15.10.2012

Matematyka I, zadania domowe seria I

1. Wykazać, że dla dowolnego naturalnego n:
   - liczba $n^3 + 2n$ jest podzielna przez 3,
   - liczba $5^{n+1} + 2 \cdot 3^n + 1$ jest podzielna przez 8,
   - liczba $5 \cdot 2^{3n-2} + 3^{3n-1}$ jest podzielna przez 19,

2. Dla jakich liczb naturalnych prawdziwe są następujące nierówności:

   a) $6n + 6 < 2^n$

   b) $3n^2 + 3n + 1 < 2^n$

   c) $n^3 < 2^n$

   Wskazówka: przy rozwiązywaniu kolejnych podpunktów można wykorzystać wyniki udowodnione we wcześniejszych.

3. Udowodnic za pomoca metody indukcji matematycznej, ze dla n naturalnych:
   - $1^3+2^3+\dots+n^3 = (1+2+\dots+n)^2$, Wskazówka: skorzystaj z $1+2+\dots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$
   - $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + ... + (-1)^{n-1}n^2 = (-1)^{n-1}\frac{n(n+1)}{2}$
   - $2 \cdot 1^2 + 3 \cdot 2^2 + 4 \cdot 3^2 + ... + n(n-1)^2 + (n+1)n^2 = \frac{n(n+1)(n+2)(3n+1)}{12}$
   - $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{n}{2n+1}$
   - $\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{2n}{2n+1}$
   - $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(3k-2)(3k+1)} = \frac{n}{3n+1}$
   - $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)$

4.* Udowodnic za pomoca metody indukcji matematycznej, że dla n naturalnych:
   - $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \sqrt{n}$
   - $(1 + x_1)(1 + x_2)...(1 + x_n) \geq 1 + x_1 + x_2 + ... + x_n$ przy założeniu: $x_1, x_2, ..., x_n \geq 0$ (wniosek: nierówność Bernoulliego $(1 + x)^n \geq 1 + nx$).
   - $a^n + b^n \leq (a + b)^n \leq 2^n(a^n + b^n)$, $a, b \geq 0$
   - $(n + 1)^n < n^{(n+1)}$ dla $n \geq 3$

5. Jaka liczba jest współczynnikiem przy x^{97} w rozwinięciu $(1 + x)^{100}$?

6. Pokazać, że $\sum_{k=0}^{n}(-2)^k \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right) = (-1)^n$

7. Znaleźć wyrażenie nie zawierające x w rozwinięciu $(3x - \frac{2}{x^2})^9$

8. Znaleźć współczynnik stojący przy $1/x$ oraz $1/x^2$ rozwinięcia $(2x + \frac{1}{2x})^9$.

9. Znaleźć $n > 0$ takie, że współczynniki stojące przy wyrazeniu x^2 w rozwinieciu $(1 + x)^{2n}$ oraz $(1 + 15x^2)^n$ sa sobie równe.