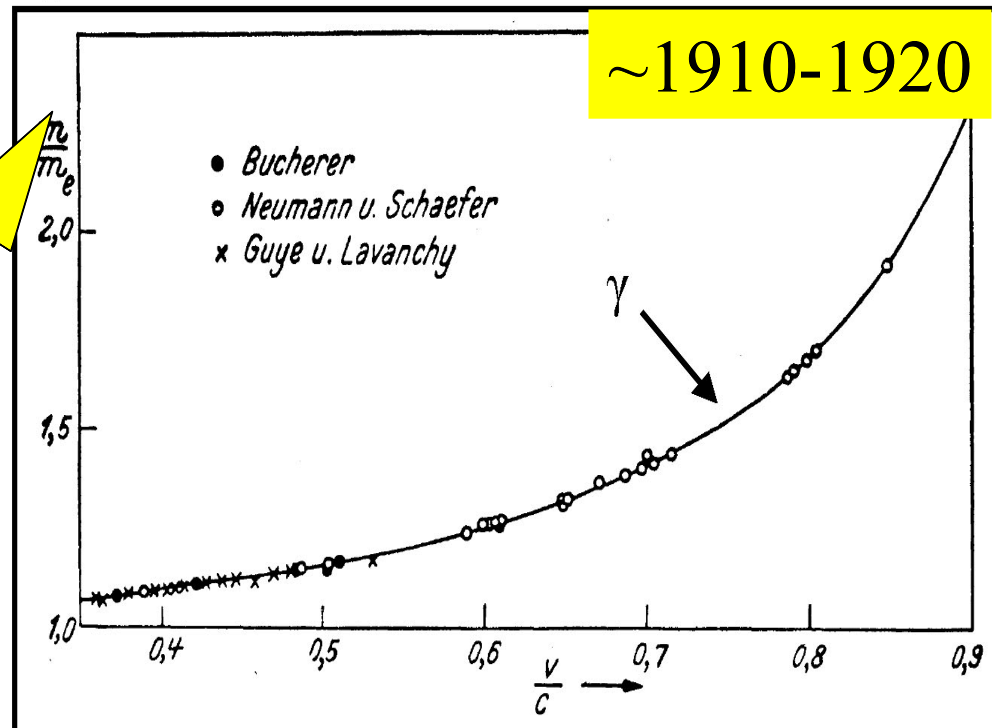
V.6 Pęd i energia przy prędkościach bliskich c

1. Relatywistyczny pęd. Relatywistyczne równanie ruchu
2. Relatywistyczna energia kinetyczna
3. Relatywistyczna energia całkowita i energia spoczynkowa
4. Czterowektor energii i pędu.
5. Układ środka masy i układ laboratoryjny
6. Zastosowanie w problemach fizycznych: aberracja światła, rozpady cząstek nietrwałych,

1. Pęd relatywistyczny

Z szeregu doświadczeń wynika, że należy zmodyfikować nierelatywistyczną definicję wektora pędu: $\vec{p} = m\vec{v}$. Poprawne wyrażenie relatywistyczne ma postać:

$$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = m\gamma\vec{v}$$



Dla elektronów

$$m_{ev} = m_e\gamma$$

$$\frac{m_{ev}}{m_e} = \gamma$$

Pęd relatywistyczny cd.

Spójny opis dostajemy definiując pęd relatywistyczny jako iloczyn masy i czterowektora prędkości:

$$u^{\mu} = \frac{dx^{\mu}}{d\tau} = \frac{dx^{\mu}}{d(t/\gamma)} = \gamma\left(c, \quad v_x, \quad v_y, \quad v_z\right); \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Czas własny

$$p^{\mu} = m\gamma c\left(c, \quad cv_x, \quad cv_y, \quad cv_z\right) = \left(mc^2\gamma, \quad c\vec{p}\right) = \left(E, \quad c\vec{p}\right)$$

$$\vec{p} = m\gamma\vec{v} = m\vec{u}$$

Relatywistyczne uogólnienie równania ruchu

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(m\gamma\vec{v}\right) = \vec{F}$$

Uogólnienie II zasady dynamiki dla v→c

Wiemy już, że II zasada dynamiki zapisana jako pochodna pędu po czasie= sile jest słuszna relatywistycznie. Oznacza to, że:

$$\frac{dp^{\mu}}{d\tau} = K^{\mu}$$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d\vec{p}}{d\tau}\frac{d\tau}{dt} = \vec{F} \to K^{m} = F^{m}\gamma$$

