В.Н.Шалак

НА ПУТИ К КАТЕГОРНОЙ ХАРАКТЕРИЗАЦИИ РЕЛЕВАНТНОЙ ЛОГИКИ

0. В настоящей работе будет установлена связь между релевантной логикой и теорией категорий. В то время как хорошо исследованы связи интуиционистской и классической логик с топосами и некоторыми более слабыми категориями, ничего подобного не сделано в отношении релевантной и многих других интенсиональных логик. Построение категории, характеризующей релевантную логику, явится хорошей основой для дальнейших исследований релевантности в различных теориях. Уже сравнительно давно поставлены задачи построения релевантной теории множеств, релевантной арифметики, теории релевантных рекурсивных функций. Определенную помощь в решении этих задач может оказать теория категорий, ибо построение "релевантной" категории явится по самой своей сути построением "релевантного универсума", исследуя который мы будем приходить к тем или иным релевантным теориям. А чтобы не привнести в этот универсум ничего извне, можно и даже нужно воспользоваться понятиями внутреннего языка и внутренней логики категорий.

Первым шагом на пути реализации этой программы является построение категории, которая характеризовала бы релевантную логику. Для этого мы прежде всего сформулируем в многосортном языке систему релевантной логики *RQ*. Затем дадим один из вариантов алгебраической семантики, относительно которой система *RQ* полна. Анализ семантических конструкций в категорных терминах как раз и позволит нам построить искомую категорию.

1. Сформулируем *RQ* в языке, который состоит из:

(I) непустого множества *Srt*, элементы которого называются сортами. Для каждого $s \in Srt$ фиксировано счетное множество индивидных переменных данного сорта, причем предполагается, что индивидные переменные различных сортов различны;

(2) множества функциональных символов *Fn*, причем для каждого $f \in Fn$ фиксирован сорт каждого аргументного места этого символа и сорт значениясамого f.Это записывается в виде $f\colon s_1 * \ldots * s_n \to s$, где s_i – сорт i-го аргументного места $(I \leqslant i \leqslant n)$, а s – сорт значения f;

(3) множества предикатных символов *Pr*, для которых также фиксированы сорта аргументных мест. Для $P \in Pr$ $P \subset s_1 * \ldots * s_n$ означает, что s_i является сортом i-го аргументного места $(I \leqslant i \leqslant n)$;

(4) пропозициональной константы t;

(5) логических связок $\&$, V, $\circ$, $\to$, $\neg$;

(6) квантора $\forall$;

(7) скобок), (.

Определение терма и формулы, связанных и свободных переменных, подстановки терма вместо переменной и пр.– обычные для многосортных языков (см.[2,9]).

Аксиомами RQ являются все универсальные замыкания формул следующего вида:

A.1. $A \to B \to . B \to C \to . A \to C$

A.2. $A \to . A \to B \to B$

A.3. $A \& B \to A$

A.4. $A \& B \to B$

A.5. $(A \to B) \& (A \to C) \to . A \to B \& C$

A.6. $A \to A \vee B$

A.7. $B \to A \vee B$

A.8. $(A \to C) \& (B \to C) \to . A \vee B \to C$

A.9. $(A \& (B \vee C)) \to ((A \& B) \vee (A \& C))$

A.10. $A \to . B \to A \circ B$

A.11. $(A \to . B \to C) \to . A \circ B \to C$

A.12. $\neg\neg A \to A$

A.13. $A \to \neg A \to \neg A$

A.14. $t \to . A \to A$

A.15. t

A.16. $\forall x A \to \dot{A}(^{\tau}/x)$

A.17. $\forall x (A \to B) \to . \forall x A \to A x B$

A.18. $A \to \forall x A$, где x не является свободной в A,

A.19. $\forall x (A \vee B) \to (A \vee \forall x B)$, где x не является свободной в A,

A.20. $\forall x A \ \& \ \forall x B \to \forall x (A \& B)$.

Имеются два правила вывода: $\dfrac{A \to B, A}{B}$ $(m.p)$; $\dfrac{A, \ B}{A \ \& \ B}$ $(\&)$.

Определение доказательства – обычное. Квантор существования вводим по определению:

Д.I $\quad \exists x A \Leftrightarrow \neg \forall x \neg A$.

2. Чтобы построить семантику для RQ, нам нужно определить понятие обобщенного моноида де Моргана.

