1 O sumie n pierwszych wyrazów ciągu geometrycznego i jego konsekwencjach.

Ciągiem geometrycznym nazywamy taki ciąg liczbowy a_n, w którym istnieje taka liczba q, że dla każdego n (gdy ciąg będzie nieskończony) i dla każdego $n \leqslant k-1$ (kiedy ciąg jest skończony, k-wyrazowy, $k \geqslant 3$) spełniony jest warunek:

$$a_{n+1} = q \cdot a_n \tag{1}$$

Liczba q to iloraz ciągu geometrycznego. Wzór na n-ty wyraz ciągu geometrycznego jest następujący:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \tag{2}$$

Każdy wyraz ciągu geometrycznego oprócz pierwszego i ostatniego (w przypadku skończoności ciągu) spełnia warunek:

$$a_n^2 = a_{n-1} \cdot a_{n+1} \tag{3}$$

Z równości (3) wynika, że każdy wyraz ciągu geometrycznego o wyrazach dodatnich z wyjątkiem pierwszego (i ostatniego, gdy ciąg jest skończony) jest średnią geometryczną wyrazów sąsiednich:

$$a_n = \sqrt{a_{n-1}a_{n+1}} \tag{4}$$

Zakładając, że (a_n) będzie ciągiem geometrycznym, to sumę n początkowych wyrazów tego ciągu oznaczmy poprzez S_n. Zachodzi wtedy następujące twierdzenie: Jeśli (a_n) jest ciągiem geometrycznym o ilorazie q, to suma n początkowych wyrazów tego ciągu wyraża się wzorem:

$$a) \bigwedge_{n \in N+} S_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}, \qquad o\, ile\, q \neq 1 \tag{5}$$

$$b) \bigwedge_{n \in N+} S_n = n \cdot a_1, \qquad o\, ile\, q = 1 \tag{6}$$

Dowód pokażmy za pomocą indukcji matematycznej:

$$1) \qquad n = 1 \tag{7}$$

$$S_1 = a_1 \frac{1-q^1}{1-q} = a_1 \tag{8}$$

Z drugiej strony zgodnie z określeniem S_1 mamy też $S_1 = a_1$

$$2) \quad \bigwedge_{k \in N+} S_k = a_1 \cdot \frac{1-q^k}{1-q} \Rightarrow S_{k+1} = a_1 \cdot \frac{1-q^{k+1}}{1-q} \tag{9}$$

$$S_{k+1} = a_1 + a_2 + ... + a_k + a_{k+1} = a_1 \cdot \frac{1-q^k}{1-q} + a_{k+1} = a_1 \cdot \frac{1-q^k}{1-q} + a_1 \cdot q^k = \tag{10}$$

$= a_1 \cdot \frac{1-q^k+q^k-q^{k+1}}{1-q} = a_1 \cdot \frac{1-q^{k+1}}{1-q}$

Na mocy zasady indukcji matematycznej z punktów 1) i 2) wynika, że wzór $S_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q}$ jest prawdziwy dla każdego $n \in N_+, q \neq 1$. Jeśli q $=$ 1, to ciąg geometryczny jest stały, więc: $S_n = a_1 + a_1 + ... + a_1 = n \cdot a_1$, co udowadnia twierdzenie.