

Matematyka I, zadania domowe seria 10

Oblicz granice:

1. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + x^2 + \dots + x^p - p}{x - 1}$
2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)(1+2x)\dots(1+px) - 1}{x}$
3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \sin x}{\sin x}$
4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^3 + 4x^2)^{\frac{1}{3}} - x}{\sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x}}$
5. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 - x \left[\frac{1}{x}\right]\right)$ (przez $[x]$ oznaczamy część całkowitą liczby x)
6. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 3x + 2}{x^5 - 4x + 3}$
7. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3}\right)$
8. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 2x}{1 - \cos x}$

Odpowiedzi: 1,2: $p(p+1)/2$, 3: 1, 4: $8/3$, 5: 0, 6: 1, 7: -1, 8: 8.

9. Znajdź granice

- (a) $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{\ln x - \ln 7}{x - 7}$
- (b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x^2 - x + 1)}{\ln(x^4 + x^2 + 1)}$
- (c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^7}{e^x}$
- (d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x}}{\ln x}$
- (e) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt[3]{x} \ln x$
- (f) $\lim_{x \rightarrow 7^-} \ln(x - 6) \ln(7 - x)$
- (g) $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{\ln(x-1)} - \frac{1}{x-2}\right)$
- (h) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} (\sin 3x)^{\operatorname{tg} 3x}$

(i) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 2} \right)^x$

10. Wypisz wzór Maclaurina z resztą R_3 w postaci Lagrange'a dla funkcji $f(x) = \frac{x \sin x}{\cos x + 2}$

11. Zbadaj przebieg zmienności funkcji

(a) $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{2}{x}$

(b) $f(x) = \frac{2x+1}{x-4}$

(c) $f(x) = \frac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2}$

(d) $f(x) = \frac{x^2-6x+13}{x-3}$

(e) $f(x) = x^{\frac{2}{3}} + (x-2)^{\frac{2}{3}}$

(f) $f(x) = x\sqrt{\frac{x}{2-x}}$

(g) $f(x) = x^2 \ln x$

(h) $f(x) = x^2 e^{\frac{1}{x}}$

(i) $f(x) = e^{\frac{x}{x-1}}$

12. Znajdź dwa nieznikające wyrazy rozwinięcia w szereg Taylora wokół minimum następujących funkcji

(a) $f(x) = \alpha^2 \left[\left(\frac{\sigma}{x} \right)^{12} - \left(\frac{\sigma}{x} \right)^6 \right] \quad x > 0$

(b) $f(x) = \alpha^2 \left(1 - e^{-ax+b} \right)^2 \quad x > 0, a > 0$