PRZEKSZTAŁCENIA KONFOREMNE

– FUNKCJE SPRZĘŻONE

PROBLEMY 2-WYMIAROWE

Rozpatrujemy funkcje holomorficzne

$$f = f(z)$$

$$\cancel{\frac{df}{dz} \neq 0} \qquad \frac{df}{d\bar{z}} = 0$$

tzn. $z = x + iy$

$\bar{z} = x - iy$

tzn. chodzi nam o funkcje, które są funkcjami z, a nie funkcjami x i y osobno.

~~Stąd~~ To jest niebywałe wymaganie, które odpowiada silnego warunku.

mamy $f = g(x,y) + i\, h(x,y)$

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{dz}, \quad \frac{df}{dy} = i\frac{df}{dz}$$

$$\Delta f = \frac{d^2 f}{dx^2} + \frac{d^2 f}{dy^2} = \frac{d^2 f}{dz^2} + (i)^2 \frac{d^2 f}{dz^2} = 0$$

tj. $\Delta g = 0$ i $\Delta h = 0$

przy tym pochodne cząstkowe g i h są wtedy powiązane!

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial x} + i\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{df}{dz}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial y} + i\frac{\partial h}{\partial y} = i\frac{df}{dz}$$

$$\underline{\frac{\partial g}{\partial x} + i\frac{\partial h}{\partial x}} = \underline{-i\frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial y}}$$

$$\Longrightarrow \underline{\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial h}{\partial y}} \quad i \quad \underline{\frac{\partial g}{\partial y} = -\frac{\partial h}{\partial x}}$$

warunek Cauchy'ego Riemanna

co to znaczy? to znaczy, że jeśli znamy funkcję holomorficzną $f(z)$ w pewnym obszarze, to znamy 2 rozwiązania równań Laplace'a w tym obszarze!

Jeśli jeszcze zapiszemy $f(z)$ tak, żeby spełniała

dowolne warunki brzegowe,
to mamy za każdym razem rozw. równania Poissona!

Weźmy $F(z) = \varphi + i\psi$

przypuśćmy, że ψ jest [illegible] pole,
potencjału elektrostatycznego.
wówczas $\psi = const$ - są
przedstawiają linie pola.

$\psi = const$: linie ekwipotencjalne

$\vec{n} = \frac{\psi_x, \psi_y}{\sqrt{\psi_x^2 + \psi_y^2}}$ ← wektor normalny

$\psi(x, y) = const$

$\psi_x dx + \psi_y dy = 0$ jeśli $\vec{dl} = (dx, dy)$
leży wzdłuż pola,
to $\vec{n} = (\psi_x, \psi_y)$ prostopadły do pola
[illegible] tego pole

$E_x = -\psi_x$, $E_y = -\psi_y$

gdzie $E_x = +\varphi_y$, $E_y = -\varphi_x$

Ale rozwiązania dla

$$\varphi = const$$

$$\vec{n}' = \frac{(\varphi_x, \varphi_y)}{\sqrt{\varphi_x^2 + \varphi_y^2}}$$

$$\vec{n}' \vec{E}^{\#} \sim \varphi_x \varphi_y - \varphi_y \varphi_x = 0$$

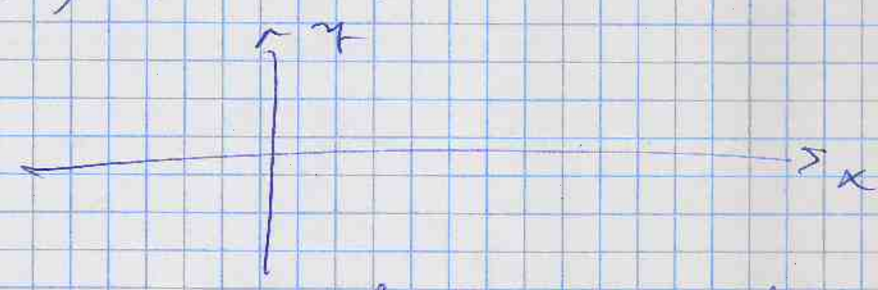
Zatem

$\varphi = const$ to

rozw. st. pola!

Przykład 1

$$F(z) = Az + i\phi_0$$



$z = re^{i\theta}$

Bo: z jest rzeczywiste na $z = x$ i tylko tam $\Rightarrow$ zatem na osi x F czysto urojone i stałe

$$u = \phi_0 \text{ na osi } x$$

Zatem rozwiązaliśmy problem pola wokół ~~[illegible]~~ pewnej figury płaskiej!

