В.Л.Васюков

КВАНТОВАЯ ЛОГИКА В ТОПОСАХ

В статье приводится конструкция топоса Set^E, где E - ортомодулярная решетка, позволяющая интерпретировать квантовые логики в топосах. Рассмотрена общезначимость и полнота в построенном топосе систем Р.Гольдблатта [4], Х.Нишимуры [7], Катленда-Гиббинса [3], Г.Хардегри [5] и Г.Кальмбах [6].

1. Ортомодулярность в топосах

Топосы, как известно, имеют интуиционистскую природу. Но означает ли это, что лишь системы классической и интуиционистской логик могут быть интерпретированы в топосах?

Исходным пунктом для построения интерпретации квантовой логики в топосах послужил тот факт, что для произвольной малой категории $\mathcal{C}$ категория $Set^{\mathcal{C}}$ функторов является топосом ([2. с. 219]). Анализ конструкции интерпретации интуиционистской логики в Set^P, где P - алгебра Гейтинга, наводит на мысль что в значительной степени здесь эксплуатируются чисто решеточные свойства, а это позволяет надеяться, что можно вместо алгебры Гейтинга использовать ортомодулярную решетку, которая определяет алгебраическую структуру подавляющего числа квантовых логик.

Если взять ортомодулярную решетку E, то как и всякая решетка она будет представлять собой конечно кополную категорию порядка. таким образом при построении категории $Set^{\mathcal{C}}$ можно взять в качестве $\mathcal{C}$ ортомодулярную решетку E, т.е. построить категорию Set^E.

Рассмотрим наследственные множества E. Для любого элемента p наследственное множество $[p)$ определяется равенством:

$$[p) = \{q : p \leq q\}.$$

Ортодополнение $\perp$ в E представляет собой инволютивную перестановку, причем $b^\perp \leq a^\perp$ всякий раз, когда $a \leq b$ $(a, b \in E)$. Как известно ([1. с. 76]), в ортомодулярной решетке каждый интервал $[a, b]$ является ортомодулярной решеткой, замкнутой относительно $\wedge$, $\vee$ и операции взятия относительного дополнения $c' = (a \vee c^\perp) \wedge b = a \vee (c^\perp \wedge b)$. В наследственных множествах верхняя граница интервала равна 1, поэтому $c' = (p \vee c^\perp) \wedge 1 = p \vee c^\perp$. Следовательно, множество E^+ наследственных множеств будет представлять собой множество ортомодулярных решеток.

Рассмотрим теперь решетку $E^{+} = (E^{+}, \subseteq)$ наследственных множеств. Чтобы превратить ее в ортомодулярную решетку, необходимо определить ортодополнение. В этом случае требуется, чтобы подобная процедура инволютивую операцию на E^{+}. Из определения ортодополнения следует, что если $c' = p \vee c^{\perp}$, то $c' \in [p)$. Естественно определять тогда $[p)'$ как множество c таких, что $c \in [p)$. В этом случае $p \leq c^{\perp}$, а это не что иное, как определение отношения ортогональности, поскольку оно задается требованием $a \perp b \Rightarrow a \leq b^{\perp}$. Как известно, отношение ортогональности представляет собой симметричное и иррефлексивное отношение.

Определим теперь $x \perp y$ тогда и только тогда, когда для любого $y \in Y$, $x \perp y$ и введем операцию * с помощью определения:

(1) $[p)^{*} = \{x: x \perp [p)\}$.

Множество X называется замкнутым относительно *, если $(X^{*})^{*} = X$.

Однако из определения (1) следует, что $[p)^{*} \neq \emptyset$, поскольку $I \in [p)$, а $x \perp 1$ если $x \leq \emptyset$, т.е. $x = \emptyset$. Чтобы избежать этого, модифицируем определение наследственного множества:

$[p) = \{q : p \leq q \;\&\; q \neq I\}$.

Подобные множества называются обычно квази-наследственными множествами, однако, чтобы не усложнять терминологию, сохраним за ними первоначальное имя. Нетрудно переформулировать все предыдущие результаты с учетом принятого определения.

1.1. Лемма. Решетка $E^{+} = (E^{+}, \subseteq, *)$ замкнутых относительно операции * наследственных множеств является ортомодулярной решеткой.

Доказательство. Частично упорядоченное множество наследственных множеств, упорядоченных по включению, является ограниченной дистрибутивной решеткой, пересечения и объединения которой задаются соответствующими теоретико-множественными операциями $\cap$ и $\cup$ ([2. С. 203]). Следовательно $(E^{+}, \subseteq)$ будет решеткой относительно $\cap$ и $\cup$. Тогда в силу замкнутости по *, симметричности и иррефлексивности отношения ортогональности $\perp$ соответственно $[p) \to [p)^{*}$ будет инволюцией, а $(E^{+}, \subseteq, *)$ – ортоерешеткой ([1. С. 164]). Поскольку всякая дистрибутивная решетка модулярна, а всякая модулярная орторешетка является ортомодулярной, то $(E^+, \subseteq, *)$ будет ортомодулярной решеткой.

Заметим, что полученная подобным образом орторешетка будет на самом деле представлять собой булеву алгебру ([1. с. 76]). Но можно определить E^+ и как недистрибутивную ортомодулярную решетку. Для этого воспользуемся следующим определением:

$$X \Cup Y = (X^* \cap Y^*)^*.$$

Как известно, в общем случае $(X^* \cap Y^*)^* > X \cup Y$ ([1.с. 167]). Нетрудно убедиться, что $((E^+, \subseteq, \cap, \Cup, *)$ представляет собой орторешетку. Необходимое и достаточное условие для ортомодулярности E имеет вид: если $[x) \subseteq [y)$ и $[x)^* \cap [y) = \emptyset$, то $[x) = [y)$ ([1.с. 77]). Доказательство выполнимости этого условия в E^+ можно найти в [8. с. 171]. Фактически мы получили конструкцию, двойственную к вложению Яновица ([8. с. 173]).■

Здесь и в дальнейшем знак ■ будет означать конец доказательства. Заметим, что в доказательстве леммы 1.1 фактически фигурируют две решетки E_1^+ и E_2^+, первая из которых дистрибутивна, а вторая - недистрибутивна. В последующем изложении под E^+ подразумевается вторая из них.

