

ЛЕНИНГРАДСКАЯ ВОЕННАЯ ИНЖЕНЕРНАЯ КРАСНОЗНАМЁННАЯ
АКАДЕМИЯ ИМЕНИ А.Ф.МОЖАЙСКОГО

Лозановский Г.Я.

БАНАХОВЫ СТРУКТУРЫ И ИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ
(002 - Функциональный анализ и теория функций)

Д и с с е р т а ц и я
на соискание учёной степени
доктора физико-математических наук

Ленинград - 1972

СОДЕРЖАНИЕ

В в е д е н и е	5
Глава 0. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ, ТЕРМИНОЛОГИЯ, ОБОЗНАЧЕНИЯ	26
§ 1. Общая теория линейных структур.	26
§ 2. Реализация линейных структур.	33
§ 3. Нормированные структуры.	36
§ 4. Функционалы в линейных структурах.	43
§ 5. Представление вполне линейных функционалов. Дуальные пространства.	46
§ 6. Специальные пространства.	51
Глава I. ФУНКЦИИ И ФУНКЦИОНАЛЫ В ЛИНЕЙНЫХ СТРУКТУРАХ	55
§ 1. Функции от элементов линейной структуры.	57
§ 2. Реализация пространств регулярных функционалов	70
Глава II. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ БАНАХОВЫХ СТРУКТУР С ПОМОЩЬЮ ВОГНУТЫХ ФУНКЦИЙ	85
§ 1. Основные определения и простейшие следствия из них	86
§ 2. О пространствах типа $X_0^{1-s} X_1^s$	91
§ 3. О степенном преобразовании нормы.	96
§ 4. О пространствах типа $\Phi(X_0, X_1)$	98
§ 5. Приложения к общей теории банаховых структур.	103
§ 6. Приложения к банаховым пространствам с безусловными базисами.	106
§ 7. Доказательства предложений 2.1.4, 2.1.5, 2.1.8, 2.1.9. Вспомогательные сведения о вогнутых функциях и банаховых структурах.	107

§ 8. Некоторые леммы о пространствах непрерывных функций.	117
§ 9. Доказательства предложения 2.2.1 и утверждения, сформулированного в замечании 2.2.3.	124
§ 10. Доказательства предложений 2.2.6 и 2.2.7.	131
§ 11. Доказательство теоремы 2.2.8.	135
§ 12. Доказательства предложения 2.2.9 и теорем 2.2.11 и 2.2.12.	139
§ 13. Доказательства теоремы 2.3.4 и утверждения, сформулированного в замечании 2.3.3.	142
§ 14. Доказательство теоремы 2.4.1.	144
§ 15. Доказательство теоремы 2.4.2 и пример к замечанию 2.4.3.	157
§ 16. Доказательство теоремы 2.4.5.	162
§ 17. Доказательство теоремы 2.4.6.	167
§ 18. Доказательства теорем 2.5.1, 2.5.2, 2.5.3, 2.5.5, 2.6.1 и 2.6.3.	172
Глава III. О ЛИНЕЙНО-ТОПОЛОГИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ БАНАХОВЫХ СТРУКТУР	176
§ 1. Непрерывность нормы.	177
§ 2. Счётность типа.	183
§ 3. Слабая * секвенциальная компактность.	191
§ 4. Сопряжённое в смысле Нагано к банахову сопряжённому пространству.	197
Глава IV. О (β) -СОПРЯЖЁННОМ ПРОСТРАНСТВЕ К БАНАХОВОЙ СТРУКТУРЕ И НЕКОТОРЫХ ЕГО ПОДПРОСТРАНСТВАХ	208
§ 1. О вполне линейных функционалах.	209
§ 2. Об аномальных функционалах.	217
§ 3. Различные вопросы строения (β) -сопряжённых пространств.	224
§ 4. О строении пространства (β) -сопряжённого к пространству Марцинкевича.	235

§ 5. О строении пространства (b) -сопряжённого к пространству со смешанной нормой.	241
§ 6. О проектировании банаховой структуры на её замкнутый идеал.	246
ПРИЛОЖЕНИЕ. ОБ ИНТЕРПОЛИЦИИ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ В ПРОСТРАНСТВАХ ТИПА $X_0^{1-s} X_1^s$	254
Цитированная литература.	260
Предметный указатель.	272
Указатель символов по мере их появления в тексте.	277

В в е д е н и е

Теория линейных полуупорядоченных пространств, иначе — теория линейных структур, является одним из основных разделов функционального анализа. Эта теория была построена в работах Л.В.Канторовича (см. Канторович [1]–[7]), относящихся к 1935–1937 гг. В этих работах дана аксиоматика линейных структур, изучены наиболее важные виды таких пространств, построена теория разного рода линейных операторов, действующих из одной линейной структуры в другую, и даны многочисленные приложения к ряду вопросов теории функций и функциональных уравнений. В дальнейшем теория Л.В.Канторовича получила плодотворное развитие в работах ленинградской школы полуупорядоченных пространств (Б.З.Вулих, А.Г.Пинскер, А.И.Юдин, Г.П.Акилов и их ученики; сюда же примыкают работы воронежского математика В.И.Соболева).

