V.1 Nierelatywistyczny pęd. Moment pędu

Definicja wektora pędu. Prawo zachowania pędu

Dla cząstki o masie m_i i prędkości $\mathbf{v}_i$ definiujemy (nierelatywistyczny) wektor pędu $\mathbf{p}_i$ jako:

$$\vec{p}_i = m_i \vec{v}_i$$

Dla układu N cząstek pęd całkowity $\mathbf{P}$ to: $$\vec{P} = \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i$$

Jeżeli wypadkowa siła działająca na te ciała znika to spełnione jest prawo zachowania pędu:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum \frac{d\vec{p}_i}{dt} = \sum \vec{F}_i = 0 \text{ czyli } \vec{P} = \overrightarrow{\text{const}}$$

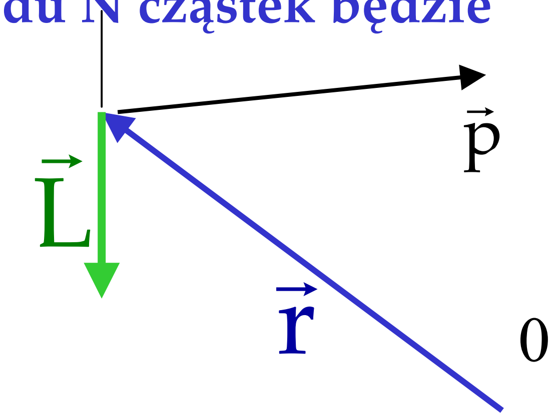
Mamy wtedy do czynienia z <u>układem izolowanym N ciał</u>.

Moment pędu

Moment pędu określamy zawsze względem pewnego wyróżnionego punktu, najczęściej początku układu współrzędnych 0. Dla jednej cząstki i układu N cząstek będzie to:

$$\vec{L}_i = \vec{r}_i \times \vec{p}_i$$

$$\vec{L} = \sum \vec{L}_i = \sum \vec{r}_i \times \vec{p}_i$$



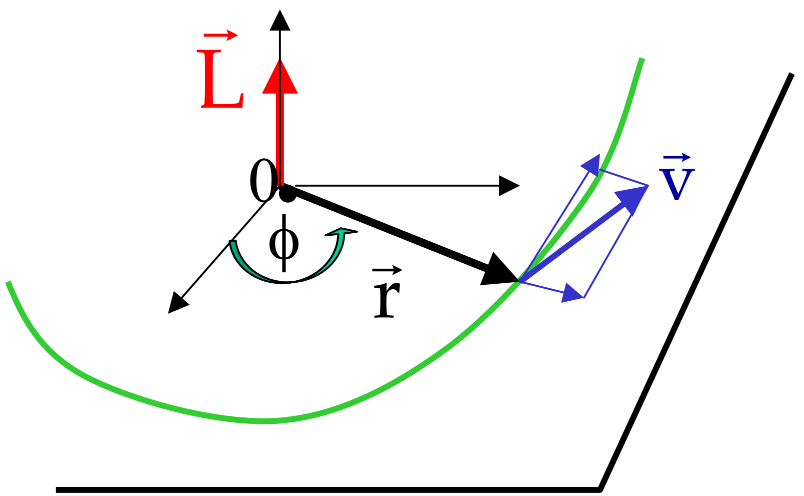
Zmiana wektora momentu pędu jest związana z momentem siły:

$$\frac{d\vec{L}_i}{dt} = \vec{v}_i \times \vec{p}_i + \vec{r}_i \times \frac{d\vec{p}_i}{dt} = \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \vec{M}_i$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum \overrightarrow{M_i}$$

Składowe wektora momentu pędu

$$\begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} yp_z - zp_y \\ zp_x - xp_z \\ xp_y - yp_x \end{pmatrix}$$