1.2. Лемма. Решетка $[p)^+$, образоваанная всеми наследственными в $[p)$ множествами, замкнутыми относитеьно $*$, является ортомодулярной решеткой.

Доказательство. Достаточно определить $[c)^* = [c)^* \cap [p)$. Тогда относительно этой операции интервал $[\emptyset, [p)]$ будет представлять собой ортомодулярную решетку [1. 76].

При построении категории Set^E функтор $\Omega : E \to Set$ определяет множество $\Omega(p) = \Omega_p$ как множество p-решеток, представляющих собой некоторое подмножество S множества $E_p = \{f:$ для некоторого q стрелка $p \to q$ принадлежит $E\}$, замкнутое относительно левого умножения, т.е. если $f \in S$, а $q : q \to r$ - произвольная E - стрелка, то $q \circ f \in S$. Отождествляя $f : p \to q$ с ее концом q, получаем E_p как множество $\{q : p < q\} = [p)$ и $\Omega_p = [p)^+$.

Пусть F_p обозначает значения значения $f(p)$ функтора $F: E \to Set$ на объекте p. Для любых p и q, таких что $p < q$, функтор F определяет функцию из F_p в F_q, обозначаемую через F_{pq}. Тогда для p и q, таких что $p < q$, функция $\Omega_{pq} : \Omega_p \to \Omega_q$ сопоставляет каждому $S \in [p)^+$ множество $S_q = S \cap [q) \in [q)^+$, т.е. $\Omega_{pq}(S) = S_q$.

Конечным объектом категории Set^E служит постоянный функтор $I:E \to Set$, определяемый условием $I_p = \{0\}$ для $p \in E$ и $1_{pq} = id_{\{0\}}$ при $p \leq q$. Классификатором подобъектов $true : 1 \dot{\to} \Omega$ является естественное преобразование, p-я компонента которого $true_p : \{0\} \to \Omega_p$ определяется равенством $true_p(0) = [p)$, т.е. функция true выбирает наибольший элемент из каждой ортомодулярной решетки вида $[p)^+$.

Если $\tau : F \dot{\to} G$ - произвольный подобъект Set^E - объекта G, тогда каждая компонента τ_p инъективна и можно считать ее функцией включения $F_p \hookrightarrow G_p$. P -я компонента $(X_\tau)_p : G_p \to [p)^+$ характеристической стрелки $X_\tau : G \dot{\to} \Omega$ определяется равенством

$$(X_\tau)_p\ (x) = \{q : p \leq q \ \&\ G_{pq}(x) \in F_q\}$$

для каждого $x \in G_p$. Выполнимость Ω - аксиомы получаем так же, как и в случае алгебры Гейтинга ([2. C. 231]), так как при этом используются лишь решеточные свойства наследственных множеств.

Начальный объект $0: e \to Set$ в категории Set^E будет представлять собой функтор, такой, что $0_p = \emptyset$ и $0_{pq} = id_\emptyset$ для $p \leq q$. Компонентами естественного преобразования $0 \dot{\to} 1$ являются включения $\emptyset \hookrightarrow \{0\}$. Стрелка false по определению является характеристической стрелкой подобъекта $! : 0 \to 1$. Для ее компоненты $false_p : \{0\} \to \Omega_p$ имеем

$false_p(0) = \{q:p \leq q$ и $1_{pq}(0) \in 0_{pq}\} = \{q:p \leq q$ и $0 \in \emptyset\} = \emptyset$.

Следовательно, естественное преобразование false выбирает нулевой элемент из каждой ортомодулярной решетки $[p)^+$. Стрелка false мономорфна.

Отрицание можно определить теперь как стрелку $\neg:\Omega \dot{\to} \Omega$, являющуюся характеристической стрелкой подобъекта false. Если отождествить $false_p$ с включением $\{\emptyset\} \subseteq \Omega_p$, то p-я компонента $\neg_p : \Omega_p \to \Omega_p$ отрицания удовлетворяет равенствам

$\neg p(S) = \{q:p \leq q$ и $\Omega_{pq}(S) \in \{\emptyset\}\} = \{q:p \leq q$ и $S \cap [q) = \emptyset\}$
$= [p) \cap S^* = S^*_p$.

Таким образом ортодополнение в $[p)^+$ совпадает с p-й компонентой истинностной стрелки отрицания в Set^E.

Конъюнкция и дизъюнкция определяется как и в случае алгебры Гейтинга ([2. C. 235]). Для p-й компоненты $\langle true, true\rangle_p : \{0\} \to \Omega_p \times \Omega_p$ Set^E -стрелки $\langle true, true\rangle : 1 \to \Omega \times \Omega$ справедливо равенство $\langle true, true\rangle_p (0) = \langle [p), [p)\rangle$. Конъюнкция $\cap$:

$\Omega \times \Omega \to \Omega$ является характеристической стрелкой для <true, true>. Ее p-я компонента $\cap_p : \Omega_p \times \Omega_p \to \Omega_p$ удовлетворяет равенству

$\cap_p(<S, T>) = \{q: p \leq q$ и $<\Omega_{pq}(S), \Omega_{pq}(T)> = <[q), [q)>\} = S \cap T$.

В рассматриваемых в дальнейшем системах квантвой логики дизъюнкция не относится к числу примитивных связок, поэтому ее определение можно опустить.

