DODATKOWE WYMIARY

1

Rozważmy metrykę postaci:

$$(1) \qquad g_{MN} = \left(\begin{array}{c|c} g_{\mu\nu}(x) & \\ \hline & \gamma_{ij}(y) \end{array} \right)$$

Niech wartość próżniowa metryki (metryka tła) ma postać:

$$\langle g_{MN} \rangle_0 = \begin{pmatrix} \eta_{\mu\nu} & \phi \\ \phi & -\delta_{ij} \end{pmatrix}$$

tzn.

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu - \delta_{ij} dy^i dy^j$$

$i = 1, 2, \dots, n$

Przy założeniu (1) otrzymujemy dla skalara krzywizny:

$$\underset{\substack{\uparrow \\ R^{(4+n)}}}{R(g_{MN})} = \underset{\substack{\uparrow \\ R^{(4)}}}{R(g_{\mu\nu})} + \underset{\substack{\uparrow \\ R^{(n)}}}{R(\gamma_{ij})}$$

Uwaga!

$$R = g^{ik} R_{ik}$$

$$R_{ik} = \frac{\partial \Gamma^{l}_{ik}}{\partial x^{l}} - \frac{\partial \Gamma^{l}_{il}}{\partial x^{k}} + \Gamma^{l}_{ik} \Gamma^{m}_{lm} - \Gamma^{m}_{il} \Gamma^{l}_{km},$$

$$\Gamma^{l}_{il} = \frac{1}{2} g^{lm} \frac{\partial g_{lm}}{\partial x^{i}}$$

$$\Gamma^{l}_{ik} = \frac{1}{2} g^{lm} \left(\frac{\partial g_{mi}}{\partial x^{k}} + \frac{\partial g_{mk}}{\partial x^{i}} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^{m}} \right).$$

REDUKCJA DZIAŁANIA
GRAWITACYJNEGO

$$S_{graw} = \frac{1}{16\pi G_{4+n}} \int d^{4+n}x \sqrt{-g_{4+n}}\, R(g_{MN})$$

$$\frac{1}{8\pi G_{4+n}} \equiv M_{4+n}^{2+n}$$; M_{4+n}: $(4+n)$-wymiarowa skala Plancka!

$$\frac{1}{8\pi G_{4}} \equiv M_{P}^{2}$$ ← 4-wymiarowa skala Plancka

$$M_4 = M_P = 2.4 \times 10^{18}\ \mathrm{GeV}$$

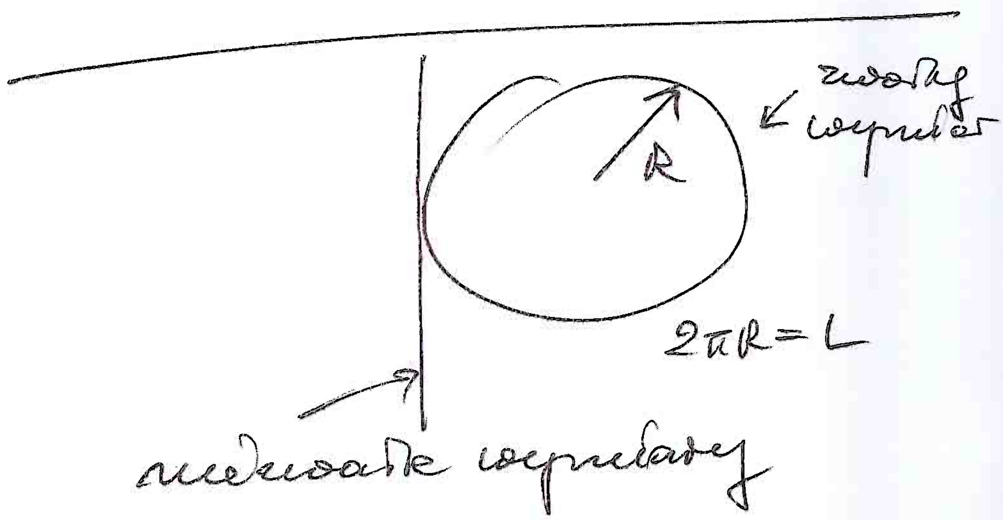
1 GeV = 1 masa protonu

$$S_{grav} = \frac{M_{4+n}^{2+n}}{2} \int d^4x \, d^n y \sqrt{-g_4} \sqrt{\gamma} \, R^{(4)} + \dots$$

$$= \frac{M_{4+n}^{2+n}}{2} \left(\int d^n y \sqrt{\langle \gamma \rangle} \right) \int d^4x \sqrt{-g_4} \, R^{(4)} + \dots$$

$$\equiv \frac{M_P^2}{2} \int d^4x \sqrt{-g_4} \, R^{(4)} + \dots$$

Niech $\int d^n y \sqrt{\langle \gamma \rangle} \equiv V_n = (2\pi R)^n = L^n$



$$\Rightarrow \quad M_4^2 = M_P^2 = V_n (M_{4+n})^{2+n}$$

„Rozwiązanie" problemu hierarchii

skąd: $M_{4+n} = 1\ \text{TeV} =$ skala Fermiego!

