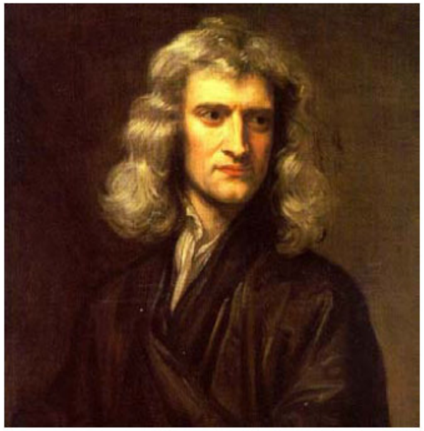
III.4 Ruch względny w przybliżeniu nierelatywistycznym. Obroty.

- Newtonowskie absolutna przestrzeń i absolutny czas. Układy inercjalne
- Obroty Układów Współrzędnych
- Opis ruchu w UO obracających się względem siebie z pewną prędkością kątową ω
- Ruch na obracającej się Ziemi

Newtonowska absolutna przestrzeń i absolutny czas



Isaac Newton

W końcu XVII w Izaak Newton postulował istnienie niezależnych od siebie absolutnej przestrzeni (euklidesowej) i absolutnego czasu.

„Zasady matematyczne filozofii naturalnej" (1687):

„Czas absolutny, prawdziwy i matematyczny, sam z siebie i przez swą naturę upływa równomiernie bez związku z czymkolwiek zewnętrznym i inaczej nazywa się trwaniem...

Przestrzeń absolutna, przez swą naturę, bez związku z czymkolwiek zewnętrznym, pozostaje zawsze taka sama i nieruchoma..."

Newtonowska absolutna przestrzeń i absolutny czas cd.

Te postulaty stanowiły istotną część struktury mechaniki klasycznej. Podkreślając ich znaczenie w strukturze mechaniki klasycznej i poznania ludzkiego w ogóle, żyjący w XVIII w. filozof Immanuel Kant zakwalifikował istnienie absolutnego czasu i absolutnej przestrzeni do zdań syntetycznych a priori.

Matematycznym wyrazem niezależności przestrzeni i czasu jest niezmienniczość długości dowolnego odcinka Δr i dowolnego odstępu czasu Δt względem transformacji Galileusza, granicznej postaci transformacji Lorentza dla małych prędkości względnych układów.

Przestrzeń absolutna a pierwsza zasada dynamiki Newtona

I zasada dynamiki:

„Każde ciało trwa w swym stanie spoczynku lub ruchu prostoliniowego i jednostajnego jeżeli siły przyłożone nie zmuszają ciała do zmiany tego stanu."

Ciało „spoczywa" w absolutnej przestrzeni Newtona.

I zasada to postulat istnienia wyróżnionej klasy układów odniesienia- układów inercjalnych (UI), połączonych ze sobą transformacjami Galileusza.

Transformacja obrotu i układy obracające się

Będziemy mieli do czynienia z dwiema sytuacjami:

• Dwa UW w tym samym (inercjalnym) UO mają wersory baz obrócone względem siebie. Jak opisywać ten sam wektor w obu układach? Jest to problem matematyczny.

• Dwa UO (i UW) obracają się względem siebie z pewną prędkością kątową $\vec{\omega}$. Jakie konsekwencje dla opisu ruchu w obu UO niesie obrót? Jeżeli jeden z UO jest inercjalny to drugi, obracający się względem niego, już nie jest inercjalny.

Jest to problem fizyczny; w układzie obracającym się względem układu inercjalnego pojawiają się dodatkowe przyspieszenia tzw. przyspieszenia pozorne.