Пусть $D = \langle \Omega, e, \cap, \cup, \cdot, \Rightarrow, -, \bigcup, \bigcap \rangle$, где Ω – непустое множество, $e \in \Omega$, $-$ – унарная операция на Ω, $\cap, \cup, \cdot, \Rightarrow$ – бинарные операции на Ω, а $\bigcup, \bigcap$ – бесконечные операции на Ω в смысле [3].

Будем называть D обобщенным моноидом де Моргана, если для всех a, b, $c \in \Omega$ и для произвольного $\{a_t\}_{t \in T} \subseteq \Omega$, $T \neq \emptyset$, имеют место следующие равенства:

p1. $a \cap (b \cap c) = (a \cap b) \cap c$

p2. $a \cap b = b \cap a$

p3 $\quad a \cup b = -(-a \cap -b)$

p4. $a = a \cap (a \cup b)$

p5. $a \cap (b \cup c) = (a \cap b) \cup (a \cap c)$

p6. $--a = a$

p7. $a \cdot (b \cup c) = (a \cdot b) \cup (a \cdot c)$

p8. $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$

p9. $a \cdot b = b \cdot a$

p10. $a\cdot e=a$

p11. $a\twoheadrightarrow b = -(a\cdot b)$

p12. $(a\twoheadrightarrow b)\cdot a\leqslant b$, где $\leqslant$ вводим определением

Д.3. $a\leqslant b \Leftrightarrow a\cap b=a$,

p13. $a\leqslant a\cdot a$

p14. $\forall t\in T(a_t \leqslant \bigcup_{t\in T} a_t.)$

p15. $\forall t\in T(a_t\leqslant b) \supset \bigcup_{t\in T} a_t\leqslant b$

p16. $a \cap \bigcup_{t\in T} a = \bigcup_{t\in T} (a\cap a_t)$

p17. $\bigcap_{t\in T} a_t = -\bigcup_{t\in T} -a_t$.

Моделью для RQ будем называть пару $\mathfrak{M}=\langle D,I\rangle$, где D – обобщенный моноид де Моргана, а I – функция интерпретации, которая определена на множестве $Srt \cup Fn \cup Pr \cup \{t\}$ и которая сопоставляет

а/ каждому $s\in Srt$ непустую область индивидов данного сорта $I(s)$,

б/ каждому n-местному функциональному символу $f\in Fn$ $f:s_1*\ldots*s_n\to s$ некоторую функцию $I(f):I(s_1)*\ldots*I(s_n)\to I(s)$,

в/ каждому n-местному предикатному символу $P\in Pr$ $P\subset s_1*\ldots*s_n$ – некоторую функцию $I(P)$: $I(s_1)*\ldots*I(s_n)\to\Omega$,

г/ пропозициональной константе t – элемент $I(t)=e$.

Будем называть оценкой индивидных переменных функцию v, которая определена на множестве всех индивидных переменных и которая сопоставляет для произвольного сорта s и переменной данного сорта x элемент $v(x)\in I(s)$. Посредством $\mathcal{V}$ будем обозначать множество всех оценок индивидных переменных, а посредством $\mathcal{V}^{x}_{v}$о – множество всех оценок индивидных переменных, значения которых совпадают с v для всех аргументов, за исключением, возможно, значения для x_0.

Определим значение терма r в модели $\mathfrak{M}$ при оценке v, что будет обозначаться посредством $r^{\mathfrak{M}}_{(v)}$:

a) если r – индивидная переменная x, то $r^{\mathfrak{M}}_{(v)} = v(x)$,

b) если r – терм $f(r_1,\ldots,r_n)$, то $r^{\mathfrak{M}}_{(v)}= I(f)(r^{\mathfrak{M}}_{1(v)},\ldots,r^{\mathfrak{M}}_{n(v)})$.

Теперь дадим определение значения формулы А в модели $\mathfrak{M}=\langle D,I\rangle$ при оценке v, что будем обозначать посредством $|A|^{\mathfrak{M}}_{v}$:

a/ $|P(r_1,\ldots,r_n)|^{\mathfrak{M}}_{v}=I(P)(r^{\mathfrak{M}}_{1(v)},\ldots,r^{\mathfrak{M}}_{n(v)})$,

b/ $|A\&B|^{\mathfrak{M}}_{v}=|A|^{\mathfrak{M}}_{v} \cap |B|^{\mathfrak{M}}_{v}$,

c/ $|A\vee B|^{\mathfrak{M}}_{v}=|A|^{\mathfrak{M}}_{v} \cup |B|^{\mathfrak{M}}_{v}$,

