = x$, $g(x) = x^2$.
4. Znajdź wartości parametru a , dla których funkcja $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - ax$ jest rosnąca. Funkcję f rozpatrujemy na zbiorze liczb rzeczywistych.
5. Dla jakich wartości parametrów a i b funkcja

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{dla } x \leq x_0 \\ ax + b & \text{dla } x > x_0 \end{cases}$$

jest różniczkowalna w punkcie x_0 ?

Odpowiedzi:

Zad. 1:

- a) $-4x \cos(\sin x^2) \sin(\sin x^2) \cos x^2$
- b) $\frac{x^2+6x+4}{2(x+2)^2\sqrt{x+1}}$
- c) $\frac{x \sin x \cos 3x + 3 \sin 3x (\sin x - x \cos x)}{\cos^2 3x}$
- d) $\frac{-\sin(x+1) \sin x - \cos x \cos(x+1)}{\sin^2 x}$
- e) $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$
- f) $-4 \sin 4x + \frac{x+2\sqrt{x}-1}{2\sqrt{x}(\sqrt{x+1})^2}$

Zad. 2:

$$x > \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ lub } x < -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Zad. 3:

$$\frac{\pi}{4}, \tan \gamma = \frac{1}{3}$$

Zad. 4:

$$a \leq 0$$

Zad. 5:

$$a = 2x_0 \quad b = -x_0^2$$