Obroty układów współrzędnych_ sformułowanie matematyczne

UW opisywany jest przez zbiór wersorów bazy $\{\hat{e}_i$, i=1,3}, zaś UW' jest obrócony względem niego i opisywany zestawem wersorów bazy $\{\hat{e}'_i$, i=1,3}. Początki układów pokrywają się. Pomiędzy wersorami baz zachodzi liniowa transformacja ortogonalna, opisywana macierzą ortogonalną R:

$$\hat{e}'_i = R_{ij}\hat{e}_j$$

$$\hat{e}_j = R^{-1}{}_{ji}\hat{e}'_i$$

Uwaga: we wzorach stosujemy konwencję sumacyjną- sumujemy po powtarzających się wskaźnikach

$$R_{ij}R^{-1}{}_{jm} = \delta_{im} = R^{-1}{}_{ik}R_{km} = R_{ki}R_{km}$$

Obroty układów współrzędnych_ sformułowanie matematyczne cd.

Macierz obrotów wyraża się przez cosinusy kierunkowe wersorów $\hat{e}'_i$**:**

$$R : \{\hat{e}'_i\} \rightarrow \{\hat{e}_j\} \qquad R^{-1} : \{\hat{e}_j\} \rightarrow \{\hat{e}'_i\}$$

$$R_{ij} = \left(\hat{e}'_i \cdot \hat{e}_j\right)$$

$$R^{-1}{}_{ij} = R^{T}{}_{ij} = R_{ji}$$

Macierze obrotu cd...

Wektor *A* może być opisywany przez swoje współrzędne w UW lub w UW':

$$\vec{A} = A_i \hat{e}_i$$

$$\vec{A} = A'_j \hat{e}'_j$$

Wzory na transformacje współrzędnych wektora *A*

$$\vec{A} = A_k \hat{e}_k$$

$$\vec{A} = A'_j \hat{e}'_j = A'_j \left(R_{jk} \hat{e}_k \right) = \left(A'_j R_{jk} \right) \hat{e}_k$$

$$A_k = R_{jk} A'_j = R^{-1}{}_{kj} A'_j$$

$$A'_k = R_{km} A_m$$

Tworzenie 3-wymiarowej macierzy obrotu z macierzy obrotów 2 –wymiarowych. Kąty Eulera

Macierze obrotu dookoła osi OZ, OX,OY o kąty θ_i:

$$R_1 = \begin{pmatrix} \cos\theta_1 & \sin\theta_1 & 0 \\ -\sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 & s_1 & 0 \\ -s_1 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Kąty θ_i nazywamy kątami Eulera

$$R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & s_2 \\ 0 & -s_2 & c_2 \end{pmatrix}; \qquad R_3 = \begin{pmatrix} c_3 & 0 & s_3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_3 & 0 & c_3 \end{pmatrix}$$

Składając trzy obroty R_i możemy uzyskać dowolny obrót:

$$R(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = R_3 R_2 R_1$$

Lemat: pochodna wersora bazy obracającej się

Niech układ współrzędnych U′ obraca się z prędkością kątową ω względem pewnego układu inercjalnego U. Pochodne wersorów bazy U′ są prostopadłe do wersorów bazy i do wektora ω.

Zachodzi następujący oczywisty związek:

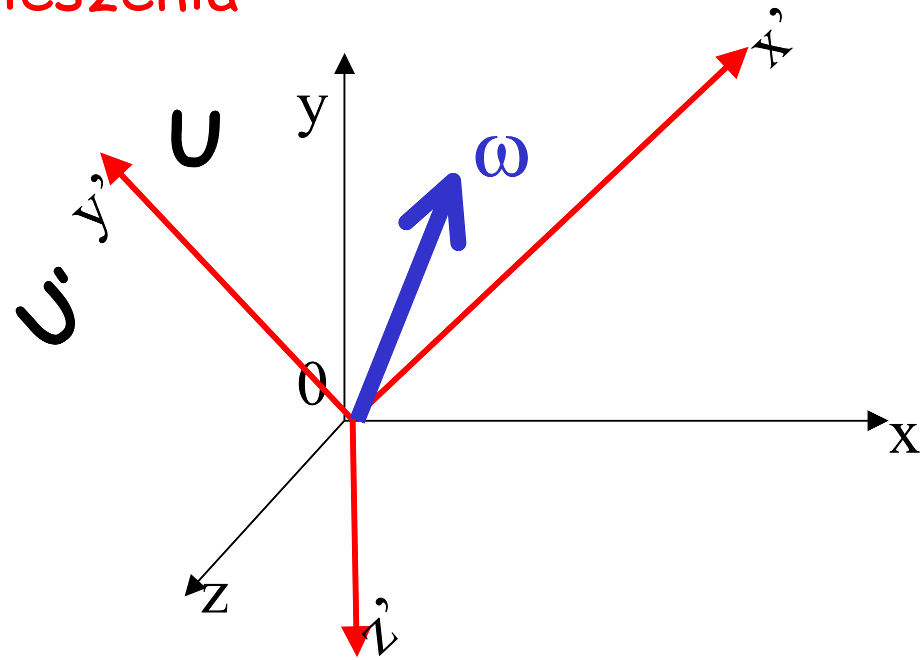
$$\frac{d\hat{e}'}{dt} = \vec{\omega} \times \hat{e}'$$

