VII.5 Zastosowania 1: bąki symetryczne- swobodny i ważki

Bąk symetryczny

$$\hat{I}' = \begin{pmatrix} I_{x'} & 0 & 0 \\ 0 & I_{y'} & 0 \\ 0 & 0 & I_{z'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{x'} & 0 & 0 \\ 0 & I_{x'} & 0 \\ 0 & 0 & I_{z'} \end{pmatrix}$$

cd. Równania Eulera dla bąka symetrycznego

$$I_{x'}\dot{\omega}_{x'} + \left(I_{z'} - I_{x'}\right)\omega_{y'}\omega_{z'} = M_{x'}$$

$$I_{x'}\dot{\omega}_{y'} + \left(I_{x'} - I_{z'}\right)\omega_{x'}\omega_{z'} = M_{y'}$$

$$I_{z'}\dot{\omega}_{z'} = M_{z'}$$

Równania Eulera dla bąka swobodnego

$$I_{x'}\dot{\omega}_{x'} + \left(I_{z'} - I_{x'}\right)\omega_{y'}\omega_{z'} = 0 \Rightarrow \dot{\omega}_{x'} + \left(\frac{I_{z'} - I_{x'}}{I_{x'}}\omega_{z'}\right)\omega_{y'} = 0$$

$$I_{x'}\dot{\omega}_{y'} + \left(I_{x'} - I_{z'}\right)\omega_{x'}\omega_{z'} = 0 \Rightarrow \dot{\omega}_{y'} - \left(\frac{I_{z'} - I_{x'}}{I_{x'}}\omega_{z'}\right)\omega_{x'} = 0$$

$$I_{z'}\dot{\omega}_{z'} = 0 \Rightarrow \omega_{z'} = \omega_{0z'}$$

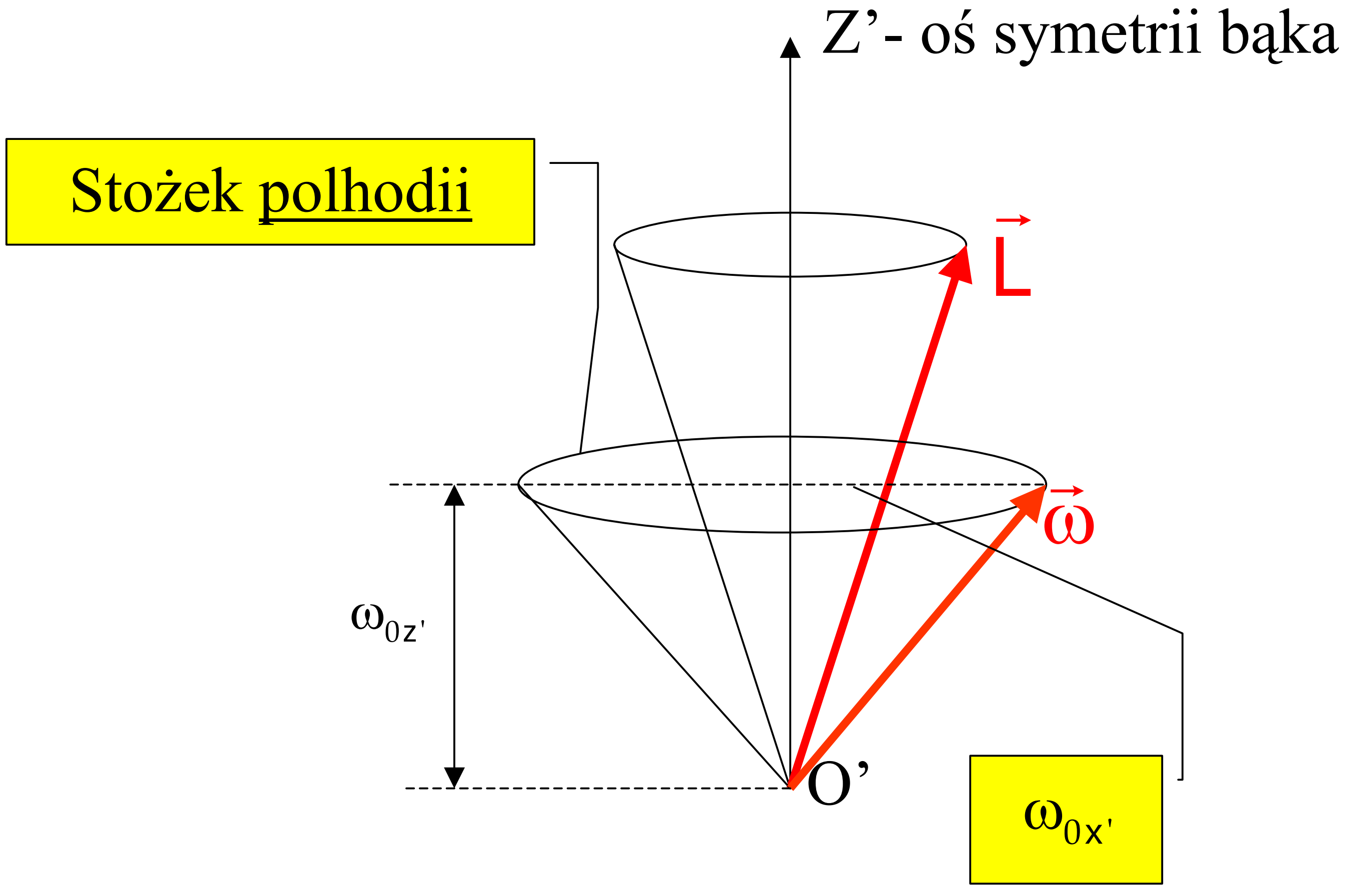
$$\Omega = \frac{I_{z'} - I_{x'}}{I_{x'}}\omega_{z'}$$

