

Matematyka I, zadania domowe, seria 14

Zadanie 1. Wyznaczyć granice następujących ciągów:

$$a_n = \left(1 - \frac{3}{n}\right)^n, \quad b_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n, \quad c_n = \left(\frac{3n+1}{3n+2}\right)^{6n}, \quad d_n = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n, \quad e_n = \left(\frac{n+5}{n}\right)^n, \quad f_n = \left(1 - \frac{4}{n}\right)^{-n+3},$$

$$g_n = \left(\frac{n^2+6}{n^2}\right)^{n^2}, \quad h_n = \left(\frac{n^2+2}{2n^2+1}\right)^{n^2}, \quad i_n = \frac{\ln\left(1+\frac{4}{n}\right)}{\frac{1}{n+3}}, \quad j_n = \left(1 - \frac{3}{n}\right)^{n^2}, \quad k_n = \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}{2^n}, \quad l_n = \frac{8^{\log_2 n}}{2^n},$$

$$m_n = \left(\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{2n}{n+1}}, \quad n_n = \left(\frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}}{2}\right)^n \quad (a, b > 0), \quad o_n = \frac{\log_2(n+1)}{\log_3(n+1)}, \quad p_n = \frac{\log_n(n+1)}{\log_n(n+2)}, \quad q_n = \left(1 - \frac{3}{n^2}\right)^n,$$

$$r_n = \frac{\log_2(n^4+1)}{\log_2(n^2+1)}, \quad s_n = \left(\cos \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{\sin \frac{1}{n} \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{n}}}, \quad t_n = (\ln n)^{\frac{1}{n}}, \quad u_n = (\operatorname{tgh} n)^{\sinh^2 n}.$$

Zadanie 2. Dla jakich wartości parametru k granicą ciągu o wyrazie ogólnym

$$a_n = \frac{kn^2}{(k-1)n^2 + n},$$

przy $n \rightarrow \infty$, jest liczba dodatnia?

Zadanie 3. Niech x_n będzie ciągiem zbieżnym i niech y_n będzie określony wzorem

$$y_n = \frac{n^2 x_n + 4n - 1}{n^2 x_n - 5n + 2}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Wykazać, że

- jeśli $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \neq 0$ to ciąg y_n jest zbieżny
- jeśli $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ to ciąg y_n może być zbieżny lub nie a ponadto jego granica może być dowolną liczbą (w zależności od ciągu x_n).

Zadanie 4. Wyznaczyć długość krzywej łamanej $M_0 M_1 M_2 \dots$ wpisanej w spiralę logarytmiczną $r = e^{-\varphi}$, gdzie r, φ są współrzędnymi biegunowymi:

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi.$$

Wierzchołki M_n krzywej mają współrzędne $\varphi_n = \frac{n\pi}{2}$, $n = 0, 1, 2, \dots$

Odpowiedzi: 1. $a_n \rightarrow 1/e^3$, $b_n \rightarrow 1/e$, $c_n \rightarrow 1/e^2$, $d_n \rightarrow 1$, $e_n \rightarrow e^5$, $f_n \rightarrow e^4$, $g_n \rightarrow e^6$, $h_n \rightarrow 0$, $i_n \rightarrow 4$, $j_n \rightarrow 0$, $k_n \rightarrow \infty$, $l_n \rightarrow 0$, $m_n \rightarrow 0$, $n_n \rightarrow \sqrt{ab}$, $o_n \rightarrow \ln 3 / \ln 2$, $p_n \rightarrow 1$, $q_n \rightarrow 1$, $r_n \rightarrow 2$, $s_n \rightarrow \frac{1}{\sqrt{e}}$, $t_n \rightarrow 1$, $u_n \rightarrow \frac{1}{\sqrt{e}}$.

2. $k \in]-\infty, 0[\cup]1, \infty[$

4. $\frac{\sqrt{e^\pi + 1}}{e^{\pi/2} - 1}$