2. Общезначимость в Set^E: системы Гольдблата, Нишимуры, и Катленда-Гиббинса

Р.Гольдблатт в своей работе "Семантический анализ ортологики" ([4]) рассматривает логику не как множество правильно построенных формул, но как собрание их упорядоченных пар, удовлетворяющих определенному условию замыкания (т.е. фактически рассматривает заданное некоторое отношение выводимости). Логики такого типа он называет бинарными. Они характеризуются классом орто-, ортомодулярных решеток в том смысле, что $A \vdash B$, если и только если $v(A) \leq v(B)$, где v есть функция из множества правильно построенных формул в орторешетку, для которой связки $\neg$ и $\wedge$ интерпретируются как ортодополнение и решеточное пересечение соответственно. Построенная им система ортологики O, характеризуемой классом орторешеток, определяется следующей аксиоматикой:

Аксиомы. (1) $\alpha \vdash \alpha$

(2) $\alpha \wedge \beta \vdash \alpha$

(3) $\alpha \wedge \beta \vdash \beta$

(4) $\alpha \vdash \neg\neg\alpha$

(5) $\neg\neg\alpha \vdash \alpha$

(6) $\alpha \wedge \neg\alpha \vdash \beta$

Правила вывода. (7) $\dfrac{\alpha \vdash \beta \quad \beta \vdash \gamma}{\alpha \vdash \gamma}$ (8) $\dfrac{\alpha \vdash \beta \quad \alpha \vdash \gamma}{\alpha \vdash \beta \wedge \gamma}$

(9) $\dfrac{\alpha \vdash \beta}{\neg\beta \vdash \neg\alpha}$

В приведенной формулировке $\alpha \vdash \beta$ означает, что β выводима из α. Это обозначение можно расширить до $\Gamma \vdash \alpha$, где Γ является множеством правильно построенных формул, полагая, что $\Gamma \vdash \alpha$, если и только если для некоторых $\beta_1, \ldots, \beta_n \in \Gamma$ имеем $\beta_1 \wedge \ldots \wedge \beta_n \vdash \alpha$.

Если использовать определение $\alpha \vee \beta \doteq \neg(\neg\alpha \wedge \neg\beta)$, то от ортологики O можно перейти к квантовой ортологике OM, характеризуемой классом ортомодулярных решеток, путем присоединения к O дополнительной аксиомы

(10) $\alpha \wedge (\neg\alpha \vee (\alpha \wedge \beta)) \vdash \beta$

Х. Нишимура ([7]), расценивая бинарное отношение выводимости Гольдблатта как аналог естественного вывода Генцена, развил аналогичные секвенциальные системы GO для ортологики и GOM для квантовой ортологики со связками $\wedge$ и $\neg$. Его формулировка системы GO имеет следующий вид:

Аксиомы. $\alpha \to \alpha$

Правила вывода. $\dfrac{\Gamma \to \Delta}{\Pi,\ \Gamma \to \Delta,\ \Sigma}$ (ослабление)

$$\frac{\Gamma_1 \to \Delta_1,\ \alpha \qquad \alpha,\ \Gamma_2 \to \Delta_2}{\Gamma_1,\ \Gamma_2 \to \Delta_1,\ \Delta_2} \quad \text{(сечение)}$$

$$\frac{\alpha,\ \Gamma \to \Delta}{\alpha \wedge \beta,\ \Gamma \to \Delta} \qquad \frac{\beta,\ \Gamma \to \Delta}{\alpha \wedge \beta,\ \Gamma \to \Delta} \quad (\wedge \to)$$

$$\frac{\Gamma \to \Delta,\ \alpha \qquad \Gamma \to \Delta,\ \beta}{\Gamma \to \Delta,\ \alpha \wedge \beta} \quad (\to\wedge)$$

$$\frac{\Gamma \to \Delta,\ \alpha}{\neg\alpha,\ \Gamma \to \Delta} \quad (\neg\to) \qquad \frac{\Gamma \to \Delta}{\neg\Delta \to \neg\,\Gamma} \quad (\to\neg)$$

$$\frac{\alpha,\ \Gamma \to \Delta}{\neg\neg\alpha,\ \Gamma \to \Delta} \quad (\neg\neg\to) \qquad \frac{\Gamma \to \Delta,\ \alpha}{\Gamma \to \Delta,\ \neg\neg\,\alpha} \quad (\to\neg\neg)$$

Секвенциальная система GOM получается из GO в результате добавления следующего правила

$$\frac{\neg\beta \to \neg\alpha \qquad \neg\alpha,\ \beta \to}{\neg\alpha \to \neg\beta} \quad \text{(OM)}$$

В GO и GOM не устранимо сечение, однако справедливо утверждение: если выводима секвенция $\Gamma \to \Delta$, то выводима некоторая секвенция $\Gamma \to \Delta$, где $\alpha \in \Delta$.

Однако секвенциальное исчисление Нишимуры имеет два недостатка:

1) в квантовой логике связки $\wedge$ и $\vee$ обычно двойственны, а в исчислении Нишимуры - нет (секвенциальное исчисление является двойственным тогда и только тогда, когда для всех конечных Γ и Δ $\vdash \Gamma \to \Delta$ тогда и только тогда, когда $\vdash \Delta^* \to \Gamma^*$, где для формулы α получаем α^* путем замены вхождения $\wedge$ на $\vee$ и наоборот; для множества Γ получаем двойственное в виде $\Gamma^* = \{\gamma^*\colon \gamma \in \Gamma\}$ и следует учесть, что такая замена в случае квантовых логик предполагает выбор одной из связок $\wedge$, $\vee$ в качестве примитивной);

2) это исчисление не регулярно в том смысле, что $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n \to \Delta_1, \ldots, \Delta_m$ тогда и только тогда, когда $\Gamma_1 \wedge \ldots \wedge \Gamma_n \to \Delta_1 \vee \ldots \vee \Delta_m$.

