

# Zadania domowe z Algebry z geometrią I

## Ciała, grupy, wielomiany

1. Niech  $p$  jest liczbą pierwszą. Pokaż, że zachodzi rozdzielnosc mnozenia modulo  $p$  wzgledem dodawania modulo  $p$  w zbiorze  $\overline{1, p-1}$ . Wskazowka: skorzystaj z faktu, ze dla liczb naturalnych zachodzi rozdzielnosc mnozenia wzgledem dodawania.
2. Niech  $A$  oznacza zbior wielomianow stopnia co najwyzej drugiego o wspolczynnikach z ciala  $\mathbb{Z}_2$ . Ile elementow ma ten zbior? Wykluczajac ze zbioru wielomian zerowy definiujemy iloczyn wielomianow  $w_1(x)$ ,  $w_2(x)$  w zbiorze  $A$  jako reszte z dzielenia iloczynu  $w_1(x)w_2(x)$  przez wielomian  $x^3 + x + 1$  (nad cialem  $\mathbb{Z}_2$ ). Znajdz tabelę mnozenia. Czy  $A \setminus \{0\}$  wraz z powyzej zdefiniowanym mnozeniem jest grupa? Ktore z wielomianow stopnia 3 nad  $\mathbb{Z}_2$  sa nierozkladalne na iloczyn wielomianow stopnia nizszego niz 3.
3. Wielomian  $x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 6x + 3$  nad cialem  $\mathbb{R}$  ma cztery pierwiastki rzeczywiste  $x_1, x_2, x_3, x_4$ . Znajdz  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4$ ,  $(x_1 + x_2 + x_3)x_4 + (x_1 + x_2)x_3 + x_1x_2$ ,  $x_1x_2x_3x_4$ ,  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$ .
4. Znajdz wszystkie pierwiastki wymierne wielomianu  $x^4 - \frac{7x^3}{2} + x^2 + \frac{7x}{2} + 1$ . Znajdz wszystkie pierwiastki rzeczywiste tego wielomianu.