$$\omega_{x'} = \omega_{0x'}\cos\left(\Omega t + \phi\right)$$

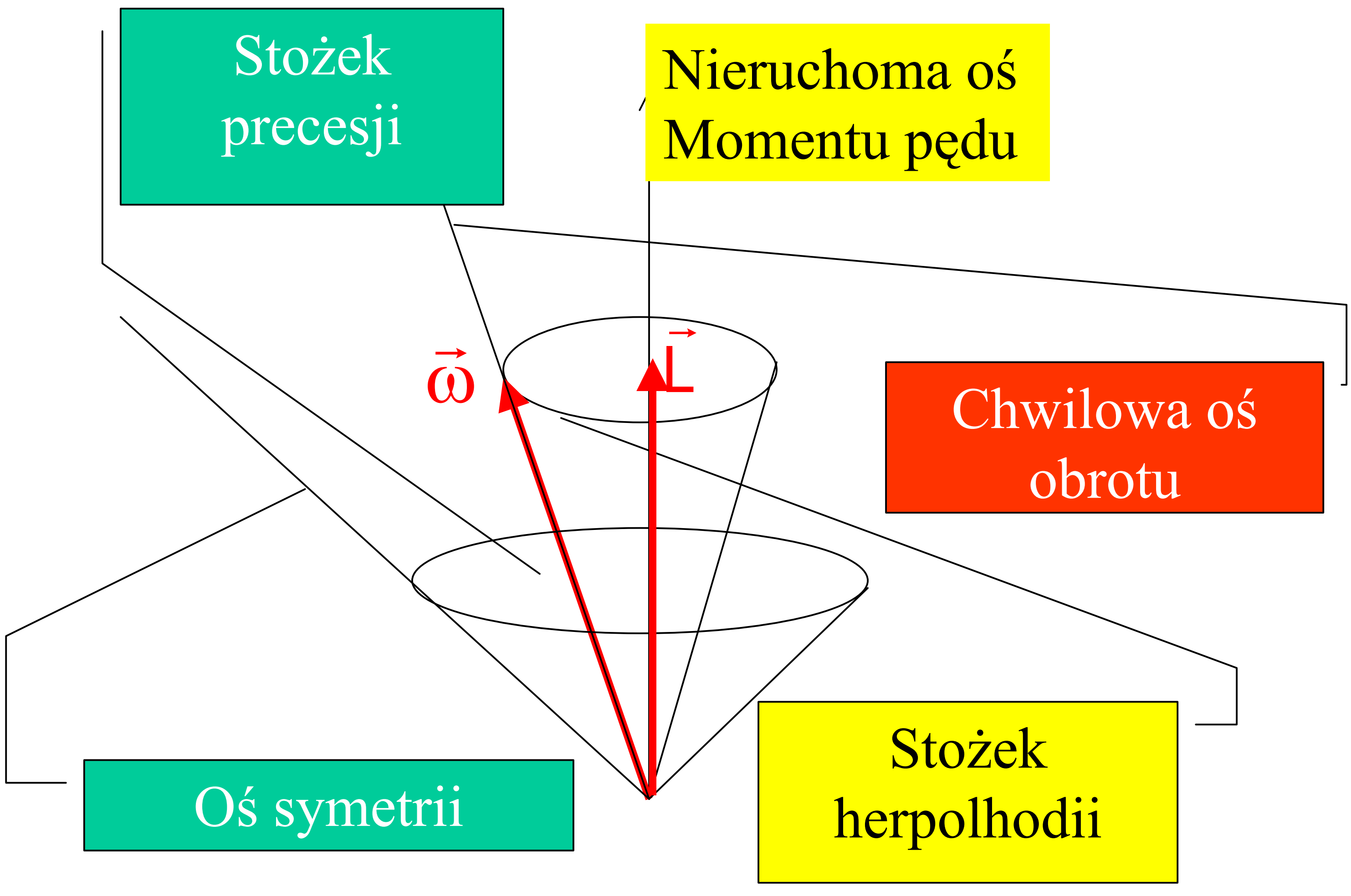
$$\omega_{y'} = \omega_{0x'}\sin\left(\Omega t + \phi\right)$$