Н.Дж.Катленд и П.Ф.Гиббинс ([3]) предложили в 1982 г. регулярное секвенциальное исчисление для квантовой логики, свободное от указанных недостатков, в котором, в отличие от исчисления Нишимуры, не допустимо обычное правило сечения.

Аксиоматика системы GO$^+$, представляющей собой расширение системы GO Нишимуры, выглядит следующим образом:

Аксиомы. $\alpha \to \alpha$

Правила вывода.

$$\frac{\Gamma \to \Delta}{\theta,\ \pi \to \Delta,\ \Sigma} \qquad \text{(ослабление)}$$

$$\frac{\pi \to \alpha,\ \Delta_1 \qquad \alpha \to \Delta_2}{\pi \to \Delta_1,\ \Delta_2} \qquad \text{(сечение-1)}$$

$$\frac{\pi_1 \to \alpha \qquad \pi_2,\ \alpha \to \Delta}{\pi_1,\ \pi_2 \to \Delta} \qquad \text{(сечение-2)}$$

$$\frac{\alpha,\ \pi \to \Delta}{\alpha \wedge \beta,\ \pi \to \Delta}\ (\wedge\to) \qquad \frac{\beta,\ \pi \to \Delta}{\alpha \wedge \beta,\ \pi \to \Delta}\ (\wedge\to)$$

$$\frac{\pi \to \alpha \qquad \pi \to \beta}{\pi \to \alpha \wedge \beta} \qquad (\to\wedge)^+$$

$$\frac{\alpha \to \Delta \qquad \beta \to \Delta}{\alpha \vee \beta \to \Delta} \qquad (\vee\to)^+$$

$$\frac{\pi \to \Delta,\ \alpha}{\pi \to \Delta,\ \alpha \vee \beta}\ (\to\vee)^+ \qquad \frac{\pi \to \Delta,\ \beta}{\pi \to \Delta,\ \alpha \vee \beta}\ (\to\vee)^+$$

$$\frac{\pi \to \alpha}{\pi,\ \neg\alpha \to} \qquad (\neg\to)^+$$

$$\frac{\pi \to \Delta}{\neg\Delta \to \neg\pi} \qquad (\to\neg)^+$$

$$\frac{\alpha,\ \pi \to \Delta}{\neg\neg\alpha,\ \pi \to \Delta}\ (\neg\neg\to)^+ \qquad \frac{\pi \to \Delta,\ \alpha}{\pi \to \Delta,\ \neg\neg\alpha}\ (\to\neg\neg)^+$$

Знаком + здесь отмечены специфические для GO$^+$ правила. Система GO$^+$M квантовой логики получается путем добавления правила ортомодулярности Нишимуры, т.е. собой систему GO$^+$M = GO$^+$ + (OM).

Семантика всех рассмотренных исчислений описывается с помощью понятий орто-, квантовых шкал и моделей.

2.1. Определение. Ортошкала представляет собой пару $\langle X, \perp\rangle$, где (1) X является непустым множеством;

(2) $\perp$ есть отношение ортогональности на X, т.е. $\perp \subset X \times X$ симметрично и иррефлексивно.

2.2. Определение. Ортомодель есть тройка $\langle X, \perp, v\rangle$, где
(1) $\langle X, \perp\rangle$ есть ортошкала;
(2) v есть функция, ставящая в соответствие каждой пропозициональной переменной α

* - замкнутое подмножество $v(\alpha) \subseteq X$.

2.3. Определение. Квантовая шкала есть тройка $\langle X, \perp, \Psi\rangle$, где (1) $\langle X, \perp\rangle$ есть ортошкала;

(2) Ψ есть непустое множество $*$-замкнутых подмножеств X, таких, что (а) Ψ замкнуто относительно теоретико-множественного пересечения и операции $*$;
(в) для любых γ, $Z \in \Psi$, $\gamma \subseteq Z$ и $\gamma^* \cap Z = \emptyset$ влечет $\gamma = Z$.

2.4. Определение. Квантовая модель есть четверка $<X, \perp, \Psi, v>$, (1) $<X, \perp, \Psi>$ есть квантовая шкала;

(2) v есть функция, ставящая в соответствие переменной α $*$ - замкнутое подмножество $v(\alpha)$ из Ψ.

Нетрудно видеть, что в роли семейства Ψ ортогонально замкнутых подмножеств X можно брать ортомодулярную решетку E^+, тем более, что условие (в) из определения 2.3 выполнимо в E^+ (это следует из того факта, что в орторешетках условие $a \leq b$ & $a^\perp \wedge b = 0 \Rightarrow a = b$ является необходимым и достаточным условием ортомодулярности ([1. С. 77]).

Определим теперь квантовую модель $M = <E^+, v>$ с квантовой шкалой E^+ (здесь E^+ заменяет запись $<E, \perp, E^+>$, где $v: F \to E^+$ - некоторая E - оценка, а F - множество пропозициональных формул. Используя v, определяем теперь Set^E-оценку $v': F \to Set^E(1, \Omega)$. Функция v' сопоставляет каждой пропозициональной букве π истинное значение $v'(\pi): 1 \to \Omega$ в Set^E. Компонента $v'(\pi)_p : \{0\} \to \Omega_p$ этого истинностного значения определяется равенством:

$$(*) \quad v'(\pi)_p\ (0) = v(\pi) \cap [p) = v(\pi)_p .$$

Фактически $v'(\pi)_p$ собирает все точки из $[p)$, в которых π истинно в M.