$$F = Ax + i(Ay + \phi_0)$$

$$u = Ay + \phi_0$$

$$E_x = 0 \qquad E_y = -\frac{\partial u}{\partial y} = -A$$

$$E_y = -A = 4\pi\sigma$$

$$A = -4\pi\sigma$$

i.e. $\cancel{E_y} \quad F = -4\pi\sigma z + i\phi_0$

Περίπτωση 2

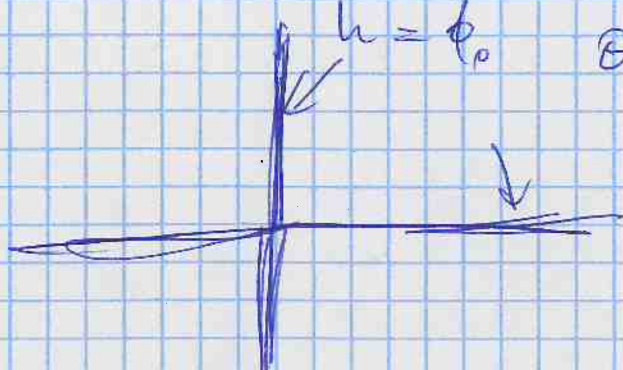
$$F(z) = Az^2 + i\phi_0$$

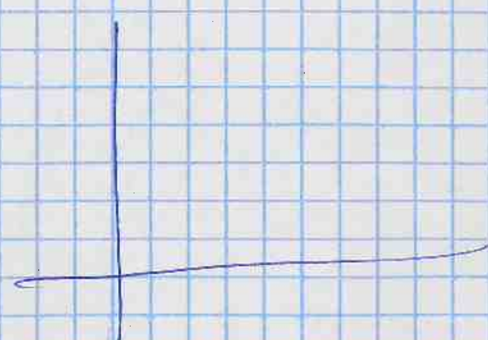
$z = re^{i\phi}$

$z^2 = r^2 e^{i2\theta}$ F το μέρος πραγματικό, για

$2\theta = 0$ και $2\theta = \pi$

$u = \phi_0$ $\theta = 0$ και $\theta = \frac{\pi}{2}$

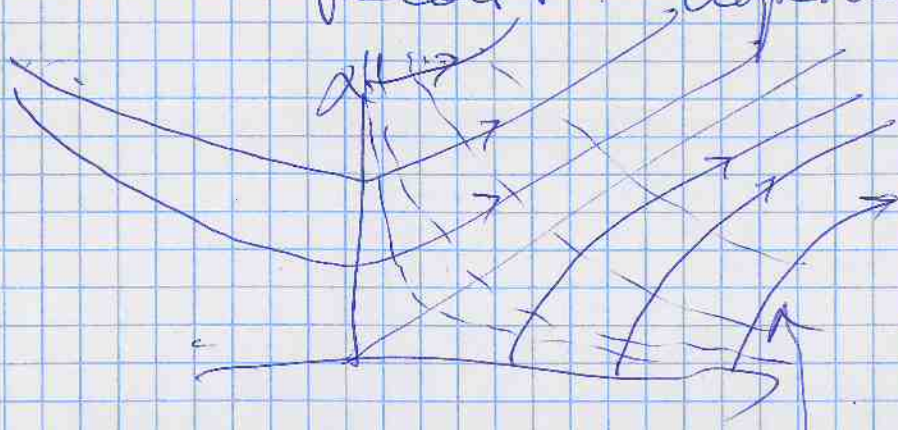




$$F(z) = A(x^2-y^2) + 2iA(xy) + i\phi_0$$

$$V = 2Axy + \phi_0$$

$V = \text{const}$: hiperbole



$x^2-y^2 = \text{const}$ linie pola
hiperbole

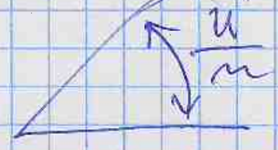
obszar σ

<u>Uwaga</u> stagnacja wokół z x, y
co jest niefizyczne, ale
przepływy w pobliżu gdzie
by występowały!

<u>Przykład</u>

$$F = Az^n + i\phi_0$$

$$z^n = r^n e^{in\theta} \qquad n\theta = 0 \text{ lub } n\theta = \pi$$



$0, \frac{\pi}{n}$

PRZYKŁAD TRUDNY

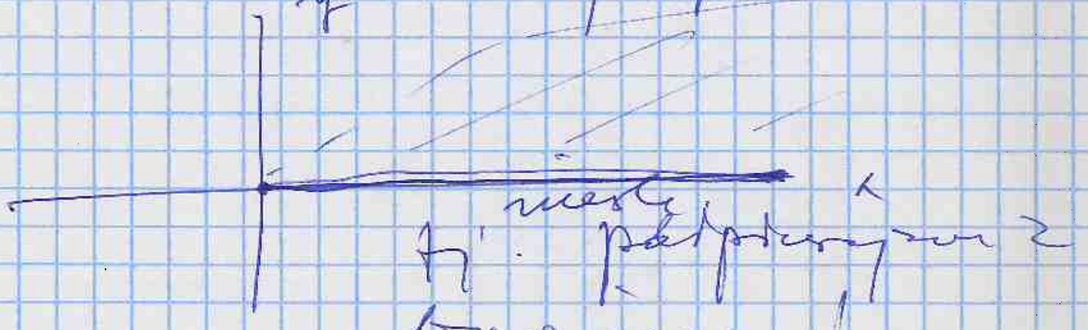
$$F(z) = A z^{1/2} + i\phi_0$$

$$z^{1/2} = r^{1/2} e^{i\frac{\theta}{2}}$$

$\frac{\theta}{2} = 0$ lub $\frac{\theta}{2} = \pi$ tj.