Konstrukcja i interpretacja K^0:

$$K^{\mu} = \frac{dp^{\mu}}{d\tau}\bigg| \cdot u_{\mu} \,; \qquad \vec{K} = \gamma\vec{F}$$

$$K^{\mu} \cdot u_{\mu} = \frac{dp^{\mu}}{d\tau} \cdot u_{\mu} = m u_{\mu} \cdot \frac{du^{\mu}}{d\tau} = \frac{1}{2} m \left(\frac{d}{d\tau} u^{\mu} \cdot u_{\mu} \right) = 0$$

$$K^{0} = \frac{\vec{K} \cdot \vec{u}}{u^{0}} = \frac{\gamma}{c}\vec{F} \cdot \vec{v} = \frac{\gamma}{c} P = \frac{1}{c}\frac{dE}{dt}$$

2-3. Całkując pracę powinniśmy dostać zmianę energii kinetycznej:

$$E_k = \int_0^v \vec{F}\cdot d\vec{s} = \int_0^v \frac{d}{dt}\left(m\gamma\vec{v}\right)\cdot d\vec{s} =$$

$$= \int_0^v \frac{d\vec{s}}{dt}\cdot d\left(m\gamma\vec{v}\right) =$$

$$= m\gamma v^2 - \int_0^v m\gamma v dv = m\gamma v^2 + mc^2/\gamma - mc^2$$

$$E_k = m\gamma c^2 - mc^2$$

Relatywistyczna Energia spoczynkowa E_0

Relatywistyczna energia całkowita E

Związek między energią i pędem

$$\gamma^2 - \beta^2\gamma^2 = 1 \left| m^2c^4 \right.$$

$$E^2 - p^2c^2 = \left(mc^2\right)^2$$

$$E = \sqrt{p^2c^2 + \left(mc^2\right)^2} \underset{c=1}{=} \sqrt{p^2 + m^2}$$

Prędkość cząstki wyraża się przez jej wektor pędu i energię:

$$\vec{v} = \frac{c\vec{p}}{E}c; \qquad \vec{\beta} = \frac{c\vec{p}}{E}$$

zaś jej czynnik Lorentza γ wynosi: $\gamma = \dfrac{E}{mc^2}$

4. Czterowektor energii- pędu

Podobnie do interwału czasoprzestrzennego:

$$s^2 = (ct)^2 - \vec{r}^{\,2} = inv$$

który jest niezmiennikiem tr. Lorentza, wielkość

$$E^2 - \vec{p}^{\,2}c^2 = (mc^2)^2$$

utworzona z E i relatywistycznego pędu jest niezmiennikiem.

Sugeruje to, że E i wektor pędu.c mogą być czasową i przestrzennymi składowymi czterowektora, który transformuje się zgodnie z transformacją Lorentza:

$$E^{\mu} = (E, \quad p_x c, \quad p_y c, \quad p_z c) \qquad \mu=0,1,2,3$$

Czterowektor E-p podlega tr. Lorentza

Pod wpływem pchnięcia Lorentza wzdłuż osi OX z prędkością V czterowektor E-p transformuje się następująco:

$$\begin{pmatrix} E' \\ p'_x c \\ p'_y c \\ p'_z c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_V \left(E - \frac{V}{c} p_x c \right) \\ \gamma_V \left(p_x c - E \frac{V}{c} \right) \\ p_y c \\ p_z c \end{pmatrix}$$

gdzie

$$\gamma_V = \frac{1}{\sqrt{1 - V^2 / c^2}}, \qquad \beta_V = \frac{V}{c}$$

Dowód oparty jest na transformacji prędkości ..

$$\vec{v}' = \begin{pmatrix} v'_x \\ v'_y \\ v'_z \end{pmatrix} = \frac{1}{1 - \frac{V \cdot v_x}{c^2}} \begin{pmatrix} v_x - V \\ v_y / \gamma_V \\ v_z / \gamma_V \end{pmatrix}$$

Czteropęd fotonu (cząstki o zerowej masie)

Dla cząstki o zerowej masie spoczynkowej zachodzi:

$$E^2 - \vec{p}^{\,2} c^2 = 0$$

Stąd energia fotonu związana z częstością wzorem E=hν wiąże się z pędem wzorem:

$$p_\gamma = k/c = h\nu/c$$

Zaś czteropęd fotonu lecącego w kierunku $\hat{e}$:

$$k^\mu = \left(h\nu, h\nu\hat{e}\right)$$

5. Układ środka masy i układ laboratoryjny

W przypadku nierelatywistycznym zdefiniowaliśmy układ środka masy układu N punktów materialnych poprzez warunek:

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{p}^{\,*}{}_i = 0$$

narzucony na wektorową sumę pędów $\mathbf{p}^*_i$ w tym układzie.

Ten warunek definiuje ŚM także w przypadku relatywistycznym.

