Matematyka I, zadania domowe, seria 7

Zadanie 1. Oblicz:

a) $\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\operatorname{arctg}(1)$, $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$, $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$.

Odpowiedź: Otrzymujemy odpowiednio $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{4}$, $-\frac{\pi}{6}$ oraz $\frac{2\pi}{3}$.

b) $\arccos\left(\cos\frac{4\pi}{5}\right)$, $\arcsin\left(\sin\frac{4\pi}{5}\right)$, $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{4\pi}{5}\right)$, $\arccos\left(\sin\frac{4\pi}{5}\right)$, $\arccos(\sin(-2013\pi/5))$.

Odpowiedź: Otrzymujemy odpowiednio $\frac{4\pi}{5}$, $\frac{\pi}{5}$, $-\frac{\pi}{5}$, $\frac{3\pi}{10}$, $9\pi/10$.

Zadanie 2. Oblicz:

$\cos(\operatorname{arctg}2)$, $\sin(\operatorname{arctg}3)$, $\sin\arccos(1/3)$,

Odpowiedź: $1/\sqrt{5}$, $3/\sqrt{10}$, $2\sqrt{2/3}$

Zadanie 3.

Rozwiąż równania:

a) $\operatorname{tg}(3\arcsin x) = 1$,

b) $\arcsin(\cos x) = \pi/3$,

c) $\arccos(\sin x) = \pi/6$,

d)* $\arcsin 2x + \arcsin x = \frac{\pi}{3}$,

e)* $\arcsin\frac{2}{3\sqrt{x}} - \arcsin\sqrt{1-x} = \arcsin\frac{1}{3}$.

Wskazówka: (d) Zapisać $2x = \sin y = 2\sin z$ oraz $y = \pi/3 - z$, (e) $2/\sqrt{3}x = \sin y$, $\sqrt{1-x} = \sin z$, $\sin(y-z) = 1/3$

Odpowiedzi: (a) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ lub $\frac{\sqrt{3}\pm 1}{2\sqrt{2}}$, (b) $\pm\pi/6 + 2n\pi$, (c) $\pi/3 + 2n\pi, 2\pi/3 + 2n\pi$ (d) $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{7}}$, (e) $\frac{2}{3}$.

Zadanie 4.

Rozwiąż nierówności:

a) $\frac{1}{x-\sqrt{x}} \geqslant \frac{4}{15}$,

b) $2x > \sqrt{x+2} + \sqrt{2-x}$.

Odpowiedzi: (a) $x \in]1, \frac{25}{4}]$, (b) $x \in]\frac{\sqrt{7}}{2}, 2]$.

Zadanie 5.

Dla jakich wartości parametru a równanie

$ax^{-11/6} - 3x^{-5/6} + 9x^{1/6} = 0$

ma dwa różne rozwiązania?

Odpowiedź: $a \in]0, \frac{9}{4}[$.

Zadanie 6.* Wykaż, że:

a) $\operatorname{arctg}\frac{7}{9} + \operatorname{arcctg} 8 = \frac{\pi}{4}$,

b) $2\operatorname{arctg}\frac{1}{4} + \operatorname{arctg}\frac{7}{23} = \frac{\pi}{4}$.

Wskazówka: Pokazujemy, że oba sumowane kąty należą do przedziału $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$. Następnie bierzemy tangens obu stron równania.