FALE ELEKTROMAGNETYCZNE W PRÓŻNI

Wiadomo, że równanie opisujące fale rozprzestrzeniające się z prędkością $\vec{v}$ powinno dopuszczać rozwiązania

$$F = F(\vec{x} - \vec{v}t) .$$

Takie rozwiązania, w postaci pewnego "konturu" przestrzennego przesuwającego się z pewną prędkością, spełniają równanie falowe

$$\Delta F - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = 0$$

W przypadku pól elektromagnetycznych $\vec{E}$ i $\vec{B}$ każde z nich powinno spełniać równanie falowe. W próżni $\rho = 0 = \vec{j}$ zatem $\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 0$, $\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Zauważmy, że

$$\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{E}) = \vec{\nabla}\times\left(-\frac{d\vec{B}}{dt}\right) = -\frac{d}{dt}(\vec{\nabla}\times\vec{B})$$

$$= \vec{\nabla}(\underbrace{\vec{\nabla}\cdot\vec{E}}_{=0}) - \Delta\vec{E} = -\Delta\vec{E} = -\frac{d^2}{dt^2}(\mu_0\varepsilon_0\vec{E})$$

zatem

$$\Delta\vec{E} - \frac{1}{v^2}\frac{d^2\vec{E}}{dt^2} = 0$$

gdzie $v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}} \equiv c$

W ten sam sposób znajdujemy

$$\Delta\vec{B} - \mu_0\varepsilon_0\frac{d^2\vec{B}}{dt^2} = 0 .$$

Uwaga: μ_0 występujące samodzielnie w prawie Biota-Savarta i wartość tego współczynnika wybieramy definiując siłę działającą na prąd 1A: przyjmujemy, że dwa równoległe przewodniki, w których płynie prąd 1A działają na siebie siłą 1N na 1m długości, jeśli są odległe o d=1m. Stąd, w układzie SI,

$$\mu_0 = 4\pi\times 10^{-7}\ N/A^2 .$$

Zatem $\varepsilon_0 = \frac{1}{\mu_0 c^2} = 8.85 \times 10^{-12} \frac{C^2}{Nm^2}$

Tę wielkość można porównać z ε_0 wziętym z prawa Coulomba. Już Maxwell zauważył, że prędkość światła (z doświadczenia) jest bardzo bliska prędkości fal elektromagnetycznych.
Hipotezę, że światło składa się z fal elektromagnetycznych potwierdził Hertz (1887).

FALE PŁASKIE

Poszukujemy rozwiązań równań Maxwella w postaci

$$\vec{E}(x,t) = \vec{E}_0 \, e^{i(\vec{k}\vec{x} - \omega t)}$$
$$\vec{B} = \vec{B}_0 \, f(\vec{x}) \, e^{-i\omega t}$$

szukamy drgań

własnych pola ELM, tj. rozwiązań, gdzie wszystkie składowe drgają z tą samą częstością ω.

(fizyczna fala to $Re(\vec{E})$).

$$\vec{\nabla}\vec{E} = 0 \Rightarrow \vec{k}\vec{E}_0 = 0$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = i\omega\vec{B} = i\vec{k}\times\vec{E}$$

zatem
$$\vec{B} = \frac{\vec{k}}{\omega}\times\vec{E}$$

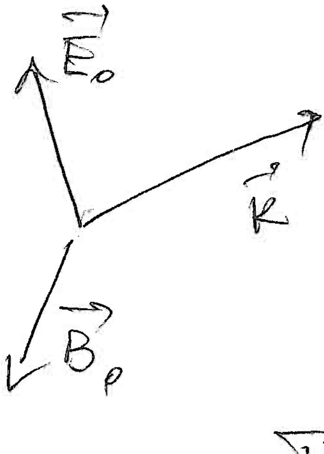
tj. $\vec{B} = \vec{B}_0 e^{i(\vec{k}\vec{x}-\omega t)}$.

(oraz $\vec{k}\vec{B}_0 = 0$).

stąd $\vec{B}_0 = \frac{\vec{k}}{\omega}\times\vec{E}_0$, ale również

$\vec{k}\times\vec{B}_0 = -\mu_0\varepsilon_0\omega\vec{E}_0$ (z równania na $\vec{\nabla}\times\vec{B}$).

Strukturę fali można zilustrować rysunkiem



To jest fala typu TEM spolaryzowana liniowo: pole elektryczne drga wzdłuż prostej (polaryzacja liniowa) w której wektor elektryczny i magnetyczny są prostopadłe do $\vec{k}$.