Ruch w płaszczyźnie XOY

We współrzędnych cylindrycznych:

$$\vec{L} = m\vec{r} \times \vec{v}_\phi$$

$$L = mr^2 \frac{d\phi}{dt} = mr^2 \dot{\phi}$$

Zachowanie momentu pędu cząstki

Ponieważ: $$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$$

moment pędu jest zachowany gdy znika moment siły działającej na ciało. Zachodzi to w dwóch przypadkach:

1. Dla cząstki swobodnej gdy na ciało nie działa siła wypadkowa.

2. Gdy siła jest zawsze równoległa do promienia wodzącego. Ma to miejsce mi. dla sił centralnych:

$$\vec{F}(\vec{r}) = F(r)\hat{e}_r$$

Gdy moment pędu jest zachowany ruch jest <u>płaski</u>, odbywa się po płaszczyźnie prostopadłej do wektora momentu pędu.

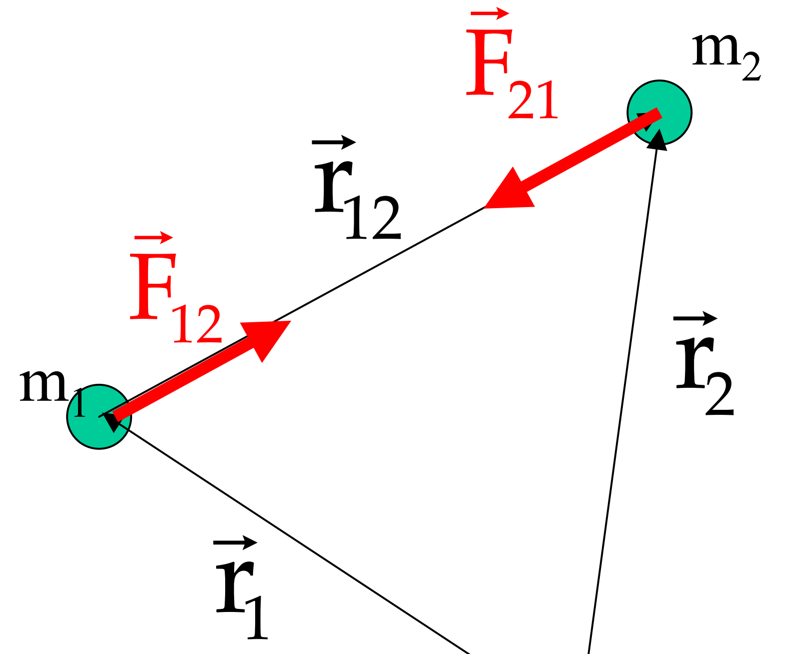
Ruch w polu sił centralnych jest płaski

Siła powszechnego ciążenia Newtona

Siła grawitacji działająca na ciało 2 ze strony ciała 1:

$$\vec{F}_{21} = -\frac{Gm_1m_2}{r_{12}^{\;2}}\frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}}$$

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$



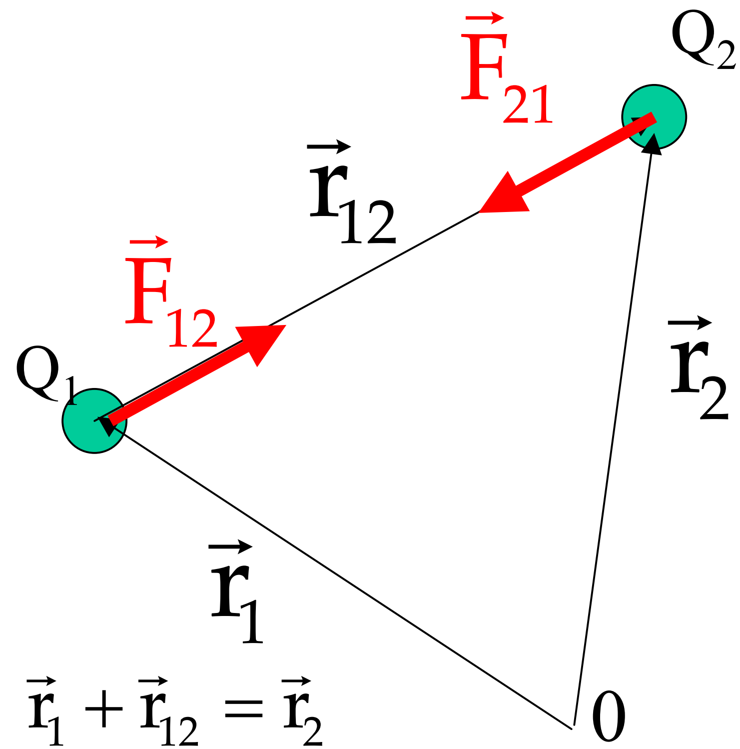
$$\vec{r}_1 + \vec{r}_{12} = \vec{r}_2$$

