

VI.3 Problem Keplera

1. Prawa Keplera
2. Zastosowanie III prawa Keplera
3. Układ Słoneczny- numeryczne całkowanie r. ruchu wszystkich planet, stabilność rozwiązań.

Prawa Keplera ruchu planet

- I. Każda planeta krąży po elipsie ze Słońcem w jednym z jej ognisk.
- II. Promień wodzący planety zakreśla równe pola w równych czasach
- III. **Kwadrat** okresu obiegu planety dookoła Słońca jest proporcjonalny do **sześcianu** długości wielkiej półosi elipsy

Drugie prawo Keplera zostało udowodnione w Cz. V.1:

$$\frac{dA}{dt} = \dot{A} = \frac{L}{2\mu} = \text{const}$$

Wyprowadzenie III Prawa Keplera

Korzystamy z II Prawa Keplera:

$$\int_0^T \dot{A} dt = T \frac{L}{2\mu} = \pi ab; \text{ podnosimy stronami do kwadratu}$$

$$\left(T \frac{L}{2\mu} \right)^2 = -\pi^2 a^2 \frac{L^2}{2E\mu} = L^2 \pi^2 \frac{a^3}{\mu\alpha}$$

$$\frac{T^2}{4\mu} = \frac{\pi^2 a^3}{\alpha}; \quad T^2 = \frac{4\pi^2 \mu a^3}{\alpha} = \frac{4\pi^2 a^3}{G(m_1 + m_2)} \xrightarrow{m_1/m_2 \rightarrow 0} \frac{4\pi^2 a^3}{Gm_2}$$

Dla bardzo masywnego Słońca i stosunkowo lekkich planet okresy ich obiegu nie zależą od ich mas.

Zastosowanie III Prawa Keplera

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{G(m_1 + m_2)}$$

Najczęściej służy do wyznaczania mas układów związanych grawitacyjnie.

Stabilność Układu Słonecznego

I Prawo Keplera: parametry układu słonecznego

Lp.	Nazwa	Masa w 10^{24} kg	T [lata gwiazdowe]	a [j.a]	a [10^9 m]	Mimośród	Nachy- lenie i [stopnie]
1	Merkury	0.33	0.241	0.387	57.9	0.206	7°
2	Wenus	4.9	0.615	0.723	108.3	0.007	$3^{\circ} 24'$
3	Ziemia	6.0	1	1	149.7	0.017	0
4	Mars	0.64	1.881	1.524	228.1	0.093	$1^{\circ}51'$
5	Jowisz	1900	11.682	5.203	778.7	0.048	$1^{\circ}18'$
6	Saturn	590	29.457	9.539	1427.7	0.056	$2^{\circ}29'$
7	Uran	87	84.012	19.191	2872.4	0.048	$0^{\circ}46'$
8	Neptun	100	164.782	30.071	4500.9	0.009	$1^{\circ}46'$
9	Pluton	0.018	248.421	39.518	5914.9	0.249	$17^{\circ}09'$

I Prawo Keplera:

Masa i promień Słońca i Ziemi:

$$M_{\odot} = 1.9889(30) \times 10^{30} \text{ kg}$$

$$R_{\odot} = 6.961 \times 10^8 \text{ m}$$

$$M_{\oplus} = 5.974(9) \times 10^{24} \text{ kg}$$

$$R_{\oplus} = 6.378140 \times 10^6 \text{ m}$$

Reguła Tytusa- Bodego (1766)

$$a = 0.4 + 0.3n; \quad n=0,1,2,4,\dots$$

Planeta	n	r. T-B	pomiar
Merkury	0	0.4	0.387
Wenus	1	0.7	0.723
Ziemia	2	1	1
Mars	4	1.6	1.524
Jowisz	16	5.2	5.203
Saturn	32	10	9.539
Uran	64	19.6	19.191
Neptun	-	-	30.071
Pluton	128	38.8	39.518

Zależność prędkości na orbicie od odległości od Słońca

Związek między długością półosi a i energią planety na orbicie eliptycznej:

$$E = -\frac{Gm_1m_2}{2a}$$

Prowadzi do wyrażenia na $v^2=v^2(r)$

$$E = -\frac{Gm_1m_2}{2a} = \frac{\mu v^2}{2} - \frac{Gm_1m_2}{r}$$

$$\frac{Gm_1m_2}{\mu} \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right) = G(m_1 + m_2) \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right) = v^2$$

Przydatne do znajdowania np. I i II prędkości kosmicznej

Zależność czasowa dla ruchu planet: równanie Keplera

ϕ - anomalia prawdziwa,
 u - anomalia mimośrodowa
 $M=2\pi t/T$ - anomalia średnia.