К теории линейных структур тесно примыкают исследования М.Г.Крейна о нормированных пространствах с выделенным в них конусом положительных элементов, начатые во второй половине тридцатых годов и продолженные в воронежской школе (М.А.Красносельский и его ученики)^{х)}. Отметим также исследования по теории топологических полуполей, интенсивно проводившиеся, начиная с конца пятидесятых годов (М.Я.Антоновский, В.Г.Болтянский, Т.А.Сарымсаков и их ученики).

Из иностранных учёных большую роль в развитии теории линейных структур сыграли, главным образом, японские (Х.Накано,

^{х)} По поводу связей между теориями Л.В.Канторовича и М.Г.Крейна см. (Вулих [6], [7]).

Т. Огасавара, И. Аммиа, Т. Андо, К. Иосида, С. Какутани), а также американские (М. Стоун, Г. Биркгоф и др.). Значительное влияние на развитие теории оказали также работы голландского математика Г. Фрейдентала и венгерского математика Ф. Рисса.

Основными монографиями по теории линейных структур являются: (Канторович, Булик, Пинскер [1]), (Булик [6]), (Накаю [1], [2], [3]). Некоторое отражение эта теория нашла в монографиях (Красносельский [1]), (Мэй [1]), (Данфорд, Шварц [1]), (Биркгоф [1]), (Бурбанк [1], [2]). Упомянем также монографии (Намюга [1]) и (Перессини [1]). Серия статей (Луксембург [1]) и (Луксембург, Заанен [1]), посвящих в основном обзорный характер, содержит и известное число новых фактов, но в значительной степени искажает историю вопроса вследствие слабого знакомства авторов с работами советских математиков.

Мы будем в основном пользоваться терминологией монографии (Булик [6]), которая несколько отличается от терминологии монографии (Канторович, Булик, Пинскер [1]): основные сведения, относящиеся к терминологии, приведены в главе 0. Для удобства читателя в конце работы приводятся предметный указатель и указатель символов. Ссылки в диссертации делаются, по возможности, не на оригинальные работы, а на соответствующие монографии. Это относится, в частности, к работам (Канторович [1] - [8]), (Канторович, Булик [1]), (Булик [1] - [5]), (Пинскер [1] - [3]), которые в значительной степени отражены в монографиях (Канторович, Булик, Пинскер [1]) и (Булик [6]).

Важнейшей частью теории линейных структур (по крайней мере, с точки зрения классического функционального анализа) является ТЕОРИЯ БАНАХОВЫХ СТРУКТУР. Дело не только в том, что многие важные пространства, рассматриваемые в анализе, являются банаховыми структурами^{к)}, но и в том, что аксиоматика теории банаховых структур достаточно гибока и богата, а её аппарат достаточно разработан для того, чтобы эта теория могла служить мощным средством исследования указанных пространств.

Настоящая диссертация посвящена теории банаховых структур. В ней изучаются следующие вопросы: фундам. от элементов линейной структуры и реализации пространств регулярных функционалов (гл. I); преобразования банаховых структур с помощью вогнутых функций (гл. II); строение и линейно-топологические свойства банаховых структур (гл. III); строение и свойства пространства, сопряжённого к банаховой структуре, а также некоторых его подпространств (гл. IV).

к) К их числу относятся пространства непрерывных функций на компактах, классические пространства L^p , пространства Орлица, Лоренца, Марцинкевича, Морри, пространства со смешанной нормой (см. Бенедек и Панзоне [1]), симметричные пространства измеримых функций (см. Семёнов [1], [2]), некоторые пространства операторов, различные пространства функций множества (мер), модулярные пространства (см. Накино [1]), многие пространства почти периодических функций, пространства Степанова (см. Левитан [1]), а также многие другие.

Напомним также, что всякое банахово пространство с безусловным базисом после эквивалентной перенормировки превращается в банахову структуру, если за конус положительных элементов в нём принять множество всех элементов, имеющих неотрицательные коэффициенты разложения по базису.

Перейдём теперь к конкретному содержанию работы. Основной текст состоит из четырёх глав, которыми предшествует гл. 0 "Предварительные сведения, терминология, обозначения". В конце диссертации имеется приложение "Об интерполяции линейных операторов в пространствах типа $X_0^{1-s} X_1^s$ ".

Глава I называется "Функции и функционалы в линейных структурах". Она состоит из двух параграфов. На материал этой главы, относящийся в основном к общей теории линейных структур, опираются последующие главы. В частности, результаты § 2 главы I являются ключом к главе II.