$$\omega_{z'} = \omega_{0z'}$$

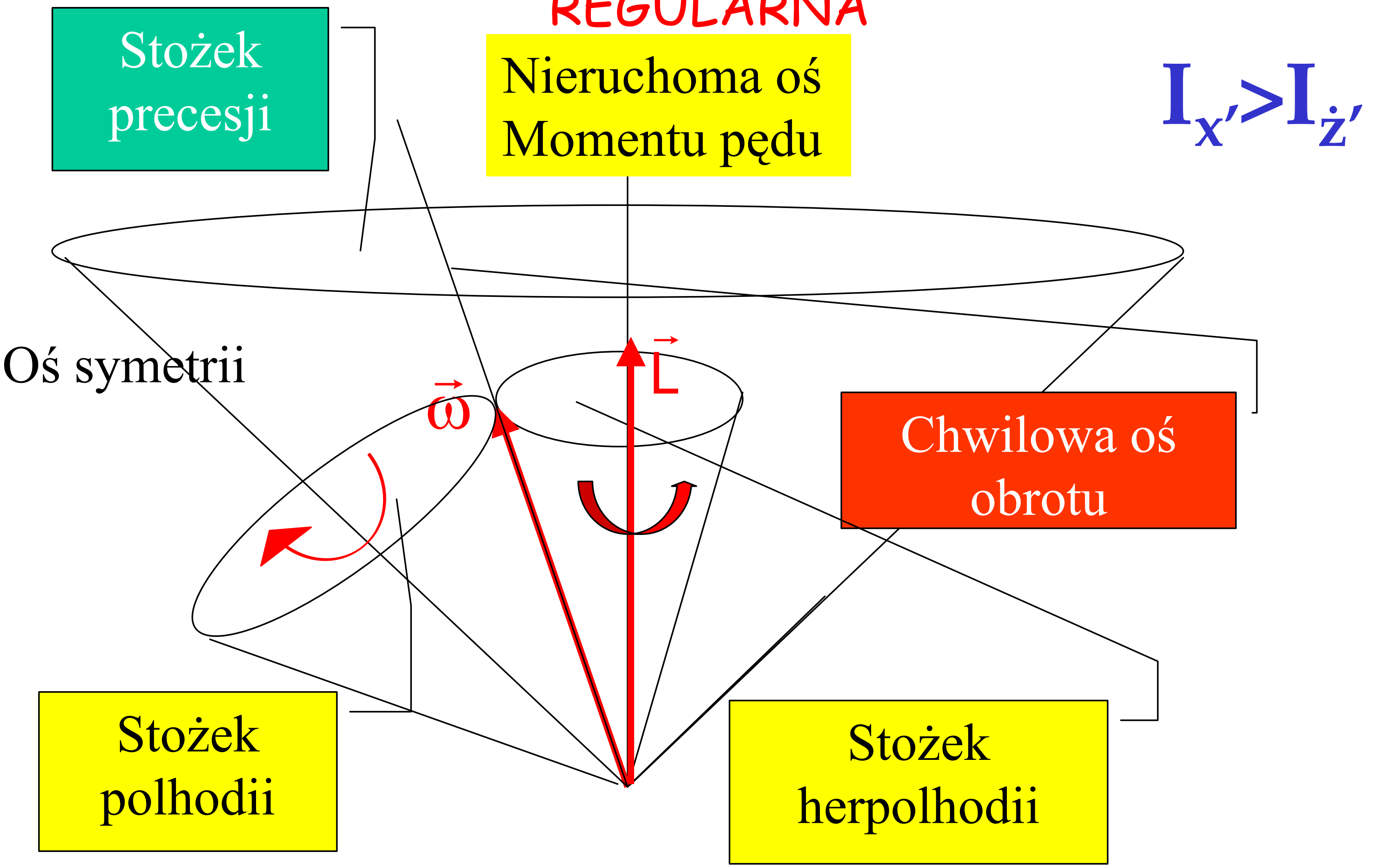
Bąk swobodny. Obraz widziany w układzie bryły U'