d/ $|A\circ B|^{\mathfrak{M}}_{v}=|A|^{\mathfrak{M}}_{v} \cdot |B|^{\mathfrak{M}}_{v}$

e/ $|A\rightarrow B|^{\mathfrak{M}}_{v}=|A|^{\mathfrak{M}}_{v} \Rightarrow |B|^{\mathfrak{M}}_{v}$

f/ $|\neg A|^{\mathfrak{M}}_{v} = -|A|_{v}$

g/ $|\forall xA(x)|^{\mathfrak{M}}_{v}= \bigcap_{v\in\mathcal{V}^{x}_{v}} |A(x)|^{\mathfrak{M}}_{v}$

h/ $|t|^{\mathfrak{M}}_{v} =I(t)$

Будем говорить, что формула А истинна в модели $\mathfrak{M}$ при оценке v, если и только если $e\leqslant|A|^{\mathfrak{M}}_{v}$.

Формула Φ общезначима в модели $\mathfrak{M}$, если и только если она истинна в этой модели при любой оценке.

Формула A RQ-общезначима, если и только если она общезначима в любой модели.

Имеет место следующая

ТЕОРЕМА. Для произвольной формулы A справедливо, что

$\vdash_{RQ} A$, если и только если A RQ-общезначима.

Предложенная нами семантика является некоторым усложнением алгебраической семантики для RQ, предложенной в *[10]*. Причиной этого усложнения является принимаемая нами стандартная интерпретация кванторов в отличие от подстановочной интерпретации в *[10]*, а само усложнение состоит в том, что мы вынуждены ввести в определение моноида де Моргана бесконечные операции $\bigcup$, $\bigcap$, чтобы проинтерпретировать кванторы.

3. Сформулированная выше теорема говорит, что система релевантной логики RQ полна относительно определенного класса структур. Эти структуры допускают описание на языке теории категорий. В результате такого описания мы придем к категориям, аналогичным тем, которые были исследованы Фольгером *[12, 13]*. Фольгер интересуется интуиционистской логикой, однако его подход достаточно общ, чтобы допустить распространение и на другие логики.

Д.3. Категория $\mathbb{C}$ называется *релевантной логической* категорией, если она удовлетворяет следующим условиям:

(1) $\mathbb{C}$ имеет конечные произведения и, как следствие, в частности, конечный объект 1. Если A – произвольный объект категории $\mathbb{C}$, то единственный морфизм из A в конечный объект 1 будем обозначать посредством 1_A;

(2) $\mathbb{C}$ имеет выделенный объект Ω, который является имплицитным моноидом де Моргана, т.е. существуют морфизмы $e\colon 1\to\Omega$, $-\colon \Omega\to\Omega$, $\cup\colon \Omega\star\Omega\to\Omega$, $\cap\colon \Omega\star\Omega\to\Omega$, $\Sigma\colon \Omega\star\Omega\to\Omega$, $\Rightarrow\colon \Omega\star\Omega\to\Omega$, которые удовлетворяют постулатам *p.1* – *p.13* для обобщенного моноида де Моргана.

Например, постулат *p.3* на языке морфизмов запишется в виде $\cup=-\Sigma\cap\Sigma(-x-)$, а на языке коммутативных диаграмм в виде

$$\begin{tikzcd}
\Omega\star\Omega \arrow[r, "(-x-)"] \arrow[d, "\cup"'] & \Omega\star\Omega \arrow[d, "\cap"] \\
\Omega & \Omega \arrow[l, "-"]
\end{tikzcd}$$

Аналогично для других постулатов.

Для произвольного объекта A категории $\mathbb{C}$ обозначим посредством $\mathbb{C}(A,\Omega)$ совокупность всех морфизмов категории $\mathbb{C}$ из A в Ω. Покажем, что морфизмы $\cup$, $\cap$, Σ, $\Rightarrow$, $-$, e индуцируют на $\mathbb{C}(A,\Omega)$ алгебраическую структуру моноида де Моргана. Если даны два морфизма $\varphi, \psi: A \rightrightarrows \Omega$, то будем писать $\varphi \cap \psi$, $\varphi \cup \psi$, $\varphi \Sigma \psi$, $\varphi \Rightarrow \psi$, $-\varphi$ (вместо $\cap\circ\langle\varphi,\psi\rangle$, $\Sigma\circ\langle\varphi, \psi\rangle$, $\Rightarrow\circ\langle\varphi, \psi\rangle$, $-\circ\varphi$ соответственно), тогда это не приведет ни к какой путанице. Покажем для постулата *p.3*, что $\varphi \cup \psi = -(-\varphi \cap -\psi)$.

