Zadania 5 przygotowujące do egzaminu z algebry

1. Znajdź wartości własne i wektory własne następujących macierzy

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 2 \\ -103 & 100 & 2 \\ -4 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 6 & -2 & -2 \\ 8 & -8 & 0 \\ 10 & -14 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ 1 & -3 & 3 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 7 & -4 & -1 \\ 9 & -10 & 1 \\ 12 & -18 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 3 & -6 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} -3 & -1 & -5 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

2. Znajdź

   (a) $\mathbf{A}^{77}$, (b) $\mathbf{P}^n$, (c) $e^{t\mathbf{B}}$, (d) $e^{t\mathbf{R}}$.

3. Rozwiąż równania różniczkowe

   (a) $\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{B}\mathbf{X}(t)$, (b) $\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{P}\mathbf{X}(t)$, (c) $\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{R}\mathbf{X}(t)$.

4. Rozwiąż równanie różnicowe $\mathbf{X}_{n+1} = \mathbf{R}\mathbf{X}_n$.

5. W przypadku wszystkich diagonalizowalnych macierzy z zadania 1 rozwiąż równanie różniczkowe $\ddot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{M}\mathbf{X}(t)$, gdzie $\mathbf{M}$ jest wybraną diagonalizowalną macierzą z zadania 1.

6. W przypadku wszystkich macierzy niediagonalizowalnych znajdź podprzestrzenie pierwiastkowe.

7. Obliczyć e^{ts_1}, e^{ts_2}, e^{ts_3}, gdzie $s_1 = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}$, $s_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, $s_3 = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$ są macierzami rozpinającymi algebrę Liego $SU(2)$.

   Sugerowana metoda: podnieść do kwadratu każdą z macierzy a potem wysumować szereg. Rozwiązanie tego zadania na następnej stronie.

$$e^{ts_i} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n s_i^n}{n!} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n)!} + s_i \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cos t + s_i \sin t$$