В § I главы I изучаются функции от элементов архимедова K -линеала. Это важное понятие было введено И. П. Канторовичем. Оно является абстрактным аналогом понятия суперпозиции функций и играет важную роль как в самой теории линейных структур, так и в особенности в её приложениях. Например, оно, по существу, используется в теории меры (см. Бурбаки [2], тл. V, § 5) и в теории операторов. Это понятие исследовалось, в частности, в работах (Бухих [5], [6]), (Канторович, Бухих, Пинскер [1]), (Широков [1], [2]), причём даваемые там определения несколько отличаются друг от друга по степени общности. Определение функции от элементов линейной структуры может быть основано как на представлении K -пространства в виде K -пространства разложимой единицы, так и на представлении K -пространства с помощью вещественных непрерывных функций. Мы даём новое определение функции от элементов архимедова K -линеала (см. определения I.1.1 и I.1.7), основанное на второй идее, которое общее

известных ранее и, как нам кажется, проще и более приспособлено для приложений. Приведём наше определение для важнейшего случая (K -пространство-расширенное, функция - боровская).

Пусть W - расширенное K -пространство с фиксированной единицей $\mathbb{1}$, f - боровская функция, определённая на R^n .

Не умаляя общности, можно считать, что $W = C_\infty(Q)$, где $Q = Q(W)$ - экстремально несвязный компакт; $C_\infty(Q)$ - пространство всех вещественных непрерывных функций на Q .

которые могут принимать на нигде не плотных множествах значения $+\infty$ и $-\infty$; $\mathbb{1}$ - функция, тождественно равная единице на Q (см. гл. 0 § 2). Фиксируем любые $x_1, x_2, \dots, x_n \in C_\infty(Q)$.

Тогда (см. теорему I.1.3 и следствии I.1.4) существует единственный $x \in C_\infty(Q)$, такой что $x(q) = f(x_1(q), x_2(q), \dots, x_n(q))$ для всех $q \in Q$, кроме, может быть, некоторого подмножества первой категории из Q . Теперь полагаем $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \stackrel{\text{def}}{=} x$.

Тем самым, при нашем определении всякое расширенное K -пространство W замкнуто относительно операции взятия боровской функции от элементов из W ; при прежних определениях функции от элементов K -линейна это имело место лишь при некоторых ограничениях на W . Из других результатов этого параграфа отметили теорему I.1.18, дающую необходимые и достаточные условия для того, чтобы данный архимедов K -линейал X был замкнут относительно операции взятия непрерывной полиномиально однородной функции от элементов из X ; заметим, что в работе (Вуллик [5]), в которой исследовался этот вопрос, найдены лишь достаточные условия.

В § 2 гл. I строится реализация пространств регулярных функционалов. Полученные результаты (теоремы 1.20.20, 1.2.22 и 1.2.23) относятся к числу главных результатов диссертации. Напомним, что для любой банаховой структуры E банахово сопряжённое E^* совпадает с K -пространством \tilde{E} регулярных функционалов на E (см. Вулик [6], Теорема IX.4.5). Поэтому построенная нами реализация пространства \tilde{X} для произвольного K -пространства X является, в частности, и реализацией пространства E^* для произвольного банахова KW -пространства E . Тем самым, несмотря на то, что основным объектом этого параграфа является произвольное (не нормированное) K -пространство, результаты § 2 гл. I имеют самое непосредственное отношение к теме диссертации. Напомним, что пространство \tilde{X} линейных функционалов на произвольном K -пространстве X допускает простое представление в виде дуального пространства X' (см. гл. 0 § 5). Вопрос же о сколько-нибудь "удобном" представлении пространства \tilde{X} существенно более труден. До сих пор, насколько нам известно, за исключением хорошо известных классических случаев, такое представление было получено лишь для пространств X очень специального типа (см., например, Гретони [1] и Рао [1], [2]), причём методами, принципиально не допускающими обобщения на случай произвольного K -пространства X . Опишем теперь вкратце построенную нами реализацию. Пусть W - расширенное K -пространство с фиксированной единицей 1 , M - идеал ограниченных элементов в нём, X и Y - любые идеалы в W . Для $f \in \tilde{X}$, $u \in X_+$ полагаем $f_{(u)}(x) = f(xu)$, $x \in M$.

Ясно, что $f_{(u)} \in \tilde{M}$. Произвольные функционалы $f \in \tilde{X}, g \in \tilde{Y}$ будем называть **ДИЗЬЮНКТИВНЫМИ^{xx)}** (обозначение: $f \perp g$), если функционалы $f_{(u)} \cdot g_{(v)}$ **ДИЗЬЮНКТИВНЫ** в обычном смысле как элементы K -пространства \tilde{M} для любых $u \in X_+, v \in Y_+$. На этом определении **ДИЗЬЮНКТИВНОСТИ** функционалов, заданных на разных K -пространствах, основан наш метод построения реализации. Пусть в K -пространствах^{xx)} $\mathcal{M}(\tilde{X})$ и $\mathcal{M}(\tilde{M})$ фиксированы произвольные единицы Π_1 и Π_2 (соответственно).

