IV.4.3 Siły sprężystości. Oscylator harmoniczny tłumiony

Centralna siła sprężysta -kr

Siła centralna: jest to siła postaci $\vec{F}(\vec{r}) = F(r)\vec{r}$ **skierowana wzdłuż prostej łączącej ciało z centrum siły w początku UO, której wartość zależy tylko od odległości od centrum.**

Cząstka o masie m poruszająca się pod wpływem siły centralnej

$$\vec{F} = -k\vec{r}$$

to oscylator harmoniczny. Równanie ruchu:

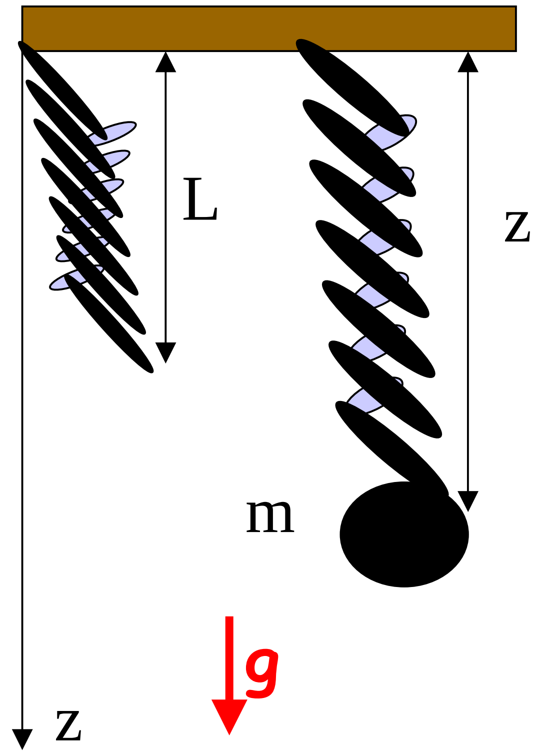
$$m\ddot{\vec{r}} = -k\vec{r}$$

ma rozwiązanie w postaci:

$$\vec{r}(t) = \vec{A}\cos\omega t + \vec{B}\sin\omega t$$

Ruch jest płaski zaś tor jest w ogólnym przypadku elipsą.

Wahadło sprężynowe



Bardzo lekka (nieważka) sprężyna +masa m=wahadło sprężynowe.

Problem 1-wymiarowy: ruch masy m pod wpływem 2 sił:

Sprężystej: $\vec{F}_{spr} = -k(z-L)\hat{z}$

Ciążenia: $\vec{F}_g = m g \hat{z}$

R. ruchu $m\ddot{z} = -k(z-L) + mg$

ma rozwiązanie statyczne:

$$z = z_0 = L + mg/k = const$$

Wprowadźmy nową zmienną

$Z = z - z_0$.

$$m\ddot{Z} = -k\left(Z + \frac{mg}{k}\right) + mg = -kZ$$

R. ruchu w nowej zmiennej:

$$\ddot{Z} + \frac{k}{m}Z = \ddot{Z} + \omega_0^2 Z = 0$$

Wahadło sprężynowe cd.

Rozwiązaniem równania oscylatora harmonicznego

$$\ddot{Z} + \omega_0^{\ 2} Z = 0$$

jest $$Z(t) = A\cos(\omega_0 t + \phi_0) = B\cos\omega_0 t + C\sin\omega_0 t$$

Stałe A, ϕ_0 lub B, C wyznaczamy z warunków początkowych $Z(0)=Z_0$, $dZ(0)/dt=V_0$.

Siła sprężysta: prawo Hooke'a

Siły sprężyste powstają przy odkształcaniu ciał stałych. Badaniem zajmuje się teoria sprężystości.