Układy obracające się: transformacja prędkości i przyspieszenia

Układ U′ obraca się względem inercjalnego układu U.

Dowolny wektor możemy wyrazić albo w U albo w U′:

$$\vec{A} = A_i \hat{e}_i = A'_k \hat{e}'_k = \vec{A}'$$



Obliczając pochodne znajdujemy:

$$\frac{d\vec{A}'}{dt} = \frac{dA'_k}{dt}\hat{e}'_k$$

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(A'_k \hat{e}'_k\right) = \frac{d\vec{A}'}{dt} + A'_k \frac{d\hat{e}'_k}{dt} = \frac{d\vec{A}'}{dt} + \vec{\omega}\times\vec{A}'$$

Układy obracające się: transformacja prędkości i przyspieszenia cd.

Zastosujemy w/w wzory do wektorów prędkości i przyspieszenia punktu materialnego:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{V} + \vec{v}\,' + \vec{\omega} \times \vec{r}\,'$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{A} + \vec{a}\,' + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}\,' + 2\vec{\omega} \times \vec{v}\,' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}\,')$$

$$\vec{a}\,' = \vec{a} - \vec{A} - \vec{\varepsilon} \times \vec{r}\,' + 2\vec{\omega} \times \vec{v}\,' - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}\,')$$

Na czerwono zaznaczyliśmy t.zw. przyspieszenia pozorne , działające w układzie nieinercjalnym

Dla większej ogólności dodaliśmy: prędkość unoszenia U' wzgl. U-**V** oraz przyspieszenie unoszenia **A.**

Przyspieszenia pozorne związane z obrotami UO′ i działające w UO′

Przyspieszenie Coriolisa:

$$\vec{a}_C = -2\vec{\omega} \times \vec{v}'$$

Przyspieszenie odśrodkowe:

$$\vec{a}_{odsr} = -\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') = \omega^2 \vec{r}'_{\perp}$$

Przyspieszenie związane z przyspieszeniem kątowym obrotu U′ względem U:

$$\vec{a}_\varepsilon = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}'$$

Przykład: ruch na obracającej się Ziemi

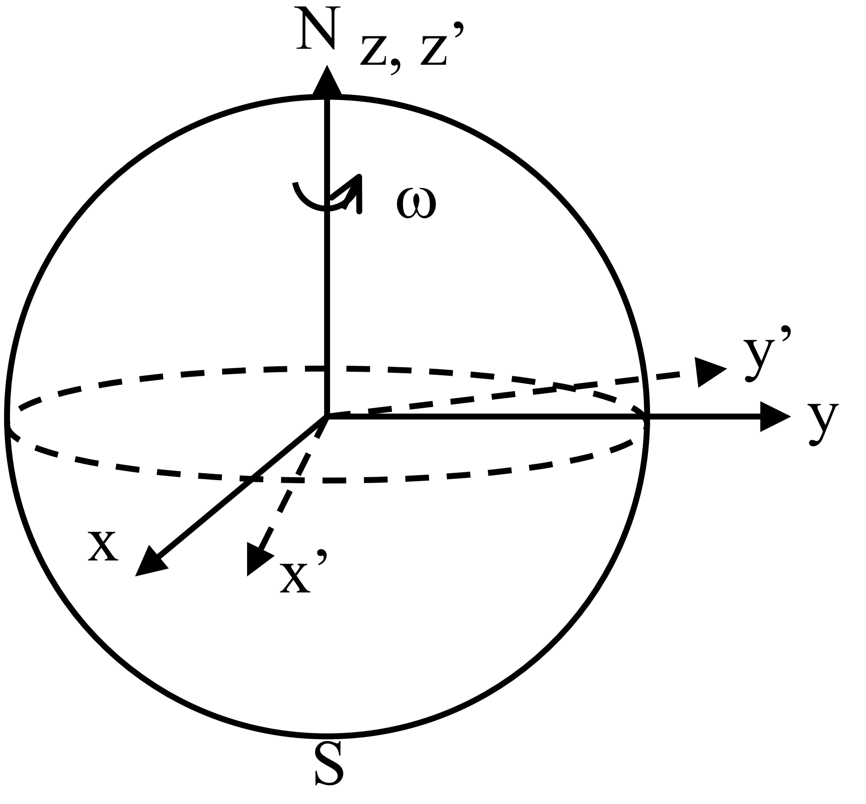
Założenie upraszczające: Ziemia jest kulą.

U inercjalny, początek w środku Ziemi (zaniedbujemy małą prędkość kątową Ziemi dookoła Słońca).

U′ obraca się razem z Ziemią.

Okres obrotu Ziemi (doba gwiazdowa): T=23^{h}56^{m}4^s.

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 7.292 \cdot 10^{-5}\ s^{-1}$$