$= M_{SM}$

$$L^{n/2} = \frac{M_P}{(M_{4+n})^{1+\frac{n}{2}}}$$

$M_{4+n} = 1\,\mathrm{TeV} \Longrightarrow \quad L \sim 10^{\frac{32}{n} - 3}\,\frac{1}{\mathrm{GeV}}$

$n = 1 \Longrightarrow \quad L \sim 10^{29}\,\frac{1}{\mathrm{GeV}} = 10^{15}\,\mathrm{mm}$

odległość rzędu
rozmiarów układu
słonecznego

$n = 2 \Longrightarrow$

$L \sim 10^{13}\,\frac{1}{\mathrm{GeV}} = 10^{-1}\,\mathrm{mm}$

na granicy
doświadczenia

$\Longrightarrow \quad n \geqslant 2$

Rozkład pola skalarnego na mody Kaluzy-Kleina

$$S = \int d^{4+n}x \sqrt{-g_{4+n}} \left(\frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 + \right.$$

$$- \frac{1}{2} (\partial_{y_i} \phi)^2 - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 +$$

$$\left. - \frac{g_{(4+d)}}{4!} \phi^4 \right)$$

Niech dodatkowe wymiary będą okręgami o promieniu R i długości $L = 2\pi R$. $\phi(y_i + L) = \phi(y_i)$

periodyczne warunki brzegowe

Rozważmy rozkład:

$$\phi = \sum_{\vec{n}} N_{\vec{n}} \phi_{\vec{n}}(x) e^{i \frac{2\pi}{L} \vec{n} \vec{y}}$$

$$\vec{n} \vec{y} = n_i y^i \quad , \quad n_i \in \mathbb{Z}$$

$$\partial_\mu \phi = \sum_{\vec{n}} N_{\vec{n}} \partial_\mu \phi_{\vec{n}} e^{i \frac{2\pi}{L} \vec{n} \vec{y}}$$

jeśli $\phi \in \mathbb{R}$, to $\phi^*_{\vec{n}} = \phi_{-\vec{n}}$, $N^*_{\vec{n}} = N_{-\vec{n}}$

$$\int d^n y \sum_{\vec{n},\vec{p}} N_{\vec{n}} N_{\vec{p}}\, \partial_\mu \phi_{\vec{n}}\, \partial^\mu \phi_{\vec{p}} \;\times$$
$$\times\; e^{i \frac{2\pi}{L} (\vec{n}+\vec{p})\vec{y}} =$$

$$= \sum_{\vec{n},\vec{p}} N_{\vec{n}} N_{\vec{p}}\, (L)^n\, \delta(\vec{n}+\vec{p})\, \partial_\mu \phi_{\vec{n}}\, \partial^\mu \phi_{\vec{p}} =$$

$$= \sum_{\vec{n}} |N_{\vec{n}}|^2\, |\partial_\mu \phi_{\vec{n}}|^2\, \underbrace{L^n}_{=V_n}$$

Zatem jeśli przyjmiemy

$$N_{\vec{n}} = \frac{1}{\sqrt{V_n}}\,, \quad \text{to}$$

pola $\phi_{\vec{n}}(x)$ zachowują się jak kanonicznie znormalizowane pola 4-wymiarowe!
Są to mody KK (= Kaluzy-Kleina).

Po wycałkowaniu $\int d^n y$ dodatkowe czterowymiarowe przyjmuje postać:

$$S_4 = \int d^4x \Big[\frac{1}{2}(\partial_\mu \phi_0)^2 - \frac{m^2}{2}\phi_0^2 + $$

$$+ \cancel{\tfrac{1}{2}} \sum_{\vec{n} \neq 0} \left(|\partial_\mu \phi_{\vec{n}}|^2 - m_{\vec{n}}^2 |\phi_{\vec{n}}|^2 \right)$$

$$- \frac{g_4}{4!}(\phi_0)^4 - \frac{g_4}{4}(\phi_0)^2 \sum_{\vec{n} \neq 0} |\phi_n|^2 +$$

$$+ \text{wyrazy bez modu zerowego ! } \Big]$$

gdzie:
$$m_{\vec{n}}^2 = m^2 + (\vec{n})^2 \left(\frac{2\pi}{L}\right)^2$$

$$g_4 = \frac{g_{4+n}}{V_n}$$

$$m_{KK} = m_{\vec{n}} \geqslant m_1 \sim \frac{2\pi}{L} \gtrsim 1\,\text{TeV}$$

$$\Longrightarrow L < \frac{1}{\text{TeV}}$$

tj. rozmiar dodatkowych wymiarów, w których propagują się bozony cechowania muszą być $< \frac{1}{\text{TeV}}$!!

Dla pól cechowania:

$$S_{4+n} = -\frac{1}{4g^2}\int d^4x\, d^n y\, F_{MN}F^{MN}$$

$$\supset -\frac{1}{4g^2}\int d^4x \int d^n y\, F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} =$$

$$= -\frac{V_n}{4g^2}\int d^4x\, F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = -\frac{1}{4g_4^2}\int d^4x\, F^2$$

$$\Rightarrow \quad g_4^2 = g^2/V_n$$