Если $p \leq q$, то $v(\pi)\ [p) \cap [q) = v(\pi) \cap [q)$. Отсюда получаем коммутативность диаграммы

$$\begin{tikzcd}
\{0\} \arrow[r, "v'(\pi)p"] \arrow[d] & {[p)^+} \arrow[d] \\
\{0\} \arrow[r, "v'(\pi)q"] & {[q)^+}
\end{tikzcd}$$

откуда явствует, что $v'(\pi)$ - естественное преобразование.

Пусть теперь $v(\alpha) = v(\alpha) \cap [p)$.

2.5. Лемма. Для произвольной $\alpha \in F$ p-я компонента $v'(\alpha)_p : \{0\} \to [p)^+$ естественного преобразования $v'(\alpha)$ удовлетворяет равенству $v'(\alpha)p\ (0) = v(\alpha)p$.

Доказательство. Ведется индукцией по построению формулы α. Пусть $\alpha = \neg\beta$ и для β лемма справедлива. Тогда $v'(\neg\beta)_p = (\neg_O v'(\beta))_p = \neg_p \circ v'(\beta)_p$. Следовательно $v'(\alpha)_p(0) = \neg_p\ (v'(\beta)_p\ (0))$
$= \neg p\ (v(\beta)_p)$ (по индуктивному определению)
$= (v(\beta))^*_p$ (по определению стрелки отрицания)
$= v(\neg\beta)_p = v(\alpha)_p$ (по определению оценки в квантовой шкале).
Что касается $\wedge$, то здесь доказательство ничем не отличается от случая алгебры Гейтинга ([2. с.2381]), а $\vee$ не относится к числу основных связок ибо вводится по определению (см. доказательство леммы 1.1). Остается лишь случай секвенции, т.е. $\alpha = \Gamma \to \Delta$ для системы Нишимуры и Катленда-Гиббинса (для системы Гольдблатта доказуемо, что если $\vdash\Gamma \to \alpha$ в GOM, GO^+M, то $\Gamma\vdash\alpha$ в OM). Для этих систем для секвенции $\Gamma \to \Delta$ требуется, чтобы $v(\Gamma \to \Delta) = \bigcap_{\alpha\in\Gamma} v(\alpha)$. Тогда $v'(\Gamma \to \Delta)$ будет определяться как $v'(\wedge U) = v'(\wedge_{\alpha\in\Gamma}\alpha)$. Поскольку множество наследственных множеств замкнуто относительно пересечения, получаем существование подобной оценки на E^+. ■

2.6. Следствие. Если $Set^E \vDash \alpha$, то $E^+ \vDash \alpha$.

Доказательство. Так как $Set^E \vDash \alpha$, то $v'(\alpha) = true$. Следовательно для любого p имеет место $v'(\alpha)_p = true_p(0) = [p)$; так как $p \in [p)$, то лемма 2.5 дает $p \in v(\alpha)_p \leqslant v(\alpha)$. Ввиду произвольности p получаем $v(\alpha) = E$. Поскольку E выбрана произвольно, то α тождественно истина на E. ■

Определим теперь E-оценку $v: F \to E^+$, отталкиваясь от Set^E оценки $v': F \to Set^E(1, \Omega)$. Стрелка $v'(\pi): 1 \to \Omega$ выбирает для каждого $q \in E$ наследственное подмножество $v'(\pi)_q\ (0)$ множества $[q)$. Определим $v(\pi)$ как объединение всех этих подмножеств:

$$v(\pi) = \cup\ \{v'(\pi)_q(0):\ q \in E\},$$ иначе

(**) $r \in v(\pi)$ тогда и только тогда, когда (для некоторого q) $r \in v'(\pi)_q(0)$.

2.7. Лемма. Для произвольного $p \in E$ имеем $v(\pi) \cap [p) = v'(\pi)_p(0)$, где $v(\pi)$ определяется условием (**).

Доказательство. То же, что и в [2, 239]. ■

Пусть v - произвольная E - оценка и v' - оценка, определяемая равенством (*), т.е. $v'(\pi)_p(0) = v(\pi)_p$. Тогда в силу полноты решетки E^+ имеет место равенство

$$\cup\{v'(\pi)_p(0): p \in E\} = \cup\{v(\pi)_p: p \in E\} = v(\pi).$$

Следовательно, применение (**) к v' приводит к v. Этот факт вместе с леммой 2.7 показывает, что определения (*) и (**) взаимно обратны и устанавливают биекцию между E^+-оценками и Set^E -оценками. Можно считать, что оценка v в лемме 2.5 получается из оценки v', фигурирующей в этой же лемме, по определению (**).

2.8. Следствие. Если $E^+ \models \alpha$, то $Set^E \models \alpha$.

Доказательство. Так как $E^+ \models \alpha$, то $v(\alpha) = E$, и, следовательно, для произвольного p $v(\alpha)_p = v(\alpha) \cap [p) = true_p$ (0). По лемме 2.5 $v'(\alpha)_p(0) = true_p(0)$, следовательно $v'(\alpha) = true$ в силу произвольности выбора p.

2.9. Теорема. Для произвольной ортомодулярности решетки E и пропозициональной формулы α имеет место $Set^E \models \alpha$ тогда и только тогда, когда $E^+ \models \alpha$.

Доказательство. Следует из 2.6 и 2.8. ■

2.10. Теорема. Если произвольная пропозициональная формула (секвенция) Set^E-общезначима, то она выводима в исчислениях квантовой ортологии Гольдблатта, Нишимуры и Катленда-Гиббинса.

Набросок доказательства. Отождествляя соответствующую каноническую шкалу, упорядоченную по включению с E^+, получаем $\vdash\alpha$ тогда и только тогда, когда $E^+ \models \alpha$. Отсюда по теореме 2.9 получаем, что $\vdash\alpha$ тогда и только тогда, когда $Set^E \models \alpha$.

