

Matematyka I, zadania domowe, seria 11

Zadanie 1. Zbadać zbieżność ciągów określonych rekurencyjnie (w przypadku ciągów zbieżnych obliczyć granicę):

a)

$$a_{n+1} = 5 \frac{3a_n + 1}{2a_n + 6}, \quad a_1 = 6$$

b) *

$$a_{n+1} = \frac{3}{4a_n + 1}, \quad a_1 > 1.$$

Zadanie 2. Zbadać zbieżność ciągu określonego rekurencyjnie (w przypadku gdy jest zbieżny obliczyć granicę):

$$a_{n+1} = \frac{1}{4} a_n^2 + 1,$$

dla przypadków:

a) $0 < a_1 < 2$

b) $a_1 > 2$.

Zadanie 3. Ciąg rekurencyjny zadany jest wzorem

$$a_{n+1} = \sin a_n + a_n, \quad a_1 = 3.$$

Znajdź granicę $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

Zadanie 4. Znajdź granicę ciągu

$$a_{n+1} = \frac{1}{2} a_n + 1, \quad a_1 = 0.$$

Zadanie 5. Sprawdź, że obrazem przekształcenia

$$\mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{4}{5} \right\} \ni x \rightarrow f(x) = -\frac{4x + 3}{5x + 4}$$

jest zbiór $\mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{4}{5} \right\}$, a więc ciąg określony rekurencyjnie

$$a_{n+1} = f(a_n)$$

jest dobrze zdefiniowany dla każdego $a_1 \neq -\frac{4}{5}$. Dla jakich wartości a_1 ciąg ten ma granicę.

Wskazówka: Obliczyć $f(f(x))$.

Odpowiedzi: 1) a) 5 b) $\frac{3}{4}$ 2) a) 2 b) ∞ 3) π 4) 2 5) $a_1 \in \left\{ -1, -\frac{3}{5} \right\}$