Równanie Keplera (r. wiekowe):

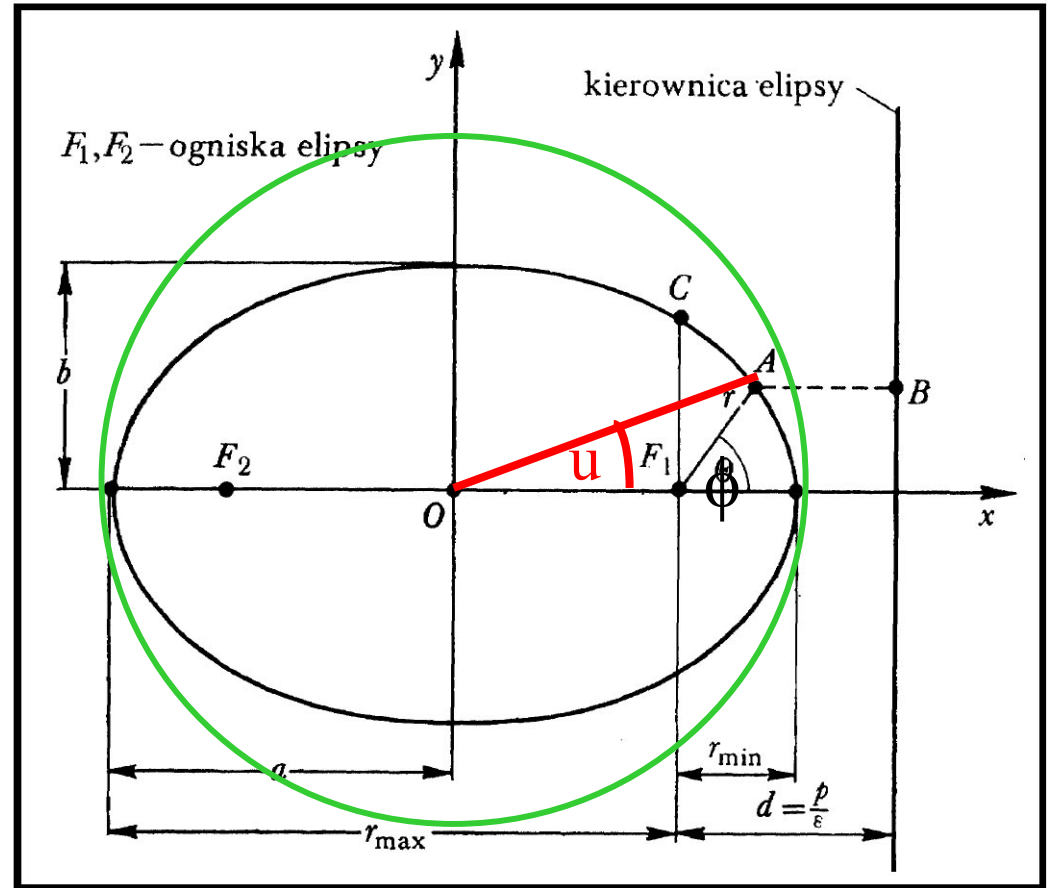
$$M = u - \varepsilon \sin u$$

Rozwiązujemy metodą
kolejnych przybliżeń:

$$u_1 = M \quad \text{tj. } \varepsilon=0$$

$$u_2 = M + \varepsilon \sin u_1$$

$$u_3 = M + \varepsilon \sin u_2; \quad \text{itd...}$$



3. Problem 2 ciał vs. problem 10 ciał czyli o stabilności Układu Słonecznego

Pełen układ równań ruchu Układu Słonecznego+ warunki początkowe:

$$\left\{ \begin{array}{l} m_i \ddot{\vec{r}}_i = - \sum_{\substack{j=0, \dots, 9 \\ j \neq i}} \frac{G m_i m_j}{r_{ij}} \hat{e}_{ij} \\ \vec{r}_i(t_0); \dot{\vec{r}}_i(t_0); \quad i, j = 0, 9 \end{array} \right\} \quad i, j=0 \text{ Słońce}$$

Jest to układ 10 nieliniowych r.r II rzędu. Nie znamy metod analitycznych jego rozwiązania. Metody numeryczne wymagają długiego czasu obliczeń, tym dłuższego, im dłuższy jest czas $(t-t_0)$.