Siła kulombowska

Siła działająca na ładunek Q_2 ze strony ładunku Q_1:

$$\vec{F}_{21} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1 Q_2}{r_{12}^{\;2}}\frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}}$$

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$



$$\vec{r}_1 + \vec{r}_{12} = \vec{r}_2$$

W polu sił centralnych prędkość polowa jest zachowana

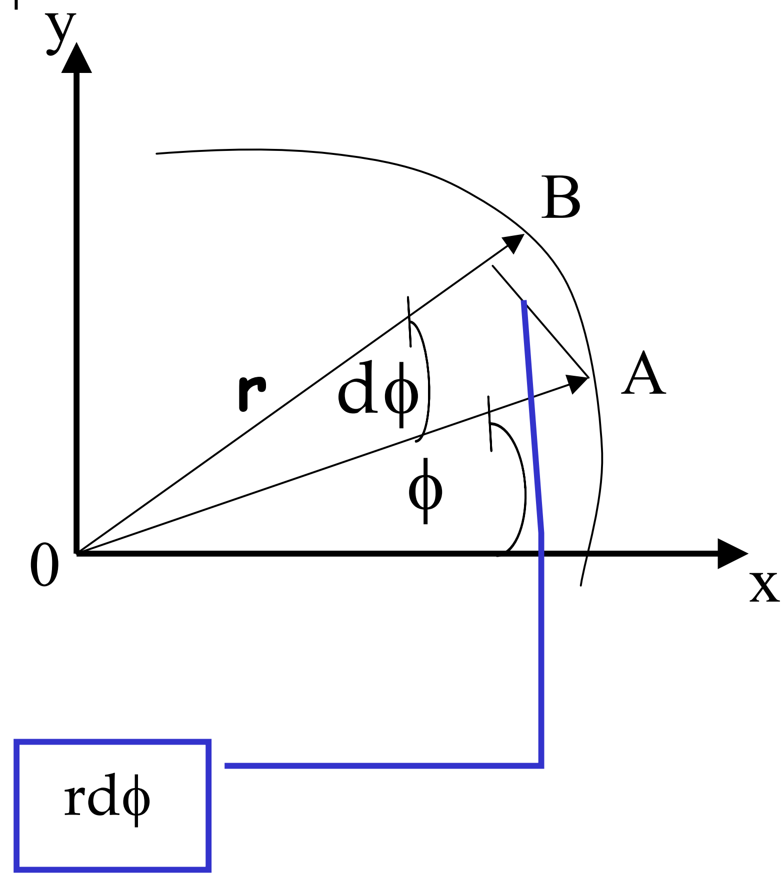
Pole trójkąta AOB w pł. ruchu: $dA = \frac{1}{2} r^2 d\phi$

Stąd prędkość polowa dA/dt:

$$\dot{A} = \frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\phi}$$

Wstawiając wyrażenie na wartość momentu pędu z tr. 4:

$$\dot{A} = \frac{L}{2m} = const$$



<u>Przykład</u>: w polu grawitacyjnym Słońca prędkość polowa planety jest stała (I prawo Keplera)