Teoria Cząstek Elementarnych
Zadania Domowe I

1. Znaleźć równanie spełniane przez funkcje modów rzeczywistego pola skalarnego w przypadku, gdy działanie zawiera sprzężenie tego pola z krzywizną,

$$S = \int d^4x\sqrt{-g}\frac{1}{2}(\partial_\mu\phi\;\partial^\mu\phi - m^2\phi^2 - \xi R\;\phi^2), \tag{1}$$

dla metryki Robertsona-Walkera.

2. Znaleźć gęstość cząstek wyprodukowanych w przypadku $\xi = 1/6$ w wyniku skokowej zmiany czynnika skali: $a(\eta) = A \neq 0$ jesli $\eta \leq 0$ i $\eta \geq \eta_0$ oraz $a(\eta) = B \neq 0$ gdy $0 < \eta < \eta_0$.

3. Sprawdzić słuszność wzoru (1.29) oraz wyprowadzić wzory (1.30) i (1.31) z wykładów Forda: arXiv:gr-qc/9707062v1.

4. Rozważ operatory kreacji i anihilacji $c_{\vec{k}}$, $c^\dagger_{\vec{k}}$ spełniające relacje antykomutacyjne $\{c_{\vec{k}}, c^\dagger_{\vec{k}'}\} = \delta(\vec{k}-\vec{k}')$, $\{c_{\vec{k}}, c_{\vec{k}'}\} = 0$. Rozważ dwa zbiory takich operatorów i rozważ odpowiednie współczynniki Bogolyubova. Powtarzając z odpowiednimi zmianami konstrukcję z ćwiczeń, wyraź jedną z próżni przez operatory kreacji działające na drugą próżnię i współczynniki Bogolyubova. Jak wygląda związek normalizacyjny dla współczynników Bogoluybova w tym przypadku?

5. Dla przykładu symetrii $\phi \to \phi + \lambda$ rozważanej na wykładzie pokaż, że stany $|\lambda >$ i $|\lambda' >$ są ortogonalne jeśli $\lambda \neq \lambda'$.

6. Prove the following identities:

$$(\sigma^\mu)_{\alpha\dot\beta}(\bar\sigma_\mu)^{\dot\gamma\delta} = 2\delta^\delta_\alpha\delta^{\dot\gamma}_{\dot\beta}$$
$$(\sigma^\mu)_{\alpha\dot\alpha}(\sigma_\mu)_{\beta\dot\beta} = 2\epsilon_{\alpha\beta}\epsilon_{\dot\alpha\dot\beta}$$
$$(\sigma^\mu\bar\sigma^\nu + \sigma^\nu\bar\sigma^\mu)^\alpha_\beta = 2\eta^{\mu\nu}\delta^\alpha_\beta$$
$$tr(\sigma^\mu\bar\sigma^\nu) = 2\eta^{\mu\nu}$$

7. Demonstrate the decomposition $(1/2, 0) \otimes (0, 1/2) = (1/2, 1/2)$:

$$\psi_\alpha\bar\chi_{\dot\alpha} = \tfrac{1}{2}(\sigma^\mu)_{\alpha\dot\alpha}(\psi\sigma_\mu\bar\chi).$$

8. Consider 2×2 complex matrices M belonging to the $SL(2, \mathcal{C})$ group: $\det(M) = 1$. They act on left spinors as follows: $\psi \to \psi'_\alpha = M^\beta_\alpha\psi_\beta$. Show that $\epsilon^{\alpha\beta} = \epsilon^{\gamma\delta}M^\alpha_\gamma M^\beta_\delta$. Furthermore, demonstrate the mapping from $SL(2, \mathcal{C})$ to $SO(1, 3)$:

$$\Lambda^\mu_\nu = \tfrac{1}{2}tr(\bar\sigma^\mu M\sigma_\nu M^\dagger).$$

9. Show that $e^{\frac{1}{2}i\vec{\theta}\vec{\sigma}\pm\frac{1}{2}\vec{\eta}\vec{\sigma}}$, with real parameters θ^i, η^i, belongs to $SL(2,\mathcal{C})$.

10. Define $V_{\alpha\dot{\alpha}} = \sigma^{\mu}_{\alpha\dot{\alpha}} V_\mu$, where V_μ transforms as a four-vector. Express V_μ through $V_{\alpha\dot{\alpha}}$.

11. Demonstrate that:

$$\eta\sigma^{\mu\nu}\psi = -\psi\sigma^{\mu\nu}\eta$$
$$\bar{\chi}\bar{\sigma}^{\mu}\psi = -\psi\sigma^{\mu}\bar{\chi}$$
$$(\sigma^{\mu\nu})_{\beta}^{\alpha}(\sigma^{\mu\nu})_{\gamma}^{\delta} = \epsilon_{\alpha\gamma}\epsilon^{\beta\delta} + \delta_{\alpha}^{\delta}\delta_{\gamma}^{\beta}$$

12. Using the results of the previous problem show the decomposition $(1/2,0)\otimes(1/2,0) = (0,0)\oplus(1,0)$:

$$\psi_\alpha\chi_\beta = \tfrac{1}{2}\epsilon_{\alpha\beta}\psi\chi + \tfrac{1}{2}(\sigma^{\mu\nu}\epsilon^T)_{\alpha\beta}(\psi\sigma_{\mu\nu}\chi).$$

13. Show that

$$(\theta\phi)(\bar{\chi}\bar{\xi}) = -\tfrac{1}{2}(\theta\sigma^{\mu}\bar{\xi})(\bar{\chi}\bar{\sigma}_{\mu}\phi)$$
$$\theta^{\alpha}\theta_{\beta} = \tfrac{1}{2}(\theta\theta)\delta_{\beta}^{\alpha}$$
$$(\theta\sigma^{\mu}\bar{\theta})(\theta\sigma^{\nu}\bar{\theta}) = \tfrac{1}{2}\eta^{\mu\nu}(\theta\theta)(\bar{\theta}\bar{\theta})$$

14. Write down the N-extended supersymmetry algebra with central charges in four-component spinor notation. Show explicitly that it reduces down to the two-component form. Use Majorana spinors.

15. Write explicitly general $N = 1$, $N = 2$ supersymmetry multiplets which contain (a) massive particles of maximum spins 1/2, 1, 3/2 and (b) massless particles with maximum helicities 1, 3/2, 2. Take note of the CPT invariance.

16. Znajdź transformacje supersymetrii δA_μ i $\delta\chi$ dla działania

$$S_{SYM} = \int d^4x \left(-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{i}{2}\bar{\chi}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\chi\right), \qquad (2)$$

gdzie $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ zaś χ jest spinorem Majorany $\chi_c = \chi$.

17. Znaleźć $q_\lambda\Delta^{\lambda\mu\nu}(k_1,k_2)$ (notacja z wykładu).

18. Znaleźć odpowiednik $\Delta^{\lambda\mu\nu}(k_1,k_2)$ dla trzech prądów wektorowych.

19. Pokazać, że amplituda $\Gamma_{4s}(p)$ w modelu NJL zachowuje się jak $\sim \frac{1}{p^2-4m^2}$ (notacja z wykładu).