Doświadczalnie wiemy, że Układ Słoneczny istnieje od co najmniej 4.5 mld. lat (wiek Ziemi).

Postawienie pytania

Dobre i systematyczne dane obserwacyjne na temat ruchów planet są akumulowane od XV-XVI w (max. 500 lat; 10^{-11} część wieku US).

Istnieją fragmentaryczne dane z ostatnich ~3000 lat.

Porównanie danych z prawami Keplera w tak krótkim okresie w stosunku do wieku US nie dostarcza nam danych o stabilności US.

Czy dawno temu planety US poruszały się po orbitach podobnych do dzisiejszych? Czy tak będzie w przyszłości?

Jakie jest prawdopodobieństwo, że duża asteroida zderzy się z Ziemią?

Pytanie o stabilność US ma długą historię

Odkrycie precesji orbity Ziemi dookoła Słońca ($\sim 0.3^\circ/100$ lat, głównie spowodowane perturbacjami pochodzącymi od Jowisza) w XVIII w. pchnęło astronomów i fizyków m.in. Pierre'a Simon'a de Laplace do dyskusji perturbacji w US, a więc także stabilności rozwiązań keplerowskich. „Dowód stabilności” przedstawiony przez Laplace'a nie był jednak poprawny, gdyż przybliżenia analityczne Laplace'a były zbyt grube.

Pod koniec XIX Henri Poincaré zauważył, że istotną rolę w badaniu stabilności czy też chaosu odgrywa zjawisko rezonansu tj. takiej sytuacji, gdy okresy obrotu ciał pozostają w stosunku prostych liczb naturalnych. Hadamard rozpoczął badanie chaosu. W 1989 Jaques Laskar zcałkował r.r. po czasie 200 mln lat metodą podobną do Laplace'a, lecz uwzględniając 150 000 członów poprawek. Metoda była półanalityczna. Wniosek JL: orbity planet są chaotyczne.

cd...

Przykłady rezonansów w US:

1. Okres obiegu satelity Jowisza Io wynosi 1.769 dni, zaś Europy-3.551 dnia; pozostają więc w stosunku 1:2. Europa przyciąga Io od Jowisza; orbita Io zwiększa mimośród, a więc coraz bardziej przybliża się do Jowisza. Siły pływowe na Io manifestują się m.in. w postaci aktywnych wulkanów (Voyager).
2. Ganimed tworzy podobny układ rezonansowy 2:1 z Europą. Io, Europa i Ganimed razem tworzą stabilny układ Lagrange'a 3 ciał.
3. Przerwy w pasie asteroid odpowiadają rezonansom w układzie asteroida- Jowisz.
4. Okres obiegu satelity dookoła planety i okres obiegu satelity dookoła własnej osi są takie same (siły pływowe, sprzężenie spin-orbita)

Hyperion (księżyc Saturna) jest tu wyjątkiem; Hyperion jest bardzo nieregularną bryłą

Planety wewnętrzne i zewnętrzne

4 planety wewnętrzne są małe, ich ruch jest silnie zaburzany przez oddziaływania gazowych gigantów- 5 planet zewnętrznych.

Planety zewnętrzne jako system nie są zaburzane przez planety wewnętrzne. Ich okresy obiegu są długie.

Dlatego prowadzenie obliczeń dla systemu planet zewnętrznych jest znacznie prostsze i mniej wymagające.

Uwzględnianie planet wewnętrznych znacznie przedłuża czas obliczeń (100-1000 razy) nawet bez uwzględniania efektów relatywistycznych w ruchu Merkurego.

Istniejące obliczenia numeryczne

Planety zewnętrzne:

Cohen, Hubbard, Oesterwinder 1965: 10^6 lat,

Kinoshita, Nakai: $5 \cdot 10^6$ lat,

Digital Orrery Project (Sussman et.al.,1988): $20 \cdot 10^6$ lat, $845 \cdot 10^6$ lat

LONGSTOP Project (Cray S.C., 1986): $100 \cdot 10^6$ lat,

Pełen Układ Słoneczny (wymaga 100-1000 więcej CPU):

Digital Orrery Project: $3 \cdot 10^6$ lat ; uwzględnia ruch Merkurego,

Richardson, Walker: $2 \cdot 10^6$ lat,

Quinn, Tremaine, Duncan 1987: $\pm 3 \cdot 10^6$ lat,

Sussman, Wisdom 1992: $98,6 \cdot 10^6$ lat (TOOLKIT, 1992)

Ito, Tanikawa, 2002, $\pm 50 \cdot 10^9$ lat!!!!