Т е о р е м а 1.2.20. Существует единственная пара (R_X, V_X) , где V_X - компонента в $\mathcal{M}(\tilde{M})$, а R_X - изоморфизм K -пространства $\mathcal{M}(\tilde{X})$ на V_X , удовлетворяющая условиям:

1) Для любых $f \in \tilde{X}$ и $g \in \tilde{M}$ соотношения $f \perp g$ и $R_X f \perp g$ **равносильны^{xxx)}**.

$$2) R_X(\Pi_1) = P_{V_X} \Pi_2$$

Оператор R_X будем называть **КАНОНИЧЕСКОЙ РЕАЛИЗАЦИЕЙ** пространства \tilde{X} .

x) Подчеркнем, что о **ДИЗЬЮНКТИВНОСТИ** f и g в обычном смысле говорить нельзя, ибо они не являются элементами одного и того же K -пространства.

xx) Если Z есть произвольное K -пространство, то через $\mathcal{M}(Z)$ мы обозначаем его **максимальное расширение**.

xxx) То есть $(f \perp g) \iff (|R_X f| \wedge |g| = 0)$. Заметим, что здесь $R_X f$ и g суть элементы одного и того же K -пространства $\mathcal{M}(\tilde{M})$ и можно говорить об их **ДИЗЬЮНКТИВНОСТИ** в обычном смысле.

Теорема 1.2.22. Пусть $\{ \in \tilde{X} \}$. Тогда компонента в $\mathcal{M}(\tilde{M})$, порождённая элементом $R_x \{ \}$, совпадает с компонентой, порождённой множеством $\{ \{ (u) : u \in X_+ \} \}$.

Теорема 1.2.23. Для любых $\{ \in \tilde{X}, g \in \tilde{Y}$ справедливо:

$$(\{ Dg \}) \iff (R_x \{ dR_y g \}).$$

Итак, рассматривая различные идеалы в одном и том же K -пространстве W , мы смогли погрузить соответствующие пространства регулярных функционалов в одно K -пространство $\mathcal{M}(\tilde{M})$ и при этом так, что функционалы, дизъюнктные в обобщённом смысле (D) , переходят при погружении в элементы, дизъюнктные в обычном смысле.

Глава II называется "Преобразование банаховых структур с помощью вогнутых функций". Она состоит из восемнадцати параграфов: в §§ 1-6 приведены формулировки основных результатов, а в § 7-18 — их доказательства. В этой главе исследуется важная конструкция преобразования банаховых структур посредством вогнутых функций, введённая (для случая пространств измеримых функций) Кальдероном (см. Кальдерон [I]), и являющаяся широким обобщением известной конструкции пространств Орлица (см. Красносельский и Гулицкий [I]). Несмотря на довольно специальный характер, эта конструкция (по мнению автора диссертации) является весьма полезным средством исследования банаховых структур, особенно в тех ситуациях, когда одновременно рассматриваются несколько банаховых KN -пространств, являющихся идеалами в од-

ном и том же K -пространстве. Например, в формулировках теорем 2.5.1, 2.5.3, 2.5.5, 2.6.1 конструкция Кальдерона никоим образом не присутствует, но их доказательства основаны на её использовании. Наш метод исследования указанной конструкции принципиально отличается от метода Кальдерона: метод Кальдерона основан на теории аналитических функций комплексного переменного, а наш — на теории полуупорядоченных пространств, в особенности на аппарате канонических реализаций пространств регулярных функционалов, разработанном в гл. I § 2. В этой главе к числу главных результатов диссертации относятся теоремы 2.2.8, 2.2.12, 2.3.4, 2.4.2, 2.4.5, 2.4.6, в которых исследуется конструкция Кальдерона, а также теоремы 2.5.1, 2.5.3, 2.5.5, 2.6.1, посвящённые её приложениям.

На протяжении всей главы II W есть произвольное расширенное K -пространство с фиксированной единицей $1(W)$; M — идеал ограниченных элементов в нём; X_0 и X_1 — суть базисы EN -пространства, являющиеся идеалами в W ; s — произвольное число, такое что $0 < s < 1$.

В § I гл. II приведены основные определения и простейшие следствия из них. Через \mathcal{O}_2 обозначаем множество всех положительных, непрерывных, вогнутых функций $\varphi(\xi, \eta)$ на R_+ удовлетворяющих условиям: $\varphi(\xi, 0) = \varphi(0, \eta) = 0$ при $\xi, \eta \geq 0$
 $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \varphi(\xi, \alpha) = \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \varphi(\beta, \eta) = +\infty$ при $\xi, \eta > 0$. Через \mathcal{O}_2^0 обозначаем множество всех положительно однородных функций из \mathcal{O}_2 . Приведём теперь основное определение 2.1.7. Пусть $\varphi \in \mathcal{O}_2$. Через $\varphi(X_0, X_1)$ обозначаем множество всех $x \in W$, таких

что $|\alpha| \leq \lambda \varphi(|x_0|, |x_1|)$ для некоторого числа $\lambda \geq 0$ и ка-
ких-нибудь $x_i \in X_i$ с $\|x_i\|_{X_i} \leq 1$ ($i = 0, 1$). Через

$\|\alpha\|_{\varphi(x_0, x_1)}$ обозначаем инфимум всех возможных λ в
предыдущем неравенстве. Так, построенное пространство $(\varphi(X_0, X_1),$

$\|\cdot\|_{\varphi(x_0, x_1)})$ есть банахово KN-пространство и идеал в W .
Если $\varphi(\xi, \eta) = \xi^{1-s} \eta^s$, то вместо $\varphi(X_0, X_1)$ пишем $X_0^{1-s} X_1^s$.

