IV.3 Ruch swobodny i nieswobodny. Więzy. Reakcje więzów

Ruch swobodny i nieswobodny. Stany równowagi

Rozważamy ciało w pewnym układzie inercjalnym (UI).

Gdy:

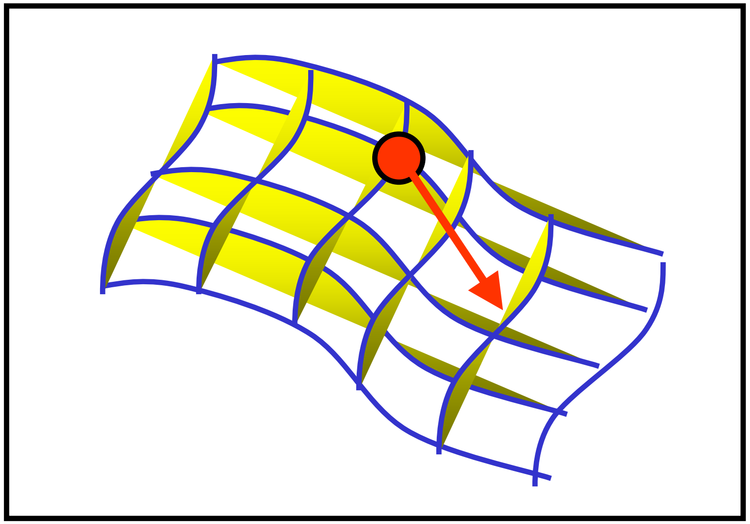
- prędkość tego ciała znika **v**=0- ciało znajduje się w spoczynku.
- Przyspieszenie tego ciała znika **a**=0- ciało znajduje się w równowadze. Ciało w równowadze nie musi pozostawać w spoczynku w UI, może poruszać się ruchem jednostajnym i prostoliniowym.
- Prędkość i przyspieszenie tego ciała znikają **v**=0, **a**=0- ciało znajduje się w równowadze statycznej i spoczywa w UI.

Więzy i liczba stopni swobody

W wielu problemach dynamicznych ciało porusza się pod wpływem sił zewnętrznych po ustalonej powierzchni (lub krzywej) zwanej powierzchnią (krzywą) więzów.

Opis tej powierzchni (krzywej) zapewnia równanie (a) więzów w postaci uwikłanej:

$f(x, y, z, v_x, v_y, v_z, t) = 0$ dla powierzchni,



lub dwa równania:

$f_1(x, y, z, v_x, v_y, v_z, t) = 0$

$f_2(x, y, z, v_x, v_y, v_z, t) = 0$ dla krzywej

Liczba stopni swobody N_F ciała w ruchu z więzami opisanymi N_K równaniami więzów wynosi: $N_F = 3 - N_K$

Liczba stopni swobody różnych układów dynamicznych

Układ	N_F		
	swobodny	Ruch na płaszczyźnie	Ruch po krzywej
Punkt materialny	3	2	1
Bryła sztywna	6	5	4

Więzy jednostronne lub dwustronne

Ściśle rzecz biorąc równości z poprzedniej transparencji to tzw. <u>więzy dwustronne</u>, gdy ciało musi pozostawać na powierzchni lub krzywej więzów.

Ogólnie możemy mieć do czynienia z nierównościami np.

$$f(x, y, z, v_x, v_y, v_z, t) \geq 0$$

które definiują <u>więzy jednostronne</u>.

Więzy holonomiczne i nieholonomiczne, skleronomiczne lub reonomiczne

Gdy równania (nierówności) więzów nie zależą explicite od składowych prędkości lub dają się sprowadzić do takiej formy mamy do czynienia z <u>więzami holonomicznymi</u>. Gdy występuje zależność od składowych prędkości mamy <u>więzy nieholonomiczne</u>.

Będziemy dalej rozważali tylko więzy holonomiczne

Gdy równania więzów nie zależą explicite od czasu mamy do czynienia z <u>więzami skleronomicznymi</u>.

Gdy zależność od czasu występuje, mamy do czynienia z <u>więzami reonomicznymi</u>

Reakcja więzów

Konieczność włączenia do r. ruchu sił reakcji można prześledzić na przykładzie punktu poddanego dwustronnym więzom holonomicznym:

$$f(x, y, z, t) = 0$$

Prędkość punktu musi spełniać warunek wynikający ze zróżniczkowania r. więzów po czasie:

$$\frac{df}{dt} = 0$$

$$\frac{df}{dt} = \sum \frac{\partial f}{\partial r_i}\frac{dr_i}{dt} + \frac{\partial f}{\partial t} = \nabla f \cdot \vec{v} + \frac{\partial f}{\partial t}$$

Symbol (nabla) ∇f **jest wektorem utworzonym z pochodnych cząstkowych:**

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y \, \partial}, \quad \frac{\partial f}{\partial z} \right)$$

Reakcja więzów cd.

Przyspieszenie spełnia związek:

$$(\nabla f)\cdot\vec{a} = -\vec{v}\cdot\left[(\vec{v}\cdot\nabla)(\nabla f)\right] - 2\vec{v}\cdot\left(\nabla\frac{\partial f}{\partial t}\right) - \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$$

$$\left[(\vec{v}\cdot\nabla)(\vec{c})\right]_m = \sum v_k \frac{\partial c_m}{\partial x_k}$$

Wektor ∇f jest normalny do powierzchni więzów.

Tak więc składowa przyspieszenia normalna do powierzchni więzów wynosi:

$$\vec{a}_n = -\frac{\nabla f}{|\nabla f|^2}\left\{\vec{v}\cdot\left[(\vec{v}\cdot\nabla)(\nabla f)\right] + 2\vec{v}\cdot\left(\nabla\frac{\partial f}{\partial t}\right) + \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\right\} = \frac{\vec{F}_n}{m}$$

Stąd jeżeli siła zewnętrzna nie jest bardzo precyzyjnie dobrana do powierzchni więzów nie możemy równocześnie spełnić równania powyżej i równania ruchu nie wprowadzając dodatkowych sił normalnych do pow. więzów- sił reakcji

Reakcja więzów cd.

W obecności więzów należy do sił zewnętrznych działających na ciało F_Z dodać siły reakcji więzów F_R co prowadzi do równania ruchu:

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F}_Z + \vec{F}_R$$

Siły reakcji więzów są na ogół prostopadłe do powierzchni (krzywej) więzów tzw. *idealnych lub gładkich*.

Jeżeli siły reakcji mają składową równoległą do pow. więzów mówimy o więzach *szorstkich*.

Siły oporu np. tarcie zaliczamy do sił zewnętrznych.

Dodatek matematyczny: pochodne cząstkowe

Niech f jest funkcją wektora położenia r i czasu t: f=f(r, t)

Definicja pochodnej cząstkowej po jednej ze składowych r :

$$\frac{\partial f}{\partial r_k} = \lim_{\delta r_k \to 0} \frac{f\left(r_1, \ldots . r_k + \delta r_k, \ldots t\right) - f\left(r_1, \ldots . r_k, \ldots t\right)}{\delta r_k}$$

Analogicznie definiujemy cząstkową pochodną po czasie

Pochodną cząstkową obliczamy więc tak, jakby f była tylko funkcją jednej zmiennej r_k, pozostałe zmienne traktujemy jako parametry.