Ito, Tanikawa Mon. Not. RAS, 336,(2002),483

$t=5.10^9$ lat

Planety wewnętrzne

488 T. Ito and K. Tanikawa

$t=0$

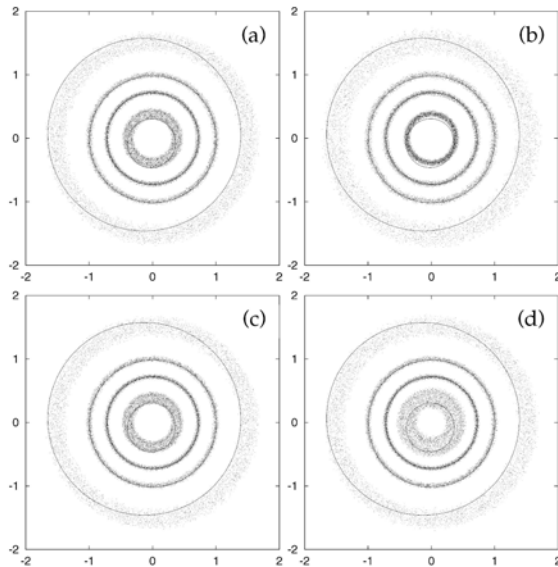


Figure 2. Vertical view of the four inner planetary orbits (from the z -axis direction) at the initial and final parts of the integrations $N_{\pm 1}$. The axes units are au. The xy -plane is set to the invariant plane of Solar system total angular momentum. (a) The initial part of N_{+1} ($t = 0$ to 0.0547×10^9 yr). (b) The final part of N_{+1} ($t = 4.9339 \times 10^8$ to 4.9886×10^9 yr). (c) The initial part of N_{-1} ($t = 0$ to -0.0547×10^9 yr). (d) The final part of N_{-1} ($t = -3.9180 \times 10^9$ to -3.9727×10^9 yr). In each panel, a total of 23 684 points are plotted with an interval of about 2190 yr over 5.47×10^7 yr. Solid lines in each panel denote the present orbits of the four terrestrial planets (taken from DE245).

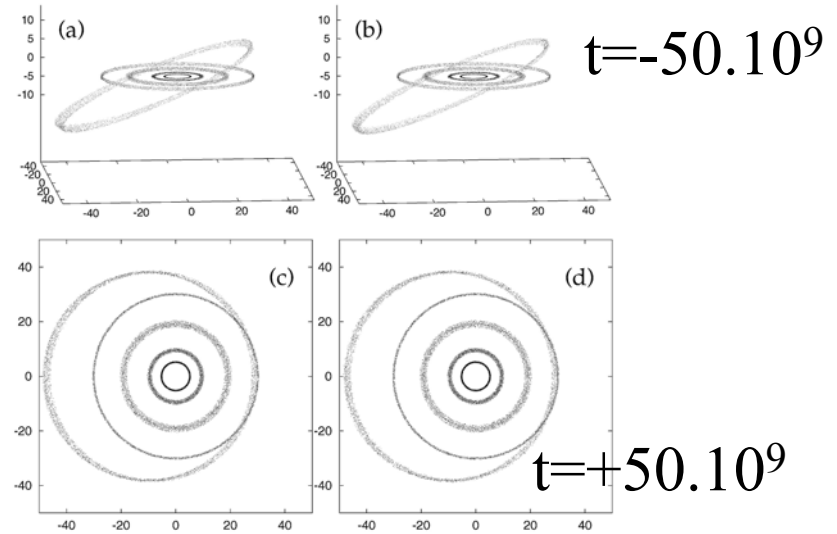


Figure 12. Oblique and vertical views of the outer five planetary orbits in the final parts of the integration F_{\pm} . The unit of the axes is au. The xy -plane is set to the invariant plane of the Solar system total angular momentum. (a), (b) The final part of F_{-} ($t = -4.819 \times 10^{10}$ to -5.000×10^{10} yr). (c), (d) The final part of F_{+} ($t = 4.819 \times 10^{10}$ to 5.000×10^{10} yr). In each panel, a total of 23 810 points are plotted with an interval of about 87 611 yr over 1.814×10^9 yr. In (a) and (c), a rotation is applied to the coordinate system so that the ascending node of Pluto always lies on an x -axis. In (b) and (d), a rotation is applied to the coordinate system so that the perihelion of Pluto always lies on an x -axis. Such transformations make the figures easier to look at since the inclination and eccentricity of Pluto are much larger than those of other planets.