В § 2 гл. II строится банахово сопряжённое и дуальное про-
странства к $X_0^{1-s} X_1^s$. Зафиксируем произвольно единицы в
пространствах $\mathcal{M}(\tilde{M}), \mathcal{M}(X_0^*), \mathcal{M}(X_1^*)$ и отождествим про-
странства X_0^*, X_1^* с их образами в $\mathcal{M}(\tilde{M})$ при соот-
ветствующих канонических реализациях. Теперь X_0^*, X_1^* суть
идеалы в $\mathcal{M}(\tilde{M})$ и можно образовать пространство $(X_0^*)^{1-s} (X_1^*)^s$
точно так же как пространство $X_0^{1-s} X_1^s$ строится из про-

странств X_0 и X_1 . Тогда (см. теорему 2.2.8) в $\mathcal{M}((X_0^{1-s} X_1^s)^*)$
единицу можно выбрать так, что после отождествления пространств
ва $(X_0^{1-s} X_1^s)^*$ с его образом в $\mathcal{M}(\tilde{M})$ при соответствуй-
щей канонической реализации, равенство $(X_0^{1-s} X_1^s)^* = (X_0^*)^{1-s} (X_1^*)^s$

будет иметь место по запасу элементов и по норме. Заметим, что
в работе (Кальдерон [1]) с помощью векторнозначных аналитиче-
ских функций получено некоторое представление пространства

$(X_0^{1-s} X_1^s)^*$ через X_0^* и X_1^* . Но лишь при довольно тяжё-
лых ограничениях на X_0 и X_1 (в частности, требуется, чтобы
 $X_0 \cap X_1$ было плотно в $X_0^{1-s} X_1^s$) ; в нашей же теореме
2.2.8 никаких ограничений на X_0 и X_1 не накладывается.

Далее, говоря о результатах гл. II, всегда будем считать,
что в W существует фундамент L , являющийся KB-про-

пространством с аддитивной нормой; через J обозначаем функционал, задающий норму на L .

Пусть X есть произвольное банахово $\mathbb{K}\mathbb{N}$ -пространство, являющееся идеалом в W , и пусть W_X — компонента в W , порождённая X . Пространство X' — ДУАЛЬНОЕ К X , состоит из всех $x' \in W_X$, таких что $xx' \in L$ для любого $x \in X$. Норма на X' определяется формулой

$$\|x'\|_{X'} = \sup \{ J(|xx'|) : x \in X, \|x\|_X \leq 1 \}, x' \in X'.$$

Следующая теорема о дуальных пространствах усиливает некоторые результаты работы (Крейн, Петушин, Семёнов [I]).

Т е о р е м а 2.2.12. Равенство $(X_0^{1-s} X_1^s)' = (X_0')^{1-s} (X_1')^s$ имеет место как по запасу элементов, так и по норме^{X)}.

В § 3 гл. II рассматривается частный случай основной конструкции — степенное преобразование норм. Пусть X есть произвольное банахово $\mathbb{K}\mathbb{N}$ -пространство, p — произвольное число, такое что $1 < p < +\infty$. Зафиксируем в $\mathcal{M}(X)$ произвольную единицу и положим $X_p = \{x \in \mathcal{M}(X) : |x|^p \in X\}$ и $\|x\|_{X_p} = (\| |x|^p \|_X)^{\frac{1}{p}}$ для $x \in X_p$. В теореме 2.3.4 приведены некоторые свойства пространства X_p ; в частности, ПРОСТРАНСТВО $(X_p)^{**}$ АЛГЕБРАТИЧЕСКИ И ПОРЯДКОВО ИЗОМОРФНО И ИЗМЕТРИЧНО ПРОСТРАНСТВУ $(\overline{X^*})_p$, где $\overline{X^*}$ есть пространство всех

X) Подчеркнём, что здесь как и в теореме 2.2.8 X_0 и X_1 — произвольные банаховы $\mathbb{K}\mathbb{N}$ -пространства, являющиеся идеалами в W ; никаких ограничений на них не накладывается.

многие линейных функционалов на X^* , а $(\overline{X^*})_\rho$ получается из $\overline{X^*}$ точно так же как X_ρ получается из X .

В § 4 гл. II изучаются пространства $\Psi(X_0, X_1)$ для произвольной $\Psi \in \mathcal{O}_2$. В теореме 2.4.2 приводятся некоторые полезные свойства пространства $\Psi(X_0, X_1)$ для случая, когда $\Psi \in \mathcal{O}_2^0$; например, если нормы $\|\cdot\|_{X_i}$ ($i=0,1$) универсально полунепрерывны и универсально монотонно полны, то этими же двумя свойствами обладает и норма $\|\cdot\|_{\Psi(X_0, X_1)}$.