Bąk swobodny. Obraz widziany w układzie inercjalnym U



Bąk swobodny. U' widziane z U- PRECESJA REGULARNA



Bąk swobodny Eulera cd.

Uwaga:

Bąki (żyroskopy) swobodne i symetryczne najczęściej rozkręcamy dookoła osi symetrii. Jest to sytuacja gdy wektory momentu pędu i prędkości kątowej są równoległe. Nie obserwujemy więc precesji symetrii, stożka herpolhodii etc. – widać tylko ustaloną oś obrotu= osi zachowanego momentu pędu.

Precesja, którą obserwowaliśmy na wykładzie dotyczyła bąków nieswobodnych i/lub ważkich - nie znikający moment siły ciężkości, bądź była wywołana nie znikającymi momentami w niedoskonałych zawieszeniach Cardana.

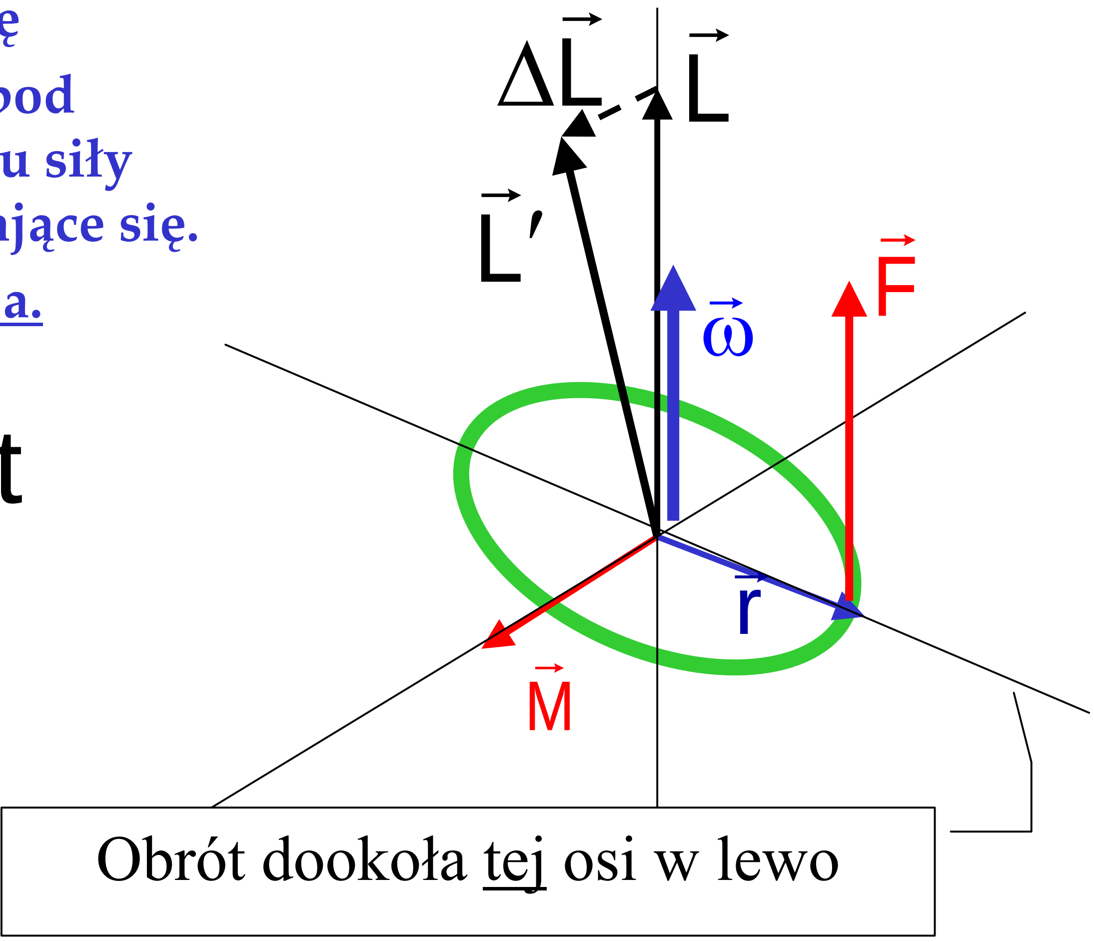
Bąk pod działaniem sił zewnętrznych. Efekt żyroskopowy