Wektor Poyntinga dla fali płaskiej:
$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} =$$
$$= \frac{1}{\mu_0} \vec{E}_0 \times \vec{B}_0 \cos^2(\vec{k}\vec{x} - \omega t)$$

ale $kE_0 = B_0 \omega$, tj.
$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} E_0^2 \frac{\vec{k}}{\omega} \cos^2(\vec{k}\vec{x} - \omega t) =$$
$$= \frac{1}{\mu_0 c} E_0^2 \hat{k} \cos^2(\vec{k}\vec{x} - \omega t).$$

Definiujemy wielkość mierzalną, tj. natężenie fali
$$I = \langle \vec{S} \cdot \hat{k} \rangle_{\text{uśrednione po okresie drgań}} =$$
$$= \frac{1}{T} \int_0^T (\vec{S}\hat{k})\,dt, \quad T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

Dla fali płaskiej:
$$I = \frac{1}{2\mu_0 c} E_0^2 = \frac{\varepsilon_0 c}{2} B_0^2$$

Gęstość energii w fali płaskiej

$$u = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{1}{\mu_0}\frac{B^2}{2} = \varepsilon_0 E_0^2 \cos^2(\vec{k}\vec{x} - \omega t)$$

$$\langle u \rangle = \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{2}$$

zatem $I = \langle u \rangle \cdot c$

$\left(|\vec{S}| = u \cdot c \right)$.

prędkość przenoszenia energii

Gęstość pędu fali płaskiej:

$$\vec{P}_{EM} = \frac{\vec{S}}{c^2} = \frac{u}{c}\hat{k}$$

To jest zgodne ze związkiem

$E = p \cdot c$ dla cząstki o

masie spoczynkowej zero. (!)

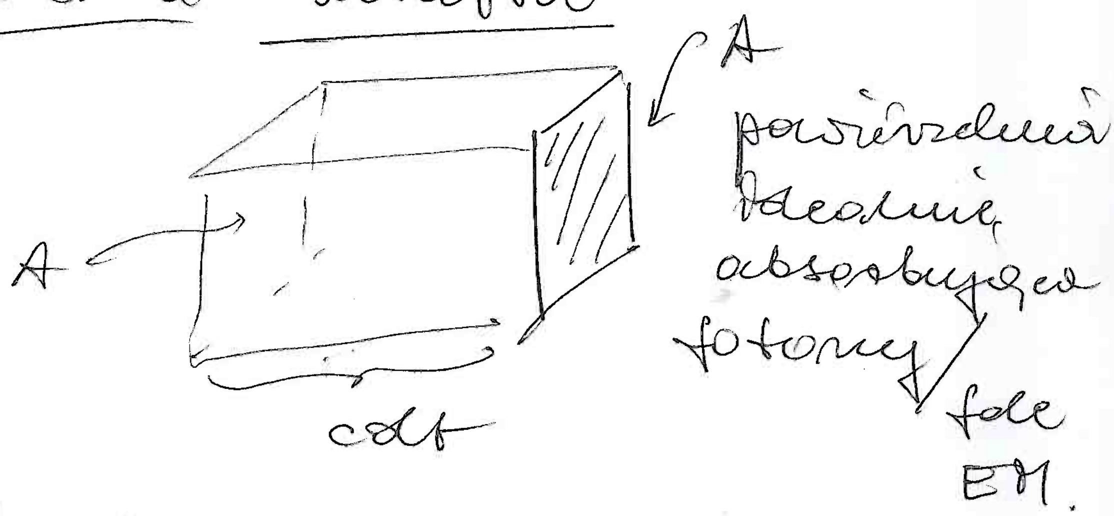
Jeśli zatem fale EM mają interpretację cząstkową, to zwołanie z

[illegible] cząstki trzeba uważać za

cząstki bezmasowe (tj. fotony

są bezmasowe).

Ciśnienie światła



$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$$

$$P_{\text{promieniowania}} = \frac{F}{A} = \frac{dp}{(A\,dt)}$$

dp jest pędem fali zawartym w objętości $A c\,dt$:

$$dp = \frac{|\vec{S}|}{c^2} \cdot A c\,dt = \frac{u}{\cancel{c}} A \cancel{c}\,dt = u A\,dt$$

$$\Longrightarrow \underline{\underline{P_{\text{prom}} = u}} \quad \text{oraz}$$

$$\langle P_{\text{prom}} \rangle = \langle u \rangle = \frac{I}{c}.$$

Przykład: Laser wysokiej mocy działa na długości fali 1.6 μm i daje energię 10 kJ w czasie 0.2 ns. Wiązka lasera ma średnicę 0.5 mm.

10) $I = 2.5 \times 10^{20}\ W/m^2$

$$\Rightarrow \langle E \rangle = \frac{E_0}{2} = 3 \cdot 10^{11}\ \frac{V}{m}$$

pole większe, niż pole przebicia w atmosferze.

Ciśnienie światła:

$$\langle p_{prom} \rangle = \frac{I}{c} = 8.5 \times 10^{11}\ Pa$$

$$\sim 8.5 \times 10^{6}\ atm.$$

POTENCJAŁY !

$$\vec{\nabla} \circ \vec{B} = 0 \implies \underline{\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\vec{\nabla} \times \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right)$$

$$\implies \vec{\nabla} \times \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) = 0$$

zatem $\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\vec{\nabla}\phi$

i $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$

Jeśli nie nakładamy warunków cechowania, to z równań Maxwella dostajemy:

$$\nabla^2\phi + \frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla}\vec{A}) = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\nabla^2\vec{A} - \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla} \circ \vec{A} + \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial \phi}{\partial t}\right) = -\mu_0 \vec{j}$$