Следующая цепочка равенств, в которой используются свойства произведений в категориях, служит доказательством этому:
$\varphi \cup \psi = \cup\circ\langle\varphi, \psi\rangle=-\circ\cap\circ(-\times-)\circ\langle\varphi, \psi\rangle=-\circ\cap\circ\langle-\circ\varphi, -\circ\psi\rangle=-\circ\cap\circ\langle-\varphi, -\psi\rangle= -\circ(-\varphi \cap -\psi)=-(-\varphi \cap -\psi)$.

Аналогично для других постулатов.

На $\mathbb{C}(A, \Omega)$ можно определить отношение частичного порядка посредством $\varphi \preccurlyeq \psi \Longleftrightarrow \varphi \cap \psi = \varphi \quad \varphi, \psi: A \rightrightarrows \Omega$. Частичный порядок, в свою очередь, определяет на $\mathbb{C}(A, \Omega)$ категорную структуру / 1 /.

Для произвольного морфизма $f:A \to B$ пусть $\mathbb{C}(f,\Omega)$ служит обозначением для отображения $\mathbb{C}(f,\Omega): \mathbb{C}(B,\Omega) \to \mathbb{C}(A,\Omega)$.

$$\varphi \mapsto \varphi\circ f$$

Это отображение является функтором из категории $\mathbb{C}(B,\Omega)$ в категорию $\mathbb{C}(A,\Omega)$, так как оно сохраняет частичный порядок.

Допустим, что $\varphi \leqslant \psi$ для $\varphi, \psi: B \rightrightarrows \Omega$. Тогда $\varphi\cap\psi = \varphi \quad \mathbb{C}(f, \Omega)(\varphi)=\varphi\circ f= = \cap \circ \langle\varphi, \psi\rangle \circ f = \cap \circ \langle\varphi \circ f, \psi \circ f\rangle = \varphi \circ f \cap \psi \circ f$.

Аналогично можно проверить, что $\mathbb{C}(f, \Omega)$ является гомоморфизмом из $\mathbb{C}(B, \Omega)$ в $\mathbb{C}(A, \Omega)$.

Сформулируем следующее условие, которому должна удовлетворять релевантная логическая категория.

(3.1) В категории $\mathbb{C}$ для каждого морфизма $f: A\to B$ функтор $\mathbb{C}(f,\Omega)$ имеет левый сопряженный $\exists f: \mathbb{C}(A,\Omega) \to \mathbb{C}(B, \Omega)$.

Это условие означает, что в категории $\mathbb{C}$ имеет место следующее соотношение: $\exists f(\varphi \leqslant \psi)$,если и только если $\varphi \leqslant \psi \circ f \quad \varphi:A \to \Omega$, $\psi: B \to \Omega$.

Если мы примем определение $\forall f(\varphi) \Leftrightarrow -\circ\exists f(-\varphi)$, то получим функтор $\forall f: \mathbb{C}(A, \Omega) \to \mathbb{C}(B, \Omega)$, для которого выполняется соотношение: $\exists f(\varphi) \quad \psi$, если и только если $\psi \leqslant \forall f(\varphi)$.

Это означает, что $\forall f$ является правым сопряженным к функтору $\mathbb{C}(f,\Omega)$.

(3.2) Если
$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g'"'] & B \arrow[d, "g"] \\ D \arrow[r, "f"] & C \end{tikzcd}$$
– декартов квадрат,

то $\exists f(\varphi) \circ g = \exists f'(\varphi \circ g')$, $\varphi: D \to \Omega$.

(3.3) В категории $\mathbb{C}$ для любых морфизмов $f: A\to B$, $\psi: A \to \Omega$, $\varphi:B \to\Omega$ имеет место $\varphi \cap \exists f(\psi)=\exists f(\varphi \circ f \cap \psi)$.

Определение релевантной логической категории закончено, обратимся к примерам таких категорий, которые позволят проиллюстрировать все пункты определения. В качестве первого примера возьмем категорию *Set*, в которой выделено множество Ω с операциями на нем, удовлетворяющими соответствующим постулатам. Полученная структура совпадает с той, которая была использована при построении семантики для системы *RQ*. В самом деле, первый пункт определения категории $\mathbb{C}$ позволяет нам проинтерпретировать предикатные и функциональные символы. Второй пункт определения гарантирует то, что множество Ω наделено структурой моноида де Моргана. Легко показать, что п. (3.I) равносилен требованию наличия наименьшей верхней и наибольшей нижней граней для произвольных подмножеств множества Ω, т.е. является одним из способов задания бесконечных операций $\cap$ и $\cup$ на Ω. Пункт (3.2) всегда выполняется в категории *Set*, он является некоторым усилением так называемого условия Бека и используется существенным образом при демонстрации общезначимости аксиом с кванторами. Пункт (3.3) гарантирует выполнимость в Ω постулата *p.16*. Таким образом, Ω является обобщенным моноидом де Моргана. Никаких других конструкций при построении семантики для *RQ* мы не использовали?