Ciało obracające się obraca się inaczej pod wpływem momentu siły niż ciało nie obracające się.

Pojawia się precesja.

$$\Delta\vec{L} = \vec{M} \cdot \Delta t$$

$$\left|\vec{L}\right| = \left|\vec{L}'\right|$$



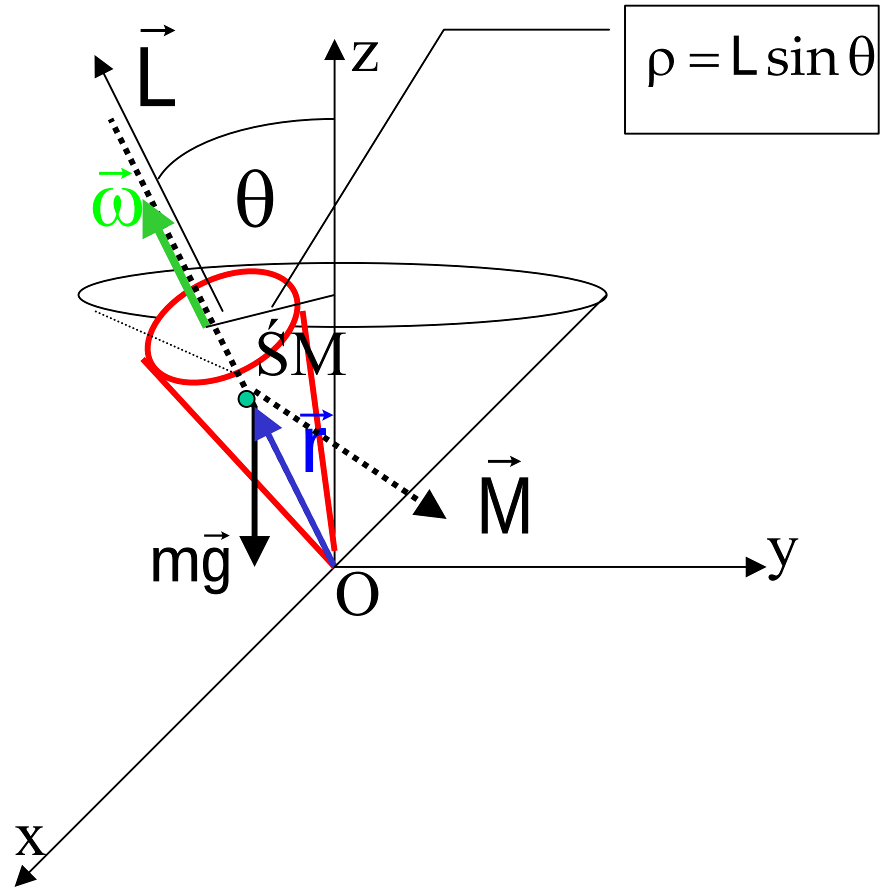
Bąk symetryczny ważki- obrót dookoła osi symetrii

Moment siły ciężkości względem O:

$\vec{M} = \vec{r} \times m\vec{g}; \quad M = mgr\sin\theta$

Zmiana momenty pędu:

$\Delta\vec{L} = \vec{M} \cdot \Delta t = \rho \cdot \Delta\phi; \quad \rho = L\sin\theta$



Prędkość kątowa precesji:

$$\omega_p = \frac{\Delta\phi}{\Delta t} = \frac{\Delta L}{\rho \cdot \Delta t} = \frac{mgr\sin\theta \cdot \Delta t}{L\sin\theta \cdot \Delta t} = \frac{mgr}{L}$$

nie zależy od kąta teta.

