Zadania domowe z Algebry z geometrią I ostatnie

1. Odwzorowanie $\phi : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ dane jest wzorem:

$$(\phi u)(x) = \begin{bmatrix} u'(0) + u(0) & u'(0) \\ u''(0) & u(0) \end{bmatrix}$$

   (a) udowodnij, że odwzorowanie ϕ jest liniowe,

   (b) sprawdź, że zbiór $f := \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ tworzy bazę w $\mathbb{R}^{2\times 2}$,

   (c) znajdź macierz odwzorowania ϕ w bazie $e := \{1, x, x^2\}$ i bazie f z poprzedniego podpunktu,

   (d) wyznacz bazę jądra i bazę obrazu zadanego odwzorowania.

2. Znajdź jądro i obraz odwzorowania liniowego $L : \mathbb{R}^4 \ni X \mapsto Y = MX \in \mathbb{R}^3$, gdzie $M = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

3. Niech $V_1 =< \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} >$, $V_2 =< \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix} >$. Znaleźć operator P rzutu wzdłuż V_1 na V_2. Znaleźć operator Q rzutu wzdłuż V_2 na V_1. Znaleźć rzuty wektorów $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix}$ wzdłuż V_1 na V_2.

4. Wiedząc, że objętość równoległościanu rozpiętego na kolumnach macierzy jednostkowej 7×7 wynosi 1, znajdź objętość równoległościanu rozpiętego na kolumnach poniższej macierzy

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 3 \\ 1 & 3 & 3 & 4 & 5 & 6 & 4 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 5 & 6 & 5 \\ 1 & 5 & 99 & 8 & 5 & 6 & 6 \\ 1 & 6 & 98 & 69 & 10 & 6 & 7 \\ 1 & 7 & 97 & 68 & 11 & 12 & 8 \\ 1 & 8 & 96 & 67 & 12 & 13 & 10 \end{bmatrix}.$$