3. Общезначимость в Set : стрелка Сасаки как импликация в квантовой логике (система Г.Хардегри)

В ортомодулярной решетке введение импликации как полинома решетки неудовлетворительно по многим причинам. Во всяком случае классическое определение импликации $a \to b = a^\perp \vee b$ здесь он не годится, что заставляет либо вообще отказаться от полиномиального определения (как в системах предыдущего параграфа), либо использовать модификацию классического определения. Одной из наиболее популярных модификаций является введение так называемой "стрелки Сасаки" (иначе "квазиимпликации"), вводимой следующим определением:

(SH) $a \to b - a^\perp \vee (a \wedge b)$

Стрелка Сасаки обладает следующими интересными свойствами ([5, 4]):

(c1) если $a \leq b$, то $a \to b = 1$

(c2) $a \wedge (a \to b) \leq b$

(c3) $b^\perp \wedge (a \to b) \leq a^\perp$

(c4) $a \wedge b^\perp \leq (a \to b)^\perp$

(c5) существует бинарная операция $+$, такая, что для любых a, b, c $a + b \leqslant c$ тогда и только тогда, когда $a \leqslant b \to c$. Операция $+$ может быть определена в ортомодулярной решетке следующим равенством:

(S) $a + b = (a \vee b^{\perp}) \wedge b$

В булевой алгебре Гейтинга подобная операция обычно совпадает с $\wedge$ и в этом случае (c5) позволяет определить экспоненцирование в них, когда они рассматриваются как конечно кополные категории порядка. В этом случае категорно алгебра Гейтинга и булева алгебра превращаются в декартово замкнутые конечно кополные категории порядка.

Однако нетрудно видеть, что и в ортомодулярной решетке можно определить экспоненцирование для стрелки Сасаки.

3.1. Лемма. Категорно ортомодулярная решетка является декартово замкнутой конечно кополной категорией порядка.

Доказательство. В качестве экспоненциала берем стрелку Сасаки из определения (SH). Стрелка значения $ev : b^a \times a \to b$ определяется по (c2). Из (c5) получаем, что для любой стрелки $g : c + a \to b$ существует стрелка $\hat{g} : c \to b^a$ (здесь $+$ – операция из (S)). Но $c \leqslant a \to b$ влечет $c \wedge a \leqslant a \wedge a \to b$ (изотонность отношения $\leqslant$), следовательно существование $\hat{g}$ влечет существование стрелки $c \times a \to b^a \times a$. По свойству $\vee$ имеем $c \leqslant c \vee a^{\perp}$, тогда в силу изотонности отношения $\leqslant$ имеем $c \wedge a \leqslant (c \vee a)^{\perp} \wedge a$, но категорно это определяет стрелку $c \times a \to c + a$.

Фактически получена диаграмма:

$$\begin{tikzcd}
b^a \times a \arrow[r, "ev"] & b \\
c \times a \arrow[u] \arrow[r] & c + a \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

В силу транзитивности отношения $\leqslant$ из $c \times a \leqslant c + a$ и $c + a \leqslant b$ получаем $c \times a \leqslant b$, т.е. замыкаем диаграмму до требуемой диаграммы экспоненцирования. Следовательно ортомодулярная решетка категорно замкнута. ■

Г. Хардегри ([5]) предложил систему ортомодулярной квантовой логики OMG, примитивными связками которой являются кондиционал (которому на ортомодулярной решетке соответствует стрелка Сасаки) и константа "ложь" f. Эта логика представляет собой наименьшее подмножество формул, удовлетворяющих следующим аксиомам:

(A1) $\vdash x \to [(x \to y) \to x]$

(A2) $\vdash [(x \to y) \to x] \to x$

(A3) $\vdash [(x \to y) \to (x \to z)] \to [(x \to y) \to (x \to z)]$

(A4) $\vdash [(x \to y) \to (y \to x)] \to \{[(x \to z) \to (x \to y)] \to [(x \to z) \to (y \to z)]\}$

(A5) $\vdash f \to x$

(P1) Если $\vdash x$ и $\vdash x \to y$, то $\vdash y$.

(P2) Если $\vdash x$, то $\vdash y \to x$.

Выражение $\vdash x$ является сокращением для "$x \in$ OMG", которое читается "x является тезисом системы OMG". Полнота системы OMG доказывается путем построения алгебры Линденбаума-Тарского для OMG, которая является ортомодулярной решеткой, единичным элементом которой является класс теорем исчисления OMG.

Если перейти теперь к интерпретации системы OMG в Set^E, то прежде всего требуется определить в Set^E истинностную стелку $\to: \Omega \times \Omega \to \Omega$ для кондиционала. Если использовать определение (SH), то на языке стрелок требуется, чтобы для p-й компоненты $\to_p : \Omega_p \times \Omega_p \to \Omega_p$ удовлетворялось равенство:

$$\to_p (\langle S, T\rangle) = \cup(\langle \neg p (S), \cap_p (S, T\rangle) =$$
$$= \cup_p (\langle S_p^*, S \cap T\rangle) = S_p^* \,\mathbin{\cup}\, (S \cap T).$$

В [5. с.10] оценка v определяется относительно E, причем в качестве E фигурирует алгебра Линденбаума-Тарского для OMG, но поскольку по лемме 1.1 E^+ также является ортомодулярной решеткой, то нетрудно переформулировать оценку на случай E^+.

3.2. Теорема. Если произвольная пропозициональная формула Set^E -общезначима, то она выводима в системе ортомодулярной квантовой логики Г.Хардегри.