Пара функций (Ψ_1, Ψ_2) , где $\Psi_1, \Psi_2 \in \mathcal{O}_2$, называется согласованной, если

$$((\Psi_1(X_0, X_1))', \|\cdot\|_{(\Psi_1(X_0, X_1))'}) = (\Psi_2(X'_0, X'_1), \|\cdot\|_{\Psi_2(X'_0, X'_1)})$$

при всевозможных $W, \mathbb{1}(W), L, X_0, X_1$.

Пара функций (Ψ_1, Ψ_2) , где $\Psi_1, \Psi_2 \in \mathcal{O}_2$, называется слабо согласованной, если равенство

$$(\Psi_1(X_0, X_1))' = \Psi_2(X'_0, X'_1)$$

имеет место на запасе элементов при всевозможных $W, \mathbb{1}(W), L, X_0, X_1$.

Оказывается (теорема 2.4.5), что все согласованные пары суть $\Psi_1(\xi, \eta) = A\xi^{1-s}\eta^s, \Psi_2(\xi, \eta) = A^{-1}\xi^{1-s}\eta^s$, где $A \in (0, +\infty), s \in (0,1)$ - любые. Слабо согласованных пар существенно больше. Это те и только те пары, которые в определенном смысле эквивалентны парам вида $(\Psi, \hat{\Psi})$, где $\Psi \in \mathcal{O}_2^0$ - произвольна, а

$$\hat{\Psi}(\xi, \eta) = \inf_{\alpha, \beta > 0} \frac{\alpha\xi + \beta\eta}{\Psi(\alpha, \beta)}, (\xi, \eta) \in \mathbb{R}_+^2$$

(см. теорему 2.4.6).

Наконец, отметим теорему 2.4.1 о строении пространства $(\Psi(X_0, X_1))^*$. Эта теорема, носившая до известной степени технический характер, является ключом к остальным результатам этого параграфа и в её доказательстве преодолены основные идейные и технические трудности, связанные с получением упомянутых результатов.

В § 5 гл. II содержатся приложения результатов § 2 гл. II к общей теории банаховых структур.

Пусть X есть произвольное банахово KN -пространство, являющееся фундаментом в W .

Через X_{ant}^* обозначается множество всех АНТИНОРМАЛЬНЫХ функционалов на X , то есть $X_{ant}^* = \{f \in X^* : |f| \wedge |h| = 0 \text{ для любого } h \in \bar{X}\}$, где \bar{X} есть пространство всех вполне линейных функционалов на X .

Т е о р е м а 2.5.1. Для любых $f \in X_{ant}^*$ и $g \in (X')_{ant}^*$ справедливо $f \perp g$, то есть f и g дизъюнктивны в обобщённом смысле.

Т е о р е м а 2.5.3. I) Для любого $z \in L$ и любого числа $\varepsilon > 0$ найдутся такие $x \in X, x' \in X'$, что $z = \varepsilon x x'$ и $\|z\|_L \geq (1 - \varepsilon) \|x\|_X \cdot \|x'\|_{X'}$.

2) Если норма в X универсально полунепрерывна и универсально монотонно полна, то утверждение I) допускает следующее усиление: для любого $z \in L$ найдутся такие $x \in X, x' \in X'$, что $z = x x'$ и $\|z\|_L = \|x\|_X \cdot \|x'\|_{X'}$.

В связи с теоремой 2.5.3 заметим, что если $z \in L, x \in X, x' \in X'$ и $z = x x'$, то $\|z\|_L \leq \|x\|_X \cdot \|x'\|_{X'}$ тривиальным образом.

Наконец, отметим следующий результат (см. теорему 2.5.5 и замечание 2.5.6): ВСЯКОЕ БАНАХОВО KN -ПРОСТРАНСТВО X ЯВЛЯЮЩЕЕСЯ ФУНДАМЕНТОМ В $S[0,1]$, ПУТЁМ УМНОЖЕНИЯ НА НЕКОТОРУЮ "БЕСОВУЮ" ФУНКЦИЮ МОЖНО ПРЕВРАТИТЬ В ТАКОЕ ЖЕ ПРОСТРАНСТВО, ПО "ЗАДАТОЕ" МЕЖДУ $L^\infty[0,1]$ И $L^1[0,1]$. Точнее говоря, НАЙДЕТСЯ $\psi \in S[0,1], \psi > 0$, ТАКОЙ ЧТО $L^\infty[0,1] \subset \{x\psi : x \in X\} \subset L^1[0,1]$.

