IV.4.2 Siły oporu ośrodka

- Lepkość płynów – cieczy i gazów
- Siła nośna i siła oporu czołowego
- Wzór Newtona. Liczba Reynoldsa
- Wzór Stokesa
- Spadanie ciała w jednorodnym polu grawitacyjnym w obecności siły oporu. Prędkość graniczna.

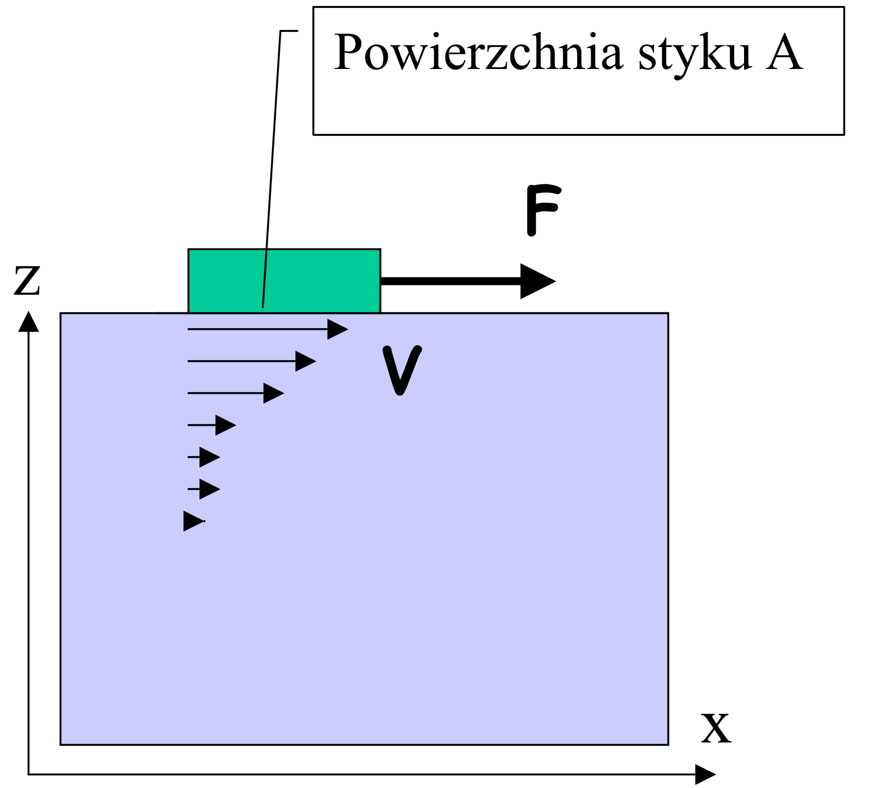
Lepkość

Siła lepkości:

$$\vec{F}_L = -\eta A \frac{dv}{dz}\hat{v}$$

Współczynnik lepkości jest zazwyczaj funkcją temperatury i ma wymiar Nsm^{-2}.

CIECZ	η [Ns/m^2]
woda	10^{-3}
gliceryna	1.5
miód	500
powietrze	1.8×10^{-5}



Siła nośna i siła oporu czołowego

Siła nośna F_N patrz niżej

Siła oporu czołowego opisywana jest przez (złudnie prosty) wzór Newtona:

$$F_O = -C(Re)A\left(\frac{\rho v^2}{2}\right)\hat{v}$$

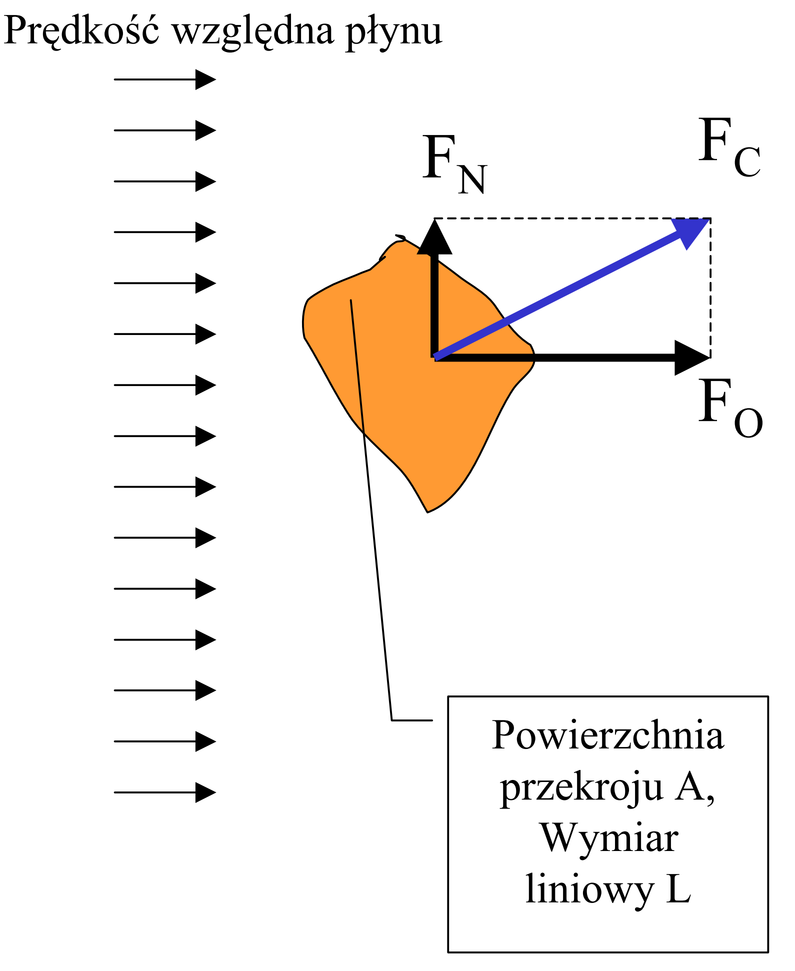
gdzie:

ρ- gęstość cieczy,

A- powierzchnia przekroju ciała prostopadła do prędkości względnej,

C(Re)- bezwymiarowy współczynnik kształtu, zależny od liczby Reynoldsa Re:

$$Re = \frac{v\rho L}{\eta}$$



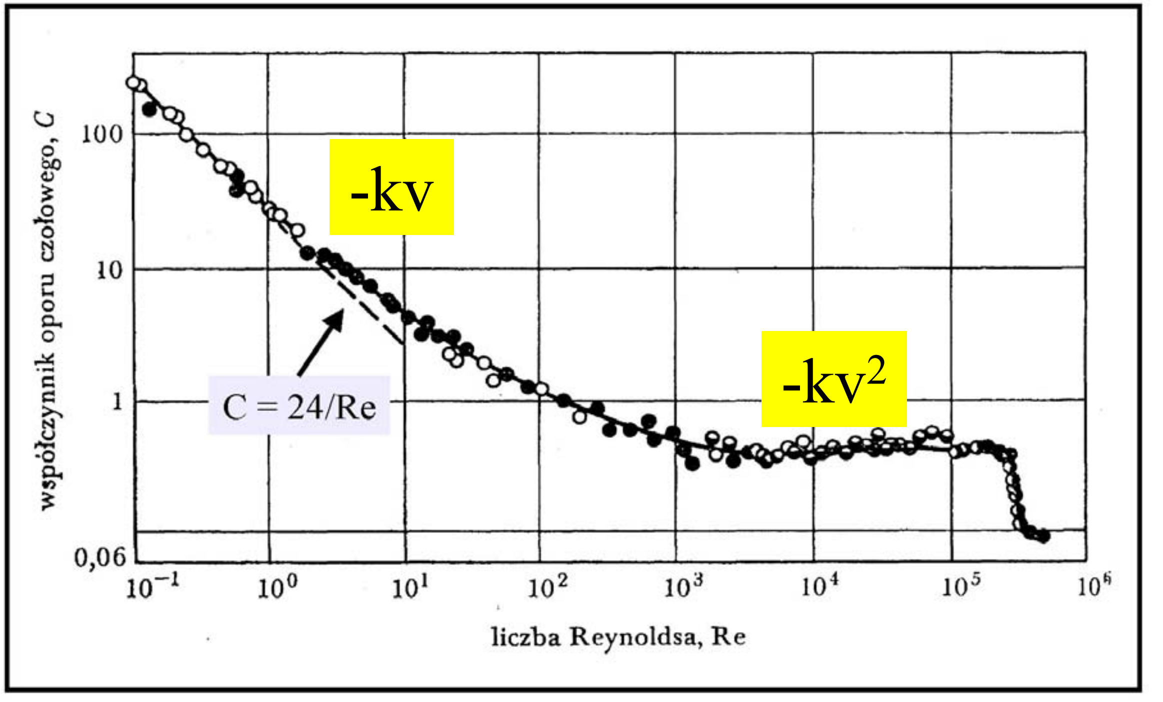
Współczynnik C(Re); wzór Stokesa

Dla kuli i małych Re:

$$A = \pi r^2 \qquad L=2r$$

$$C=\frac{24}{Re}$$

$$F_O = 6\pi\eta r v$$



Dla dysku i małych Re:

$$\parallel \vec{v} : \vec{F}_O = -\frac{32}{3}\eta r v$$

$$\perp \vec{v} : \vec{F}_O = -16\eta r v$$

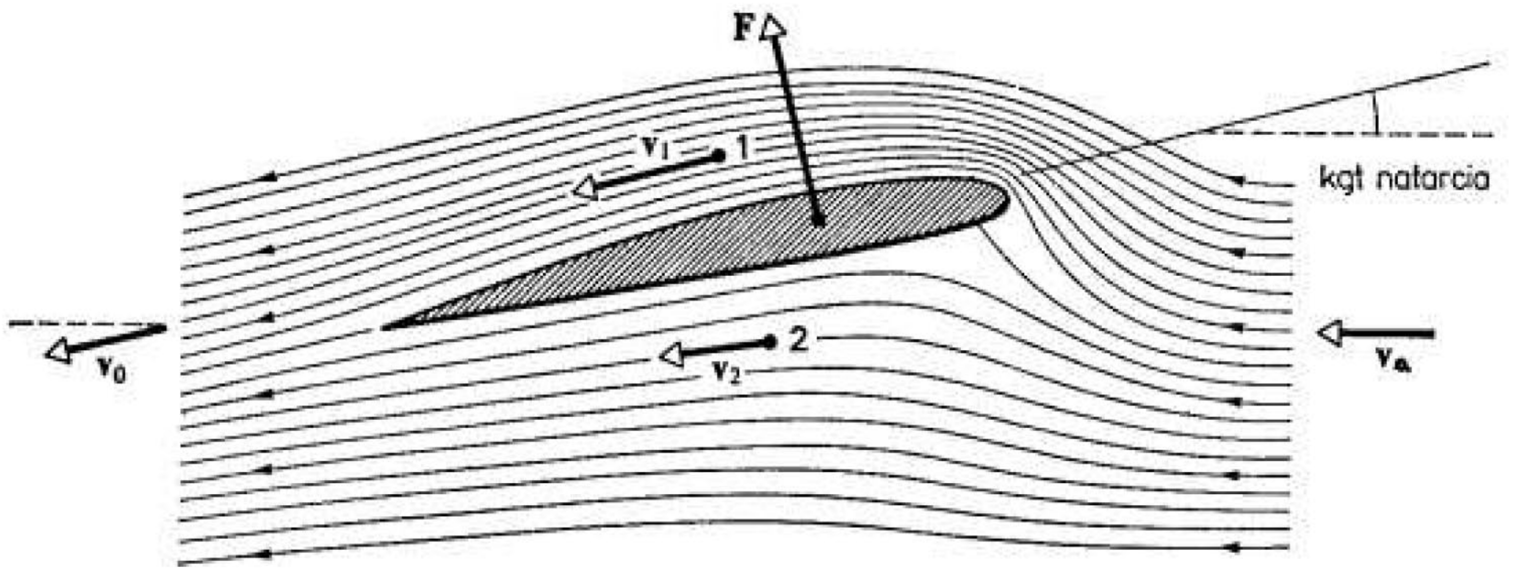
Dla większości ciał C wyznaczamy doświadczalnie (tunele aerodynamiczne).

$$Re = \frac{v\rho L}{\eta}$$

Siła nośna

Prawo Bernouliego: $$\rho g h + \frac{\rho v^2}{2} + p = const$$

W obszarze większych prędkości przepływy płynu ciśnienie się zmniejsza- powstaje siła nośna

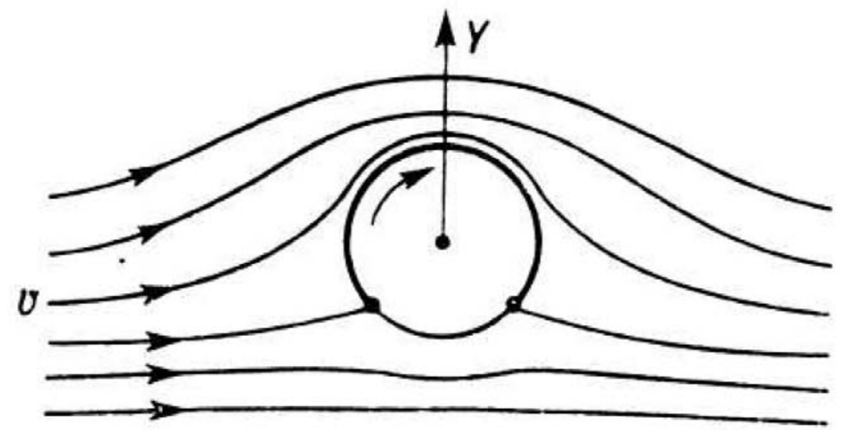


Siła nośna- zjawisko Magnusa

Zjawisko Magnusa

Walec wirujący w przepływającej poprzecznie do osi obrotu cieczy lub gazie.

Ciśnienie nad rotującym walcem maleje, a pod rośnie- powstaje siła nośna



Spadanie ciała w jednorodnym polu grawitacyjnym w obecności siły oporu. Prędkość graniczna

Rozważymy dwie zależności siły oporu od prędkości: a) –kv, b)-kv².