Prowadzi to do wzoru na prędkość układu ŚM $\mathbf{V}$ względem układu inercjalnego:

$$\vec{V} = \frac{\sum m_i \vec{v}_i}{\sum m_i} = \frac{\sum \vec{p}_i}{\sum m_i}$$

Układ ŚM i wyjściowy UI połączone są tr. Galileusza: $\vec{p}^{\,*}{}_i = \vec{p}_i - m_i \vec{V}$

cd. ŚM-uogólnienie na przypadek relatywistyczny

Ponieważ prędkość cząstki relatywistycznej wyraża się przez jej relatywistyczny pęd i energię:

$$\vec{v} = c\frac{\vec{p}c}{E}$$

Możemy uogólnić wyrażenie na prędkość układu ŚM jako:

$$\vec{V} = c\frac{\sum \vec{p}_i c}{\sum E_i} \xrightarrow[v_i \to 0]{} \frac{\sum \vec{p}_i}{\sum m_i}$$

Do znalezienia czterowektorów energii- pędu w ŚM musimy zastosować tr. Lorentza z powyższym pchnięciem miedzy układami.

C=1

Dalej we wszystkich rozważaniach będziemy stosowali układ z

$$c=1$$

W tym układzie jednostek:

$$[m]=[E]=[p]$$

Najczęściej będziemy podawali masy cząstek w GeV/c^2, energię w GeV, pędy w GeV/c.

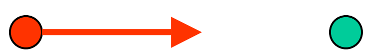
Układ ŚM i układ laboratoryjny LAB

Terminologia wiąże się z doświadczeniami wykonywanymi w fizyce jądrowej i cząstek elementarnych przy akceleratorach- źródłami cząstek- pocisków relatywistycznych.

C=1

LAB

ŚM (CMS)



$$\left(E_1 = \sqrt{m_1^{\,2} + p_1^{\,2}}, \vec{p}_1\right) \qquad \left(E_2 = m_2, \vec{0}\right) \qquad \sum \vec{p}^* = 0$$

<u>Po zderzeniu w LAB</u>: suma energii cząstek wylatujących z reakcji jest równa E_1+m_2, zaś suma (wektorowa) pędów- pędowi pocisku p_1.
<u>Po zderzeniu w ŚM</u>: suma pędów produktów jest równa zero, suma energii jest równa $E_1^*+E_2^*$

Układ ŚM i układ laboratoryjny LAB cd.

W LAB wektory czteropędów:

$$P_1^{\mu} = \left(E_1 = \sqrt{m_1^{\ 2} + p_1^{\ 2}}, \vec{p}_1\right); \quad P_2^{\mu} = \left(m_2, \vec{0}\right)$$

Kwadrat sumy czterowektorów jako kwadrat czterowektora jest niezmiennikiem tr. Lorentza:

$$\left(P_1^{\mu} + P_2^{\mu}\right)^2 = \left(E_1 + m_2\right)^2 - p_1^{\ 2} =$$

$$= m_1^{\ 2} + m_2^{\ 2} + 2m_2E_1 = \mathrm{inv} := s$$

W ŚM wektory czteropędów:

$$P_1^{\ *\mu} = \left(E_1^{\ *} = \sqrt{m_1^{\ 2} + p_1^{\ *2}}, \vec{p}_1^{\ *}\right);$$

$$P_2^{\ *\mu} = \left(E_2^{\ *} = \sqrt{m_2^{\ 2} + p_1^{\ *2}}, -\vec{p}_1^{\ *}\right)$$

zaś niezmiennik s wynosi:

$$s = \left(P_1^{\ *\mu} + P_2^{\ *\mu}\right)^2 = \left(E_1^{\ *} + E_2^{\ *}\right)^2 = E_{ŚM}^{\ 2}$$

Niezmiennik s jest kwadratem energii w układzie ŚM

Energia progowa na produkcję N cząstek $\{m'_i\}$

Pytanie praktyczne: jaką minimalną energię- energię progową E_{th}- w LAB musi mieć cząstka (z akceleratora, wiązki), żeby zderzając się ze stacjonarną tarczą o masie m_2 wyprodukować N cząstek o masach $\{m'_i\}$ w stanie końcowym?

W układzie ŚM N cząstek może spoczywać. Będą one wtedy miały najmniejszą możliwą energię równą sumie ich energii spoczynkowych (sumie mas).

W LAB:

$$s = m_1^2 + m_2^2 + 2m_2E_{th}$$

W ŚM:

$$s = \left(\sum m'_i\right)^2$$

Porównując dostajemy wyrażenie na energię progową:

$$E_{th} = \frac{\left(\sum m'_i\right)^2 - m_1^2 - m_2^2}{2m_2}$$

Dodatek: Notacja i iloczyn skalarny czterowektorów

Zdefiniujemy czterowektor kontrawariantny:

$$a^{\mu} = \left(a^{0}, \vec{a}\right)$$

i czterowektor kowariantny:

$$a_{\mu} = \left(a^{0}, -\vec{a}\right)$$

Iloczyn skalarny definiujemy jako:

$$a^{2} = a^{\mu} \cdot a_{\mu} = \left(a^{0}\right)^{2} - \vec{a} \cdot \vec{a}$$

Czterowektor kontrawariatny transformuje się zgodnie z transformacją Lorentza.