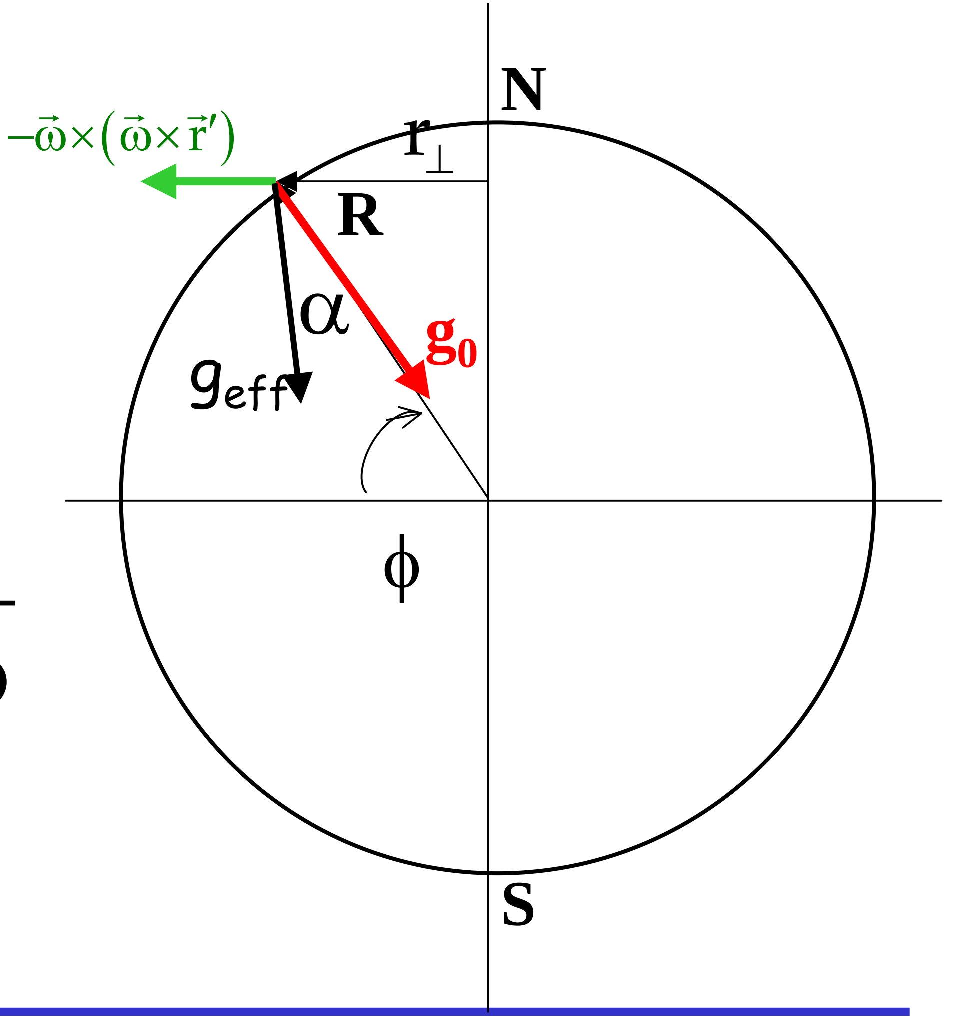


Kierunek przyspieszenia ziemskiego

Uwaga: kąty i wielkość przyspieszenia odśrodkowego są znacznie przesadzone.

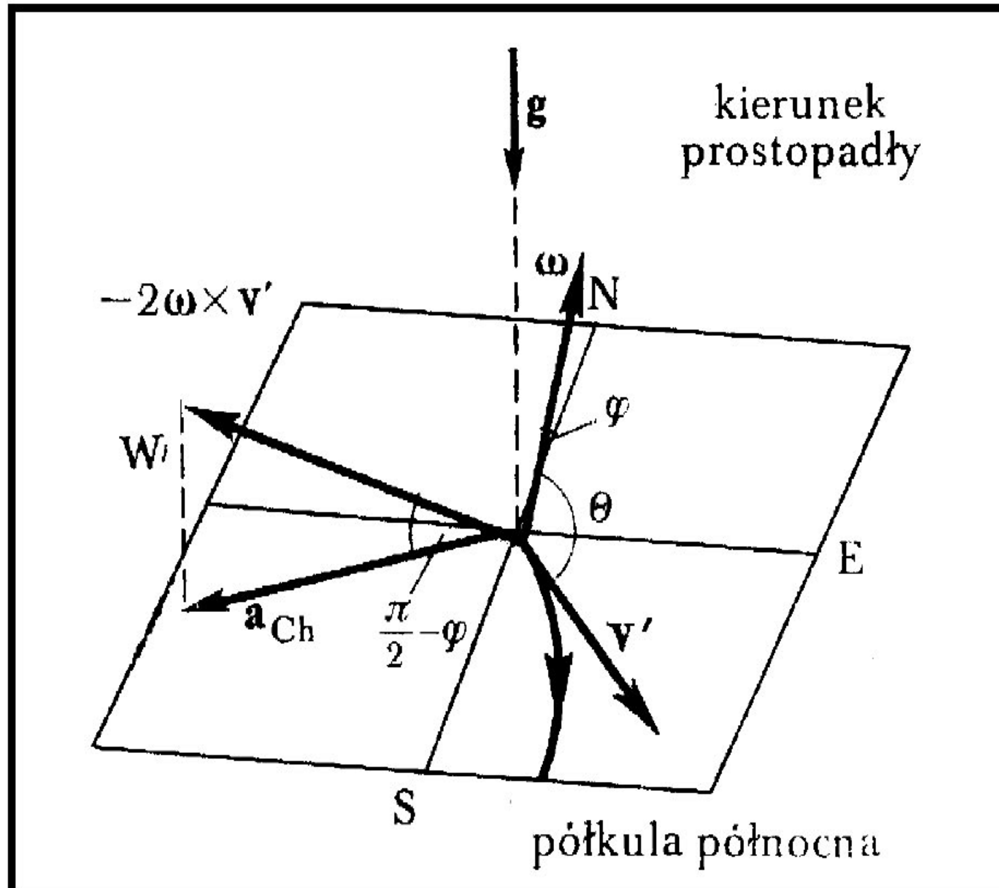
$$\vec{g}_{\mathrm{eff}} = \vec{g}_0 - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')$$