В § 6 гл. II приведены два результата о банаховых пространствах с безусловными базисами, которые являются следствиями теоремы 2.5.3. Сформулируем один из них. Пусть E есть банахово пространство с безусловным базисом $\{e_k\} = \{f_k\}$ — ортогональная с $\{e_k\}$ система линейных непрерывных функционалов. ТОГДА (теорема 2.6.1) СУЩЕСТВУЕТ КОНСТАНТА

$c > 0$, ОБЛАДАЮЩАЯ СЛЕДУЮЩИМ СВОЙСТВОМ: ДЛЯ ЛЮБОЙ ЧИСЛОВОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ $\lambda = \{\lambda_k\} \in \ell^1$ НАЙДУТСЯ ЧИСЛОВЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ $\{u_k\}, \{v_k\}$, ТАКЖЕ ЧТО 1) $u_k v_k = \lambda_k$ ПРИ ВСЕХ k ; 2) РЯДЫ $\sum_k u_k e_k, \sum_k v_k f_k$ СХОДЯТСЯ ПО НОРМАМ ПРОСТРАНСТВ E И E^* К НЕКОТОРЫМ $x \in E$ И $f \in E^*$; 3) СПРАВЕДИЛИВО НЕРАВЕНСТВО $\|\lambda\|_{\ell^1} \geq c \|x\|_E \cdot \|f\|_{E^*}$.

Глава II называется "О линейно-топологических свойствах банаховых структур". Она состоит из четырёх параграфов. Хорошо известно, что банахова топология KN -линеала полностью определяется имеющимся в нём частичным упорядочением. Точнее говоря (см. теорему 0.3.1), любые две монотонные банаховы нормы, заданные на одном и том же K -линеале, — эквивалентны, то есть определяемые ими топологии совпадают. Напротив, банахова

топология KV -линеала несёт мало информации об его остальных свойствах. Дело в том, что если некоторое банахово пространство можно превратить в KV -линеал путём введения в нём частичного упорядочения и эквивалентной перенормировки, то такое превращение обычно неединственно. Например, бесконечномерное сепарабельное гильбертово пространство можно превратить как в $L^2[0,1]$, так и в ℓ^2 . Тем не менее, некоторые свойства частичного упорядочения в KV -линеале всё же полностью определяются его банаховой топологией. Классическим результатом в этом направлении является теорема Огасавара (см. теорему 0.3.8): KV -линеал является KV -пространством тогда и только тогда, когда он слабо секвенциально полон. Полученные нами в этом направлении результаты (теоремы 3.1.2, 3.1.8, 3.2.1, 3.3.1 и 3.4.12) относятся к числу главных результатов диссертации.

Всюду в этой главе термины "изоморфизм", "сепарабельность", "подпространство" используются исключительно в смысле теории линейных топологических пространств, а не теории полуупорядоченных пространств.

В § I гл. III изучается одно из важнейших свойств банаховых структур — непрерывность нормы (условие (A) Л. В. Канторовича). Доказана следующая

Т е о р е м а 3.1.2. Для любого банахова K_0N -пространства X следующие утверждения эквивалентны:

- (а) в X выполнено условие (A), то есть $(x_n \downarrow 0) \implies (\|x_n\| \rightarrow 0)$;
- (б) в X выполнено условие (U) Пелчиньского (см.

Пелчиньский [1]), то есть для любой слабо фундаментальной последовательности $\{x_n\}$ в X существует такая последовательность $\{y_n\}$ в X , что $\sum_{n=1}^{\infty} |f(y_n)| < \infty$ и $\sum_{n=1}^{\infty} f(y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$ для любого $f \in X^*$;

(в) в X нет подпространств изоморфных пространству l^{∞} ;

(г) в X нет подпространств изоморфных пространству $C[0,1]$;

(д) в X нет подпространств изоморфных пространству Дэйвиса J (см. Дэй [1], стр. 123).

Заметим, что эквивалентность (а) \iff (б), являющаяся самым слабым из утверждений теоремы, приведена в работе (Андо [2]), но доказательство Андо содержит принципиальную ошибку.

Отметим также следующий результат этого параграфа: ВСЯКОЕ БАНАХОВО КМ-ПРОСТРАНСТВО X , В КОТОРОМ ВЫПОЛНЕНО УСЛОВИЕ (А), НО НЕ ВЫПОЛНЕНО УСЛОВИЕ (В) Л. В. КАПТОРОВИЧА, НЕ ИЗОМОРФНО НИКАКОМУ СОПРЯЖЕННОМУ БАНАХОВУ ПРОСТРАНСТВУ (теорема 3.1.3). Этот результат находит применение в теории пространства Марцинкевича и Орлика (см. теорему 3.1.11).

В § 2 гл. III доказана следующая

Т е о р е м а 3.2.1. Пусть X — банахово КМ-пространство с тождественным \bar{X} . В предположении справедливости континуум-гипотезы следующие утверждения эквивалентны:

(а) X — счётного типа;

(б) в X нет подпространства, изоморфного пространству l^{∞}_N , где N — множество мощности континуума;

(в) Существует такое множество $\mathcal{X} \subset X^*$, что \mathcal{X} тотально на X и для любого $x \in X$ множество $\{f \in \mathcal{X} : f(x) \neq 0\}$ не более чем счётно.

В § 3 гл. III дан критерий слабой* секвенциальной компактности единичного шара пространства X^* для произвольного банахова K_N -пространства X (теорема 3.3.1).