Доказательство. Распространим лемму 2.5 на случай кондиционала. Получаем p-ю компоненту Set^E-оценки для этой справки в виде: $v'(\alpha \to \beta)_p = (\to \circ \langle v'(\alpha), v'(\beta)\rangle)_p = \to_p \circ \langle v'(\alpha), v'(\beta)\rangle_p =$
$= \to_p \circ \langle v'(\alpha)_p, v'(\beta)_p\rangle$

Следовательно $v'(\alpha \to \beta)_p(0) = \to_p (\langle v'(\alpha)_p(0), v'(\beta)_p(0)\rangle) =$
$= \to_p(\langle v(\alpha)_p, v(\beta)_p\rangle) =$ (по индуктивному предположению)
$= (v(\alpha)_p^* \,\mathbin{\cup}\, \langle v(\alpha)_p \cap v(\beta)_p\rangle) =$ (по определению стрелки кондиционала)

$= v(\alpha \to \beta)$, (по определению стрелки кондиционала в ортомодулярной решетке).

Что касается константы f, то очевидным оразом $v'(f)$ будет представлять собой стрелку false. Все остальное остается фактически без изменений как в предыдущем параграфе.

4. Общезначимость в Set^{ε}: система Г.Кальмбах

Система ортомодулярной логики Г.Кальмбах ([6]) также представляет собой пропозициональное исчисление, моделями которого являются ортомодулярные решетки. Главной задачей здесь было отыскание такого определения импликации, чтобы, с одной стороны, можно было сформулировать с ней правило модус поненс, а с другой стороны удовлетворялось естественное требование, чтобы $\alpha \to \beta$ было тавтологией тогда и только тогда, когда $v(\alpha) \leq v(\beta)$ выполняется для любой оценки на ортомодулярной решетке. При этом импликация определяется как решеточный полином p с двумя переменными, удовлетворяющий требованию (1) $p(a, b) = 1$ тогда и только тогда, когда $a \leq b$.

Кальмбах приводит следующий список "кандидатов" на импликацию:

$$\alpha \to_1 \beta = (\neg\alpha \wedge \beta) \vee ((\neg\alpha \wedge \neg\beta) \vee (\alpha \wedge (\neg\alpha \vee \beta)))$$

$$\alpha \to_2 \beta = (\neg\alpha \wedge \beta) \vee ((\alpha \wedge \beta) \vee ((\neg\alpha \vee \beta) \wedge \neg\beta))$$

$$\alpha \to_3 \beta = \neg\alpha \vee (\alpha \wedge \beta)$$

$$\alpha \to_4 \beta = \beta \vee (\neg\alpha \wedge \neg\beta)$$

$$\alpha \to_5 \beta = (\neg\alpha \wedge \beta) \vee ((\alpha \wedge \beta) \vee ((\neg\alpha \wedge \neg\beta))$$

Как видим, $\to_3$ представляет собой не что иное, как стрелку Сасаки из предыдущего параграфа. Каждый из полиномов позволяет ввести правило вывода

$$R_1 \qquad \frac{\alpha,\ \alpha \to_1 \beta}{\beta},$$

являющееся "корректным", т.е. приложенное к формуле, значимой на некоторой ортомодулярной решетке M, оно приводит к M-значимой формуле. Удивительным образом лишь $\to_1$ позволяет получить удовлетворительную аксиоматизацию ортомодулярной логики. При этом справедлива лемма

$$a \to_1 (a \to_1 b) = a^{\perp} \vee b$$

Особенностью ОМ-логики Кальмбах является также то, что кроме обычных операций $\vee$, $\wedge$, $\neg$ вводится дополнительная операция R с помощью следующего определения:

$$\alpha\ R\ \beta = (\alpha \wedge \beta) \vee (\neg\alpha \wedge \neg\beta)$$

Поскольку для элементов a, b некоторой ортомодулярной решетки $(a \wedge b) \vee (a^{\perp} \wedge b^{\perp}) = 1$ эквивалентно $a = b$, то из подобного определения следует, что

(2) $\alpha R \beta \in T$ тогда и только тогда, когда $v(\alpha) = v(\beta)$ справедливо для любой оценки v.

Здесь T - множество тавтологий.

Аксиоматика подобной логики выглядит следующим образом:

A1. $\neg(\alpha R \beta) \vee (\neg\alpha \vee \beta)$

A2. $(\alpha R \beta) R (\beta R \alpha)$

A3. $\neg(\alpha R \beta) \vee (\neg(\beta R \gamma) \vee (\alpha R \gamma))$

A4. $\alpha R (\neg(\neg\alpha))$

A5. $(\alpha R \beta) R (\neg\alpha R \neg\beta)$

A6. $\neg(\alpha R \beta) \vee ((\alpha \wedge \gamma) R (\beta \wedge \gamma))$

A7. $(\alpha \wedge \beta) R (\beta \wedge \alpha)$

A8. $\neg(\alpha \vee \beta) R (\neg\alpha \wedge \neg\beta)$

A9. $(\alpha \wedge (\alpha \vee \beta)) R\alpha$

A10. $(\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)) R ((\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma)$

A11. $(\alpha \vee (\neg\alpha \wedge (\alpha \vee \beta))) R (\alpha \vee \beta)$

A12. $(\neg\alpha \wedge \alpha) R ((\neg\alpha \wedge \alpha \wedge \beta)$

Для $M \subseteq F$, где F - множество формул, определяется $\Gamma_1 M$ как наименьшее множество $S \subseteq F$, содержащее M и замкнутое относительно правила вывода R_1. При этом Кальмбах рассматривает еще и обычный вариант правила модус поненс:

$$R_0 \quad \frac{\alpha \quad \neg\alpha \vee \beta}{\beta}$$

Справедлива лемма ([6. С. 401]):

пусть A является некоторым множеством формул, E есть ортомодулярная решетка и $v : F \to E$ есть некоторая оценка. Тогда $v(\Gamma_0 (B_0 \cup A))$ является наименьшим p-фильтром в E, содержащим $v(A)$.