$\theta = 2\pi$

zatem $z^{1/2}$ jest niejednoznaczne tylko na dodatniej półosi x!



$$z = re^{i\theta}, \quad tg\,\theta = \frac{y}{x}, \quad r = \sqrt{x^2+y^2}$$

$$F = A r^{1/2} e^{i\theta/2} + i\phi_0$$

gałąź główna pierwiastka

$$= \cancel{A z^{1/2}} \; A\left(x^2+y^2\right)^{1/4}\left(\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}\right) + i\phi_0$$

$$= g(x,y) + i\,h(x,y)$$

$$w = \frac{1}{\sqrt{1 + \quad}}$$

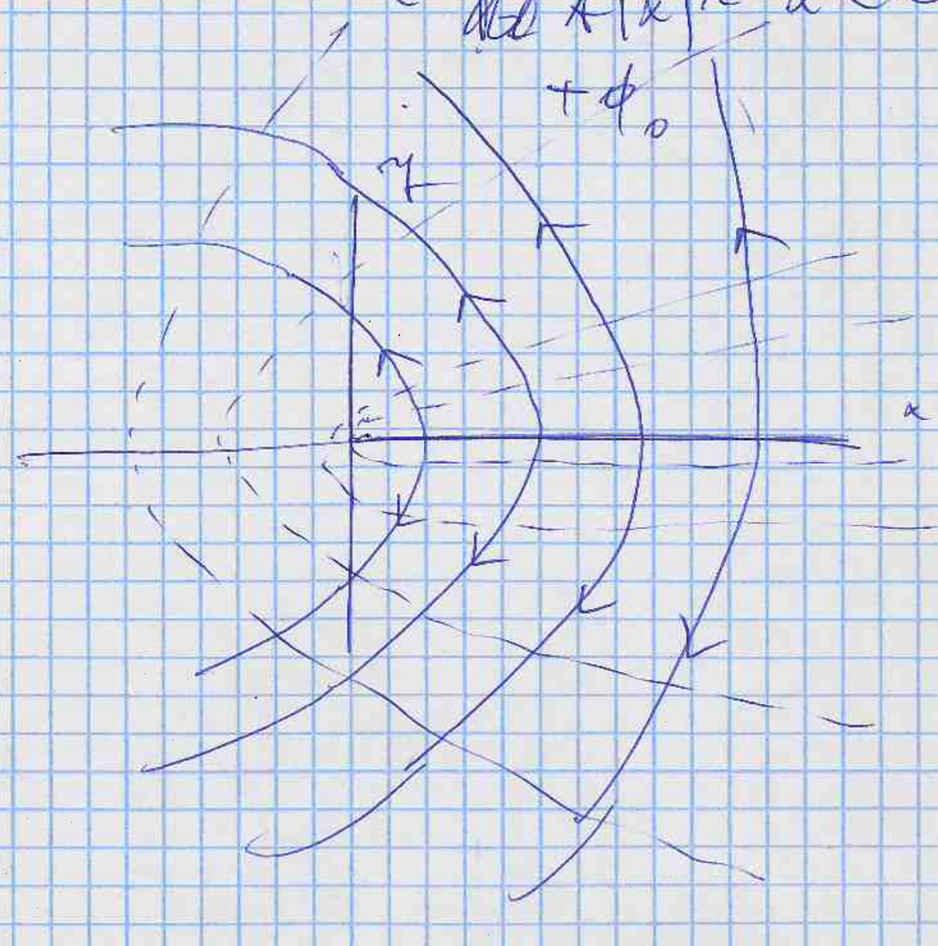
ofe

$$\varphi(x,y) = \frac{A}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{x^2+y^2} + x \right)^{1/2}$$

$$h(x,y) = \frac{A}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{x^2+y^2} - x \right)^{1/2} + \phi_0$$

1) w płaszczyźnie $y=0$

$$h(x,0) = \begin{cases} \phi_0 & x \geq 0 \\ A|x|^{1/2} + \phi_0 & x < 0 \end{cases}$$



$$\sigma(x) = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial h}{\partial y} = -\frac{1}{4\pi}\frac{A}{\sqrt{2}}\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\sqrt{x^2+y^2}-x}} \times$$

$$\times\left(\frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}\,2y\right)$$

$$\frac{1}{\sqrt{\sqrt{x^2+y^2}-x}} \sim \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\frac{y^2}{x}}} = \sqrt{2}\frac{\sqrt{x}}{y}$$

$$\sqrt{x^2+y^2} \approx x\sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}} \approx x\left(1+\frac{1}{2}\frac{y^2}{x^2}\right)$$

$$-\frac{1}{4\pi}\frac{A}{\cancel{\sqrt{2}}}\frac{1}{2}\cancel{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{x}}{\cancel{y}}\frac{\cancel{y}}{x} \Rightarrow$$

$$\rightarrow -\frac{1}{8\pi}\frac{A}{\sqrt{x}} = \sigma(x)$$

$$|\sigma(0^+)| = \infty \;!$$

dominujący efekt brzegowy !