Planety zewnętrzne

Używane zmienne

Dla każdej z planet można posłużyć się następującymi 4 zmiennymi, które wyznaczamy jako funkcję $(t-t_0)$:

ε – mimosród;

i – nachylenie pł. orbity do ekliptyki;

$\tilde{\omega}$ – długość perihelium ($=\phi_0$);

Ω – długość pt-u zejścia pod pł. ekliptyki

$$h = \varepsilon \cdot \sin \tilde{\omega}; \quad k = \varepsilon \cdot \cos \tilde{\omega}$$

$$p = \sin(i/2) \cdot \sin \Omega; \quad q = \sin(i/2) \cdot \cos \Omega$$

Stabilność?

Chaos: nadwrażliwość układu na warunki początkowe np. przesunięcie środka Plutona o 1 mm powoduje przesunięcia orbit planet wykładniczo rozbieżne w czasie. Sussman i Wisdom pokazali w 1988, że taką niestabilność orbity Plutona powoduje m.in. rezonans z Neptunem.

Jak mierzyć? Niech $U(t)$ i $U^*(t)$ będą dwoma rozwiązaniami problemu (z dwoma warunkami początkowymi):

$$d(t) = |U(t) - U^*(t)|$$

Charakterystycznym wykładnikiem Liapunowa nazywamy granicę:

$$\frac{\ln d(t)}{t} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \sigma$$

Dla n -wymiarowego problemu (US: $n=27 \cdot 2=54$) mamy n wykładników L .

Wykładniki Liapunowa cd.

Jeden z w. L jest zawsze =0.

Wzrost w.L oznacza dążenie do stanu chaosu.

Wyniki całkowań numerycznych:

Jeżeli odległość warunków początkowych (w 54 wymiarowej przestrzeni fazowej) była d_0 to badania Sussmana i Wisdom'a, oraz Laskara pokazują, że po czasie T (w 10^6 lat=Ma) mamy odległość:

$$d(T) = d_0 e^{T/5\text{Ma}} \approx d_0 10^{T/10\text{Ma}}$$

J. Laskar 1999

Mimośród Ziemi
obliczany semianalitycznie.
Kolejne części rysunku
pokazują kiedy pojawia się
chaotyczne zachowanie
mimośrodu po zmianie
położenia perihelium o
 10^{-n} radianów.

Czerwona linia:

parametryzacja

$$d = d_0 10^{t/10^n} \quad (t \text{ w Mlat})$$

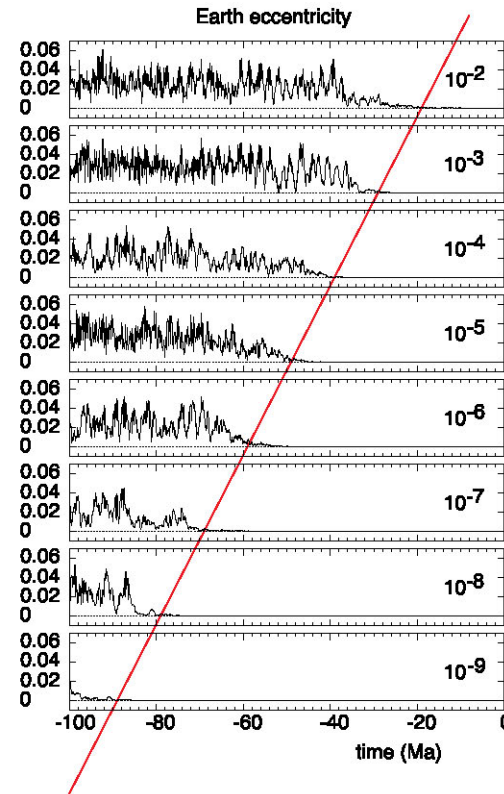


Figure 1: Error in the eccentricity of the Earth resulting from an initial change of 10^{-n} radian in the perihelion of the Earth at the origin. After about $n \times 10$ millions of years, the exponential divergence of the orbits dominates, and the solutions are no longer valid. Error in eccentricity is plotted versus time (in Ma). (Laskar, 1999)