Произвольный топос $\mathcal{E}$, в котором имеется выделенный объект Ω с морфизмами, удовлетворяющими постулатам моноида де Моргана, является релевантной логической категорией.

Так как булева алгебра является некоторым вырожденным случаем моноида де Моргана, мы можем сформулировать следующую теорему:

ТЕОРЕМА. Всякий булев топос является релевантной логической категорией.

Для доказательства этой теоремы достаточно взять в качестве выделенного объекта Ω классифицирующий объект, а в качестве морфизмов e, $-$, $\cap$, $\cup$,Σ, $\Rightarrow$ – соответственно морфизмы *true*, отрицания, конъюнкции, дизъюнкции, импликации, как они определены, например, в книге Гольдблатта *[I]*.

Данная теорема является категорным аналогом известного результата о соотношении классической и релевантной логик.

В силу таких тесных связей релевантных логических категорий и топосов было бы весьма интересно и полезно исследовать, как проявляет себя релевантность в различных конкретных примерах топосов, в которых, конечно, выделенный объект Ω не является просто классифицирующим объектом топоса. В частности, хорошо было бы провести такое исследование в отношении топосов из теории автоматов, подробно рассматриваемых в книге Арбиба и Мейнса *[5]*. Результаты такого исследования могли бы иметь и практические приложения.

4. Теперь мы перейдем к определению понятий "внутреннего языка" и "внутренней логики" категорий. В книге, посвященной теории топосов *[8]*, Джонстон пишет, что один из наиболее важных путей, на котором мы можем формализовать идеи топосов как "обобщенной теории множеств", заключается в том, чтобы ассоциировать с данным топосом $\mathcal{E}$ некоторый язык $L_{\mathcal{E}}$, который можно использовать в качестве удобного средства

делать утверждения об объектах и морфизмах $\mathcal{E}$ или даже доказывать о них теоремы. Такие языки были построены многими логиками и математиками, в том числе Осиусом [II], Фурманом [4] и самим Джонстоном [8]. Однако было также показано, что внутренние языки можно ассоциировать и с категорями, которые отличны от топосов. Это сделано, например, Маккаи и Рейсом [9]. Мы сейчас построим внутренний язык релевантной логической категории.

Будем обозначать язык, ассоциированный с релевантной логической категорией $\mathbb{C}$, посредством $L_{\mathbb{C}}$.

Д.4. Язык $L_{\mathbb{C}}$ состоит из:

/I/ сорта $\{s_k\}_{k\in K}$ находятся в одно-однозначном соответствии с объектами категории $\mathbb{C}$;

/II/ термы:

а) для каждого сорта s_k имеется счетное множество индивидных переменных этого сорта $x_k^1, x_k^2, \ldots,$

б) для каждого морфизма $f\colon A \to B$ и терма r сорта A имеется терм $f(r)$ сорта B;

/III/ формулы – это термы сорта Ω. Из одних формул можно строить новые формулы по обычным правилам с использованием логических связок $\&$, $\vee$, $\circ$, $\to$, $\neg$ и кванторов $\forall$, $\exists$.

Определим "внутреннюю интерпретацию" язка $L_{\mathbb{C}}$. Пусть $\bar{x}=\langle x_1,\ldots,x_n\rangle$ – – последовательность различных переменных сортов $A_1,\ldots, A_n$

Сопоставим каждому терму сорта A, все свободные переменные которого содержатся среди $\bar{x}=\langle x_1,\ldots, x_n\rangle$, морфизм из $|\bar{x}|$ в A.