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{\omega^2 R \cos\phi \sin\phi}{g_0 - \omega^2 R \cos^2\phi}$$



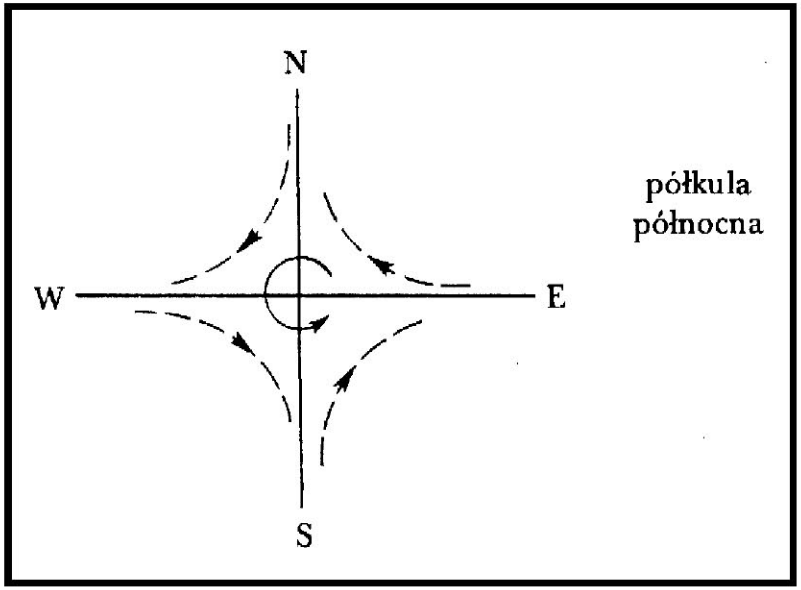
Przyspieszenie Coriolisa na Ziemi

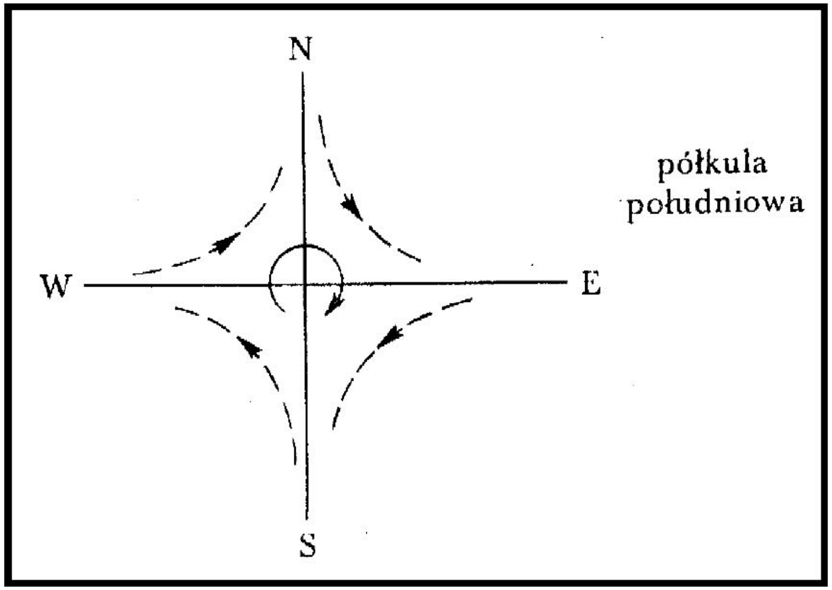
Na półkuli północnej składowa horyzontalna przyspieszenia Coriolisa powoduje skręcanie ciała w prawo.



Przyspieszenie Coriolisa na Ziemi cd.

Wirowy ruch cyklonów na Ziemi





Przyspieszenie Coriolisa na Ziemi cd.

Wahadło Foucaulta.

Dla obserwatora inercjalnego O płaszczyzna wahań pozostaje niezmienna, dla obserwatora O′ na Ziemi płaszczyzna wahań obraca się z częstością:

$$\omega = \omega_Z \sin\phi$$

W Warszawie ω=~12°/godz