Równanie ruchu dla spadku:

$$m\ddot{z} + \begin{matrix} k\dot{z} \\ k\dot{z}^2 \end{matrix} = -mg \quad \text{czyli} \quad \ddot{z} + \begin{matrix} \rho\dot{z} \\ \rho\dot{z}^2 \end{matrix} = -g \quad \text{i} \quad \rho = \frac{k}{m}$$

a) Jest to liniowe równanie różniczkowe niejednorodne.

Rozwiązanie ogólne r. jednorodnego:

$$z(t) = -{}^{A}\!/\!_{\rho}\, e^{-\rho t} + B$$

Rozwiązanie szczególne r. niejednorodnego:

$$z(t) = -{}^{gt}\!/\!_{\rho}$$

Rozwiązanie ogólne r. niejednorodnego

$$z(t) = -gt/\rho + B - {}^{A}\!/\!_{\rho}\, e^{-\rho t}$$

a) cd

Podstawiając warunki początkowe z(0)=z_0, v_z(0)=v_0 dostajemy:

$$z(t) = z_0 - \frac{gt}{\rho} + \frac{1}{\rho}\left(v_0 + \frac{g}{\rho}\right)\left(1 - e^{-\rho t}\right)$$

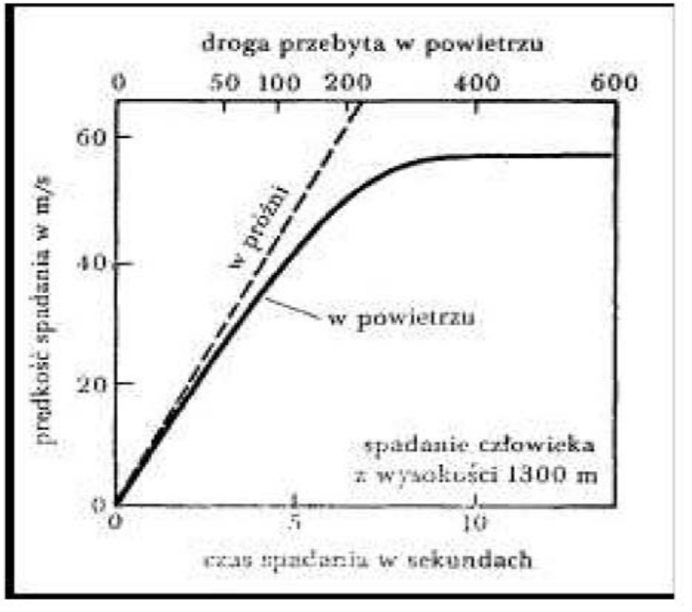
Prędkość graniczna

Dla kuli spadającej w cieczy $(Re \ll 1)$

$$v_{gr} = -\frac{2}{9}\,\frac{r^2 g(\rho - \rho_p)}{\eta}$$

Wartość prędkości granicznej:

$$v_{gr} = -\frac{g}{\rho}$$



b) $-kv^2$

W tym przypadku mamy inne rozwiązania w ruchu ku dołowi i ku górze:

$$\ddot{z} \pm \rho \dot{z} = -g$$

Znajdujemy rozwiązanie w spadaniu (znak minus), a rozwiązanie dla wznoszenia otrzymamy zamieniając znak przy ro w rozwiązaniu.

I-sze całkowanie jest proste:

$$\frac{dv}{dt} = \rho v^2 - g \text{ rozdzielamy zmienne:} \frac{dv}{\rho v^2 - g} = dt$$

$$t = \frac{1}{2\sqrt{g\rho}}\left[\ln\left|\frac{v - \sqrt{g/\rho}}{v + \sqrt{g/\rho}}\right| - \ln\left|\frac{v_0 - \sqrt{g/\rho}}{v_0 + \sqrt{g/\rho}}\right|\right]$$

b) cd.

Dostajemy więc wyrażenie na prędkość dz/dt=v:

$$v=-\sqrt{\frac{g}{\rho}}\,\frac{v_0\cosh\left(t\sqrt{\rho g}\right)-\sqrt{\frac{g}{\rho}}\sinh\left(t\sqrt{\rho g}\right)}{-\sqrt{\frac{g}{\rho}}\cosh\left(t\sqrt{\rho g}\right)+v_0\sinh\left(t\sqrt{\rho g}\right)}\rightarrow-\sqrt{\frac{g}{\rho}}$$

Ponieważ licznik tego ułamka jest proporcjonalny do pochodnej mianownika więc jeszcze jedno całkowanie daje nam logarytm:

$$z(t)=z_0-\frac{1}{\rho}\ln\left|v_0\sqrt{\frac{\rho}{g}}\sinh\left(t\sqrt{\rho g}\right)-\cosh\left(t\sqrt{\rho g}\right)\right|$$

Rozwiązanie dla ruchu ku górze proszę znaleźć w domu.