B_0 представляет собой множество формул типа A1-A12. Что касается p-фильтра, то его определение имеет следующий вид.

Фильтр в ОМ-решетке E есть непустое подмножество Φ, удовлетворяющее условиям:

если $a \in \Phi$ и $b \in E$, то $a \vee b \in \Phi$, и если $a, b \in \Phi$, то $a \wedge b \in \Phi$.

p-фильтр есть фильтр Φ, замкнутый по отношению перспективности, т.е. если $a \in \Phi$ и $a \sim b$, то $b \in \Phi$ ($a \sim b$ тогда и только тогда, когда они имеют общее дополнение, т.е. существует такой элемент $u \in E$, что $a \vee u = b \vee u = 1$ и $a \wedge u = b \wedge u = 0$).

Принятие $\to_1$ в качестве импликации и

$$R_1 \qquad \frac{\alpha,\ \alpha \to_1 \beta}{\beta}$$

в качестве правила вывода влечет за собой принятие еще одной аксиомы:

A13. $(\neg\alpha \wedge \beta) \to_1 (\alpha \to_1 (\alpha \to_1 \beta))$

Тогда, определяя B_1 как наименьшее множество формул всех тавтологий A1-A13, получим результат ([6. С.403]):

$$\Gamma_1\ B_1 = T,$$

т.е. подобная аксиоматика полна. Доказана также полнота системы ортомодулярной логики Кальмбах в ортомодулярных решетках.

Как соотносятся между собой фильтры и наследственные множества в ортомодулярных решетках? Нетрудно видеть, что наследственные множества будут фильтрами. Действительно, для любых $a, b \in E$, таких, что $b \in \Phi$ и $a < b$, имеем $a \vee b = b$, откуда $a \vee b = \Phi$. Фильтры замкнуты относительно $\wedge$, а наследственные множества замкнуты еще и относительно $\vee$.

4.1. Лемма. Ортомодулярная решетка $[p)^+$ всех наследственных в $[p)$ множеств является p-фильтром.

Доказательство. Нетрудно убедиться, что $[p)^+$ является фильтром относительно $\subseteq$, $\cap$, $\cup$. Что касается перспективности, то выбирая в качестве общего дополнения для $[a)$ и $[b)$, таких, что $[a) \subseteq [b)$, элемент $[a)^*_p$ из леммы 1.2, из условия $[a)^*_p \cap [b) = \emptyset$ получаем $[a) = [b)$ ввиду того, что в орторешетках условие $a < b \ \&\ a^\perp \wedge b = 0 \Rightarrow a = b$ является необходимым и достаточным условием ортомодулярности ([1. С.77]). Отсюда и следует выполнение требования замкнутости по отношению перспективности, поскольку достаточно, чтобы $[b) \in [p)^+$. ■

Таким образом, если при некотором оценке $v : F \to E$ $v(\Gamma_1(B_1 \cup A))$ является наименьшим p-фильтром, содержащим $v(A)$, то при переходе к оценке $v_1 : F \to E^+$, сопоставляющей каждому элементу $p \in E$ фильтр $[p)^+ \in E^+$, точно так же $v_1(\Gamma_1(B_1 \cup A))$ есть наименьший p-фильтр, содержащий $v_1(A)$. Нетрудно теперь перейти от оценки v_1 к оценке $v_1' : F \to Set^E(1, \Omega)$, а отсюда и к теореме об общезначимости.

4.2. Теорема. Если произвольная пропозициональная формула Set^E-общезначима, то она выводима в системе ортомодулярной логики Г.Кальмбах.

Доказательство. При распространении леммы 2.5 на случай системы Кальмбах новый случай $\alpha = \beta \; R \; \gamma$. Но $\beta \; R \; \gamma$ по определению равно $(\beta \wedge \gamma) \vee (\neg\beta \wedge \neg\gamma)$, следовательно этот случай не нов. Случай $\alpha = \beta \rightarrow_1 \gamma$ сводится точно так же по определению к $\alpha = (\neg\beta \wedge \gamma) \vee ((\neg\beta \wedge \neg\gamma) \vee (\beta \wedge (\neg\beta \vee \gamma)))$. Фактически можно ввести в рассмотрение две новые стрелки в Set^E $:=: \Omega \times \Omega \rightarrow \Omega$ и $\rightarrow_1 : \Omega \times \Omega \rightarrow \Omega$, p-е компоненты которых определяются соответственно как

$=_p (\langle S,T\rangle) = (S \cap T) \Cup (S^*_p \cap T^*_p)$

$\rightarrow_p (\langle S,T\rangle) = (S^*_p \cap T^*_p) \Cup ((S^*_p \cap T^*_p) \Cup (S \cap (S^*_p \cap T^*_p)))$.

В остальном все остается без изменений как в доказательстве теоремы 2.10. ■

ЛИТЕРАТУРА

1. Биркгоф Г. Теория решеток. М., 1984.
2. Гольдблатт Р. Топосы. Категорный анализ логики. М., 1983.
3. Cutland N.J., Gibbins P.F. A regular sequent calculus for quantum Logic in which ∧ and V are dual.// Logicue et analyse, 1982. Vol. 25. N 99.
4. Goldblatt R.I. Semantic analysis of orthologic // Journal ob Philosophical Logic. 1983. N 1-2.
5. Hardegree G.M. An axiom system for ortomodular quantum Logic // Studia Logica. 1981. Vol. 40. N 1.
6. Kalmbach G. Ortomodular Logic // Zeitschrift fur Mathematische Logic und Grundlagen der Mathematik. 1974. Vol.20. N 5.
7. Nishimura H. Sequential metod in quantum logic // Journal of Symbolic Logic, 1980. Vol. 45. N 2.
8. Beran L. Orthomodulal Lattices. Algebraic Approach. Prague, 1984.