Определим этот морфизм индукцией по построению терма t:

$$a)\ t = x_i \qquad |x_i|_{\bar{x}}\colon\ |\bar{x}| \xrightarrow{pr_i} A_i,$$

$$b)\ t = f(r) \qquad f\colon B \to A, \qquad |f(r)|_{\bar{x}}\colon |\bar{x}| \xrightarrow{|r|_{\bar{x}}} B \xrightarrow{f} A,$$

$$c)\ t = \varphi \,\S\, \psi \qquad |\varphi \,\S\, \psi|_{\bar{x}}\colon |\bar{x}| \xrightarrow{\langle|\varphi|_{\bar{x}}, |\psi|_{\bar{x}}\rangle} \Omega * \Omega \xrightarrow{\S'} \Omega, \text{ где}$$

$\S = \&, \vee, \circ, \to,\quad \S' = \cap, \cup, \Sigma, \Rightarrow,$

$$d)\ t = \neg\varphi \qquad |\neg\varphi|_{\bar{x}}\colon |\bar{x}| \xrightarrow{|\varphi|_{\bar{x}}} \Omega \xrightarrow{\neg} \Omega,$$

e) пусть все свободные переменные формулы φ содержатся среди $\langle y,x\rangle$ и пусть $\pi_y\colon |y, \bar{x}| \to |\bar{x}|$ – проекция. Пусть $|\varphi|_{y,\bar{x}}\colon |y, x| \to \Omega$, тогда

$$|\exists y\varphi|_{\bar{x}}\colon |\bar{x}| \xrightarrow{\exists\pi_y(|\varphi|_{y,\bar{x}})} \Omega \text{ и } |\forall y\varphi|_{\bar{x}}\colon |\bar{x}| \xrightarrow{\forall\pi_y(|\varphi|_{y,\bar{x}})} \Omega.$$

Д.5. Для любой формулы φ (терма t) языка $L_{\mathbb{C}}$, все свободные переменные которой в точности содержатся среди $\bar{x} = \langle x_1,\ldots, x_n\rangle$ в порядке их первого вхождения в формулу (терм), будем называть ее внутренней интерпретацией в категории $\mathbb{C}$ морфизм $|\varphi|_{\bar{x}}$ $(|t|_{\bar{x}})$.

Д.6. Будем называть формулу φ языка $L_{\mathbb{C}}$ внутренне значимой в $\mathbb{C}$, если и только если для ее внутренней интерпретац ии $|\varphi|_{\bar{x}}$ верно $e_{\bar{x}} \leqslant |\varphi|_{\bar{x}}$, где $e_{\bar{x}}\colon |\bar{x}| \xrightarrow{!} 1 \xrightarrow{e} \Omega$.

Исходя из данных определений, можно отождествить внутреннюю логику категорий $\mathbb{C}$ с множеством всех внутренне значимых формул языка $L_{\mathbb{C}}$. В настоящей работе мы не ставим своей целью развитие внутренней логики категории $\mathbb{C}$. Ограничимся несколькими замечаниями. Прежде всего нужно отметить, что построенная логика довольно бедна, в ней нет даже предиката равенства. Дело в том, что в категории $\mathbb{C}$ не видно, как его ввести. Значительный интерес для исследования представляют различные обогащения релевантной теории типов, в которой равенство можно будет определить, используя принцип Лейбница. Однако здесь имеются определенные тонкости, связанные с интенсиональностью релевантной логики. В данной работе мы не будем их рассматривать. Потребовав, чтобы обогащенная экспоненциалами категория $\mathbb{C}$ содержала натурально-числовой объект, можно, расширив соответствующим образом язык, построить релевантную арифметику, релевантную теории рекурсий.

ЛИТЕРАТУРА

I. Голдблатт Р. Топосы: Категорный анализ. М., I983.
2. Колмогоров А.Н., Драгалин А.Г. Введение в математическую логику. М., I982.
3. Расева Е., Сикорский Р. Математика метаматематики. М., I972.
4.Фурман М. Логика топосов // Справочная книга по математической логике. М., I983. Т.4.
5. Arbib M.A., Manes E.G. Arrows, structures and functors. N.Y., 1975.
6. Dunn M.J. A theorem in 3-valued model theory with connections to number theory, type theory and relevant logic // Stud.log. 1979. Vol. 38.
7. Dunn M.J. Relevant Robinson's arithmetics // Ibid.
8. Johnstone P.T. Topos theory. N.Y., 1977.
9.Makkai R.K., Reyes G. First order categorial logic. N.Y., 1977.
10 Meyer R.K., Dunn M.J., Leblanc H. Completeness of relévant quantification theories //NotreDameJ.Form.Log. 1974. Vol.15.11. Osius G. Logical and set theoretical tools in elementary topos // Lect. Notes Math. 1975. Vol. 445.
12.Volger H. Completeness theorem for logical categories // Ibid.
13.Volger H. Logical categories, semantical categories and topos // Ibid.....