

Matematyka I, zadania domowe, seria II

Zadanie 1. Rozwiąż następujące układy równań:

1.
$$\begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ x - y + 2z = -1, \\ 2x + z = 1 \end{cases}$$

2.
$$\begin{cases} x - y + z = -2 \\ x + 3z = -2, \\ -x + 2y + z = 2 \end{cases}$$

3.
$$\begin{cases} 2x + 3y + 5z = -2 \\ 4x - 2y + 2z = -1. \\ 2x + y + 3z = 4 \end{cases}$$

4.
$$\begin{cases} 2t + 3x + 2y + z = 6 \\ t + 2x - 2y + 2z = -1 \\ 3t - x - 2y - z = -5 \\ t - 3x + 2y - 3z = 1 \end{cases}.$$

5.
$$\begin{cases} 2t + 3x + 2y + z = 2 \\ t + 2x - 2y + 2z = -1 \end{cases}.$$

Zadanie 2. Wykonaj mnożenie macierzy AB i BA (o ile jest to możliwe) w następujących przypadkach:

1.
$$A = [1 \quad -2 \quad -4 \quad 5], \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}$$

2.
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

3.

$$A = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix}, \quad B = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ -1 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$$

Zadanie 3. Znajdź macierze odwrotne do macierzy

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 5 & -2 & 1 \\ 3 & 6 & -3 & 2 \\ 3 & 3 & -2 & 1 \\ 3 & 7 & -3 & 2 \end{bmatrix}, \quad \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)}} \begin{bmatrix} 1 & -\beta \\ -\beta & 1 \end{bmatrix},$$

gdzie $\varphi \in \mathbb{R}$ i $-1 < \beta < 1$.

Zadanie 4. Pokaż, że dla każdego naturalnego n zachodzi

1.

$$\begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} 1 & na \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

gdzie a jest dowolną liczbą rzeczywistą.

2.

$$\begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} \cos n\phi & \sin n\phi \\ -\sin n\phi & \cos n\phi \end{bmatrix},$$

Wskazówka: Wykorzystać wzory na $\sin(\alpha + \beta)$ i $\cos(\alpha + \beta)$.

Zadanie 5*. Niech

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Znajdź wszystkie rozwiązania równania

$$A^2 = \mathbf{1},$$

gdzie $\mathbf{1}$ jest macierzą jednostkową 2×2 . *Wskazówka:* Wymnożyć macierze i dostać 4 równania (nieliniowe!), w których trzeba rozpatrzeć różne przypadki.

Odpowiedzi

Zadanie 1.

1. $x = 1, y = 0, z = -1$;

2.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix};$$

3. Układ równań nie ma rozwiązań.

4. $t = 1, x = -2, y = 3, z = 4$

5. $t = 6y - 3z - 4, x = -10y + 4z + 7, y, z$ dowolne

Zadanie 2.

1.

$$AB = [-11], \quad BA = \begin{bmatrix} 2 & -4 & -8 & 10 \\ -1 & 2 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 6 & 12 & -15 \end{bmatrix};$$

2.

$$BA = \begin{bmatrix} 2 & -10 & -15 \\ 4 & -6 & -2 \end{bmatrix};$$

3.

$$AB = BA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Zadanie 3.

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 3 & 7 & -5 & -6 \\ 0 & 5 & -3 & -3 \end{bmatrix}, \quad \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)}} \begin{bmatrix} 1 & \beta \\ \beta & 1 \end{bmatrix}.$$

Zadanie 5*.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ lub } A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ lub} \\ A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ lub } A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ lub} \\ A = \begin{bmatrix} \sqrt{1-bc} & b \\ c & -\sqrt{1-bc} \end{bmatrix} \text{ lub } A = \begin{bmatrix} \sqrt{1-bc} & b \\ c & -\sqrt{1-bc} \end{bmatrix}$$

dla $b, c \in \mathbb{R}$ i $bc \leq 1$.