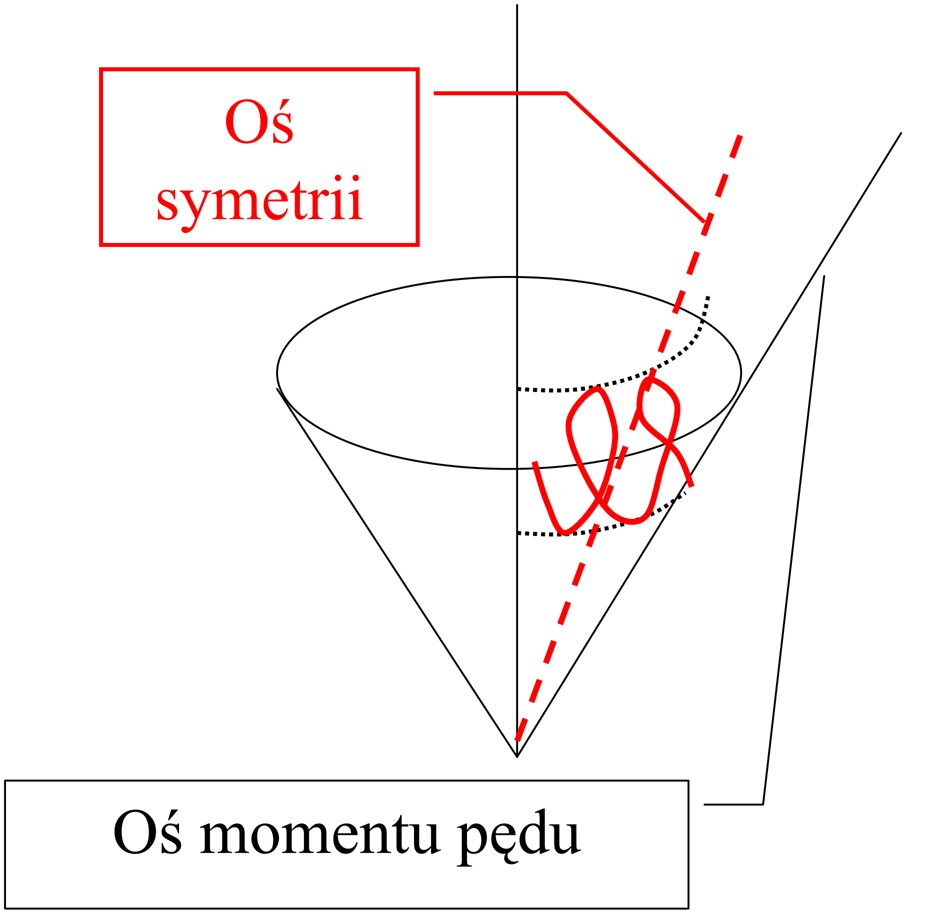
Gdy osie momenty pędu i symetrii bryły pokrywają mówimy o <u>precesji regularnej</u>.

Bąk symetryczny ważki-obrót dookoła osi dowolnej

Gdy oś symetrii nie pokrywa się z osią momentu pędu bąka, ta pierwsza nakreśla nie okrąg a linię wężykowatą.

Ruch osi symetrii podlega <u>nutacji</u>.

Mówimy, że bryła wykonuje <u>precesję pseudoregularną</u>.



Równanie bąka symetrycznego ciężkiego szybkiego

Jeżeli wersor k′ jest wersorem osi symetrii bąka w UI, zaś częstość obrotu bąka dookoła osi symetrii wynosi ω_0 mamy z dobrym przybliżeniem:

$$\vec{L} \cong I_3 \omega_0 \vec{k}'$$

Równanie ruchu możemy napisać w następujący sposób:

$$I_3 \omega_0 \frac{d\vec{k}'}{dt} = -mgr\left(\vec{k} \times \vec{k}'\right) + M_{dodatkowe}$$

$\vec{k}$ – wersor w UI pionowo do góry,

$\vec{k}'$- wersor w UI opisujący os symetrii bąka