Наконец, в § 4 гл. III найдена линейно-топологическая характеристика пространства \bar{X}^* всех вполне линейных функционалов на X^* , где X есть произвольный K_N -линеал (теорема 3.4.12).

Именно, для любого нормированного пространства E через $(E^{**})^{\mathcal{F}}$ обозначаем совокупность всех $F \in E^{**}$, таких что $\sum_{t \in T} F(f_t) = 0$ для любого семейства $\{f_t : t \in T\}$ в E^* удовлетворяющего условиям:

$$(a) \sum_{t \in T} |G(f_t)| < +\infty \quad \text{для любого } G \in E^{**}$$

$$(b) \sum_{t \in T} f_t(x) = 0 \quad \text{для любого } x \in E$$

Т е о р е м а 3.4.12. Для любого K_N -линеала X справедливо равенство $\bar{X}^* = (X^{**})^{\mathcal{F}}$.

Глава IV называется "О (β) -сопряжённом пространстве к банаховой структуре и некоторых его подпространствах". Она состоит из шести параграфов. В этой главе рассматриваются разного рода вопросы, относящиеся к строению и свойствам (β) -сопряжённого пространства X^* к банаховому K_N -пространству X . Из результатов этой главы теоремы 4.1.4, 4.3.1 и 4.6.4 относятся к числу главных результатов диссертации.

В § I гл. IV изучаются вполне линейные функционалы на произвольном $\mathbb{K}N$ -пространстве X . Элемент $x \in X$ назовём сильным, если существует $f \in \bar{X} \cap X^*$, такой что $\|f\|_{X^*} = 1$ и $f(x) = \|x\|_X$.

Теорема 4.1.4. Пусть X — $\mathbb{K}N$ -пространство с топологией \bar{X} . Следующие утверждения эквивалентны:

(а) Норма в X универсально полунепрерывна;

(б) Для любого $x \in X$ и любого числа $\varepsilon > 0$ найдётся сильный элемент $y \in X$, такой что $\|x - y\|_X < \varepsilon$;

(в) Для любого $x \in X_+$ и любого числа $\varepsilon > 0$ найдётся сильный элемент $y \in X$, такой что $(1 - \varepsilon)x \leq y \leq (1 + \varepsilon)x$;

(г) Для любого $x \in X_+$ и любого числа $\varepsilon > 0$ найдутся сильные элементы $y, z \in X$, такие что

$$(1 - \varepsilon)x \leq y \leq x \leq z \leq (1 + \varepsilon)x.$$

Эта теорема является усилением одной важной теоремы Морр, Аменга, Накано (см. теорему 0.4.3).

В § 2 гл. IV рассматриваются в основном аномальные функционалы. Введён и изучен новый класс аномальных функционалов ("локализованные функционалы"). Приведём определение локализованного функционала для случая \mathbb{K} -пространства. Пусть X есть \mathbb{K} -пространство, регулярный функционал f на X называется локализованным, если для любой компоненты $K \neq \{0\}$ пространства X найдётся такая компонента $K_1 \neq \{0\}$ в X , что $K_1 \subset K$ и $f(x) = 0$ для любого $x \in K_1$. Показано, в частности, что в наиболее важных случаях всякий аномальный функционал счётного типа — локализованный (теорема 4.2.12). Понятие

локализованного функционала неоднократно используется в §§ 4-6 этой главы.

В § 3 гл. IV рассматриваются в основном особенности строения пространства X^* для того случая, когда X есть банахово K_0N -пространство, не удовлетворяющее^{x)} условию (A).

Т е о р е м а 4.3.1. Пусть X есть банахово K_0N -пространство, в котором не выполнено условие (A), и пусть $Y = X_{\text{ant}}^*$. Тогда

(а) В Y нет слабой единицы;

(б) В Y существует множество ненулевых попарно дизъюнктивных элементов, имеющее мощность континуума;

(в) Пространство \bar{Y} не есть пространство счётного типа, более того, в \bar{Y} существует порядково ограниченное множество ненулевых попарно дизъюнктивных элементов, имеющее мощность континуума.

В этом же параграфе приведены два критерия (b)-рефлексивности K_0 -линеала (предложения 4.3.6 и 4.3.7), а также найдены критерии дискретности и непрерывности пространства X^* для произвольного банахова K_0N -пространства X (теоремы 4.3.12 и 4.3.14). Отметим также следующий результат, являющийся усилением одного результата Т. Шимогаки (см. Шимогаки [1]):

x) В случае, когда X есть банахово K_0N -пространство, удовлетворяющее условию (A), справедливо равенство $X^* = X$, тем самым пространство X^* может быть отождествлено с дуальным пространством X' . Поэтому изучение свойств пространства X^* для случая, когда X удовлетворяет условию (A), есть задача существенно более простая, чем для случая, когда X условию (A) не удовлетворяет.

ЕСЛИ X ЕСТЬ КВ-ЛИНЕАЛ С ТОТАЛЬНЫМ \bar{