Przy niewielkich odkształceniach siła (naprężenie) jest proporcjonalna(e) do odkształcenia. Np. dla wydłużania się ciał stałych o ΔL mamy empiryczne prawo Hooke'a:

$$F = E \cdot A \cdot \left(\frac{\Delta L}{L} \right)$$

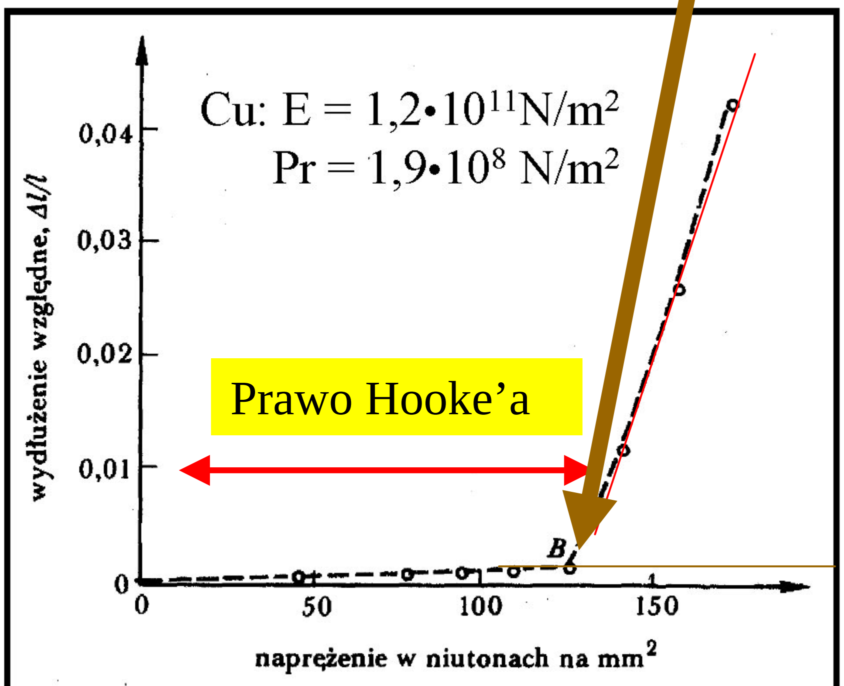
gdzie:

E- moduł Younga (naprężenie, przy którym długość wzrosłaby dwukrotnie),

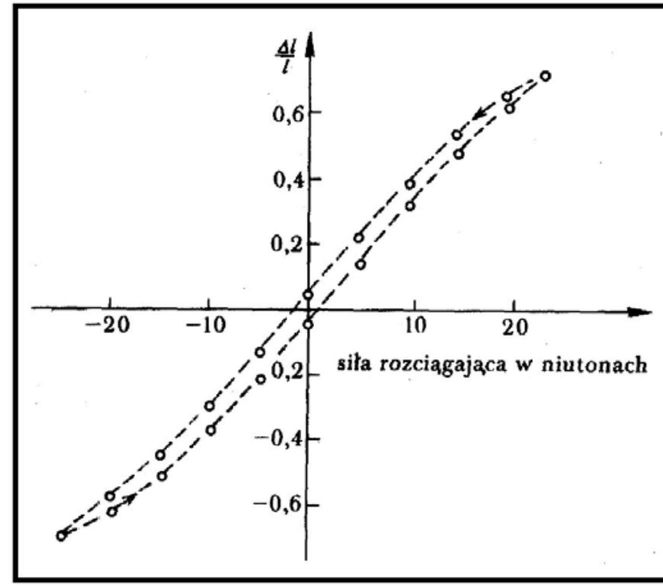
A- powierzchnia przekroju poprzecznego ciała.

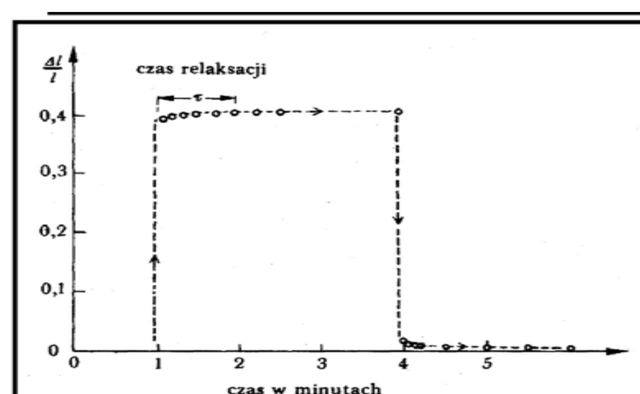
Granica proporcjonalności, histereza i czas relaksacji

Prawo Hooke'a obowiązuje dla stosunkowo niewielkich rozciągnięć, znacznie mniejszych od E.



$$1N/mm^2 = 10^6 N/m^2$$





Oscylator harmoniczny z tłumieniem

Siły: sprężysta i oporu, proporcjonalna do prędkości są separowalne:

$$\vec{F} = -k\vec{r}; \quad \vec{F}_{oporu} = -\gamma\vec{v}$$

co oznacza, że możemy poszukiwać rozwiązań dla każdej ze składowych oddzielnie.

R. Ruchu:

$$\frac{d}{dt}(m\vec{v}) = -k\vec{r} - \gamma\vec{v}$$

$$\ddot{\vec{r}} + \frac{\gamma}{m}\dot{\vec{r}} + \frac{k}{m}r = 0$$

Jest równaniem liniowym jednorodnym II-giego rzędu o stałych współczynnikach.

Poszukujemy rozwiązania jako

$$\vec{r}(t) = \vec{A}e^{\lambda_1 t} + \vec{B}e^{\lambda_2 t}$$

Gdzie liczby zespolone λ_1, λ_2 **są pierwiastkami wielomianu charakterystycznego:**

$$\lambda^2 + \frac{\gamma}{m}\lambda + \frac{k}{m} = 0$$

Oscylator harmoniczny z tłumieniem cd.

Rozwiązujemy równanie kwadratowe.

$$\sqrt{\Delta} = \frac{1}{m}\sqrt{\gamma^2 - 4km}$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - 4km}}{2m} = -\Lambda_{1,2}$$

DYSKUSJA rozwiązań zależnie od znaku wyróżnika.

1. Ruch nadtłumiony $\sqrt{\gamma^2 - 4km} > 0$
   Obie lambdy rzeczywiste i mniejsze od zera.

$$\vec{r}(t) = \vec{A}e^{-\Lambda_1 t} + \vec{B}e^{-\Lambda_2 t}$$

2. Tłumienie krytyczne $\sqrt{\gamma^2 - 4km} = 0$

Rozwiązanie jest w postaci:

$$\vec{r}(t) = \vec{A}e^{-\frac{\gamma}{2m}t} + \vec{B}te^{-\frac{\gamma}{2m}t}$$

3. Ruch podtłumiony $\sqrt{\gamma^2 - 4km} < 0$
Pierwiastki mają część rzeczywistą i urojoną:

$$\lambda_{1,2} = -\frac{\gamma}{2m} \pm i\frac{\sqrt{4km - \gamma^2}}{2m} = -\frac{\gamma}{2m} \pm i\omega$$

zaś rozwiązanie możemy zapisać w postaci:

$$\vec{r}(t) = e^{-\frac{\gamma t}{2m}}\left[\vec{A}\cos\omega t + \vec{B}\sin\omega t\right]$$

Oscylator harmoniczny z tłumieniem cd.

Rozwiązanie oscylatora podtłumionego z uwzględnieniem warunków początkowych:

$$\vec{r}\left(t_0\right)=\vec{r}_0; \qquad \vec{v}(t_0)=\vec{v}_0$$

$$\vec{r}\left(t\right)=e^{-\frac{\gamma t}{2m}}\left[\vec{r}_0\cos\omega t+\frac{\vec{v}_0}{\omega}\sin\omega t\right]$$

Częstość ulega modyfikacji. Zamiast

$$T_0=\frac{2\pi}{\omega_0}=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

Mamy izochronizm z okresem:

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{\sqrt{\frac{k}{m}-\frac{\gamma^2}{4m^2}}}=$$

$$=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{\gamma^2 m}{4m^2 k}}}=T_0\left(1+\frac{\gamma^2}{8mk}+....\right)$$