Zadania domowe z Algebry z geometrią I przygotowujące do drugiego kolokwium

1. Zbiór wektorów $e = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ tworzy bazę. Czy zbiory $f = (\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ oraz $g = (\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ zadane przez równości

$$\begin{cases} \vec{f_1} = \vec{e_1} + 2\vec{e_2} + \vec{e_3} \\ \vec{f_2} = 3\vec{e_1} + 5\vec{e_2} + 2\vec{e_3} \\ \vec{f_3} = 4\vec{e_1} + 6\vec{e_2} + 3\vec{e_3} \end{cases} \qquad \begin{cases} \vec{g_1} = \vec{e_1} + \vec{e_3} \\ \vec{g_2} = \vec{e_1} - \vec{e_2} + 3\vec{e_3} \\ \vec{g_3} = \vec{e_1} - \vec{e_2} + 4\vec{e_3} \end{cases}$$

także tworzą bazy? Jeśli tak, znaleźć macierze przejścia z bazy f do bazy g oraz z bazy g do bazy e. Znaleźć współrzędne wektora

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}^e$$

w bazach f i g.

2. Dla jakich wartości parametrów a, b i c wektory

$$\vec{e_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{e_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \vec{e_3} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

tworzą bazę przestrzeni 3-wymiarowej? W przypadku gdy $e = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ jest bazą, wyrazić w bazie e wektory

$$\vec{v_1} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}, \quad \vec{v_2} = \begin{bmatrix} a \\ c \\ b \end{bmatrix}, \quad \vec{v_3} = \begin{bmatrix} c \\ a \\ b \end{bmatrix}, \quad \vec{v_4} = \begin{bmatrix} c \\ b \\ a \end{bmatrix}, \quad \vec{v_5} = \begin{bmatrix} b \\ c \\ a \end{bmatrix}, \quad \vec{v_6} = \begin{bmatrix} b \\ a \\ c \end{bmatrix}.$$

3. Opisz podprzestrzeń najmniejszego wymiaru, do którego należą poniższe wektory

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \\ 3 \\ -5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \\ -9 \\ 7 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ 6 \\ -7 \end{bmatrix}.$$

4. W przestrzeni $\mathbb{R}^4$ określamy podprzestrzenie

$$U = \left\{ a \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}, \qquad V = \left\{ a \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

Wykazać, że $\mathbb{R}^4 = U \oplus V$, tzn. każdy wektor z przestrzeni $\mathbb{R}^4$ jest kombinacją liniową wektorów z przestrzeni U i V oraz przecięcie przestrzeni U i V jest puste.

5. Zdefiniować poniższe podprzestrzenie liniowe przy użyciu układów równań liniowych

$$V_1 = \left\{ a\begin{bmatrix}1\\-1\\1\\0\end{bmatrix} + b\begin{bmatrix}1\\1\\0\\1\end{bmatrix} + c\begin{bmatrix}2\\0\\1\\1\end{bmatrix} : a,b,c \in \mathbb{R} \right\}, \quad V_2 = \left\{ a\begin{bmatrix}1\\-1\\1\\-1\\1\end{bmatrix} + b\begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\\3\end{bmatrix} + c\begin{bmatrix}3\\1\\1\\-1\\7\end{bmatrix} : a,b,c \in \mathbb{R} \right\},$$

$$V_3 = \left\{ a\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix} : a \in \mathbb{R} \right\}, \quad V_4 = \left\{ a\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} + b\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix} : a,b \in \mathbb{R} \right\}.$$

6. Opisać następujące podprzestrzenie wektorowe:

$$V_1 = \left\{ \begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \; x+2y+z=0,\; 2x+y+2z=0 \right\}, \quad V_2 = \left\{ \begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x+2y+3z=0 \right\}.$$

Jakie są wymiary tych podprzestrzeni?

7. Znajdź sumę algebraiczną i część wspólną podprzestrzeni

$$U = \left\{ a\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix} + b\begin{bmatrix}4\\3\\2\\1\end{bmatrix} : a,b \in \mathbb{R} \right\}, \qquad V = \left\{ \begin{bmatrix}x\\y\\z\\t\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 : \; x-3z+2v=0,\; y-2z+v=0 \right\}.$$

8. Zapisać wektor $w(x) = x^3 + x^2 + x + 1$ w bazie

$$e = (x(x-1)(x-2), x(x-1), x, 1).$$

9. Oblicz

$$\sum_{k=1}^{n} (k^3 + k^2 + k + 1)$$

10. Na przestrzeni wektorowej $V =< 1, \sin x, \cos x >$ (podzbiór zbioru funkcji na $\mathbb{R}$ rozpięty przez funkcje 1, $\sin x$, $\cos x$) rozważamy odwzorowanie $L : V \to \mathbb{R}^2$ zadane przez $V \ni f(x) \mapsto \begin{bmatrix}f(0)\\f(\pi/2)\end{bmatrix}$. Czy odwzorowanie to jest liniowe? Znajdź macierz odzorowania w bazach $e = \big(1, \sin(x+\frac{\pi}{4}), \cos(x+\frac{\pi}{4})\big)$

11. Rozważmy odwzorowanie $L : \mathbb{R}^{2\times 2} \ni X \to Y \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ (z przestrzni macierzy kwadratowych 2×2 w tęże przestrzeń), zadane w następujący sposób: ij-ty element macierz Y jest sumą elementów z i-tego wiersza i j-tej kolumny macierzy X z pominięciem elementu ij. Czy jest to odwzorowanie liniowe? Znajdź macierz tego odwzorowania w bazach $e = f = (\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix})$

12. Bazą dualną do bazy $(e_1, \ldots, e_n)$ przestrzeni V nazywamy uporządkowany zbiór wektorów (nazywanych również kowektorami) $(e^1, \ldots, e^n)$ z przestrzeni V^* (tzn. przestrzeni odwzorowań liniowych $V \to \mathbb{K}$), taki że $e^i(e_j) = \delta^i{}_j$, gdzie $\delta^i{}_j$ oznacza deltę Kroneckera. Elementy $\mathbb{R}^{n*}$ reprezentujemy przez macierze $[a_1, \ldots, a_n] =: a$. Działanie kowektora a na wektor $\begin{bmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^n \end{bmatrix} =: v$ jest w tym przypadku niczym innym jak mnożeniem macierzowym $a(v) = av = a_i v^i$.

    Znajdź bazę dualną do

$$\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

    Skorzystaj z wyniku ostatniego zadania z trzeciej serii (kowektory kobazy są wierszami macierzy odwrotnej do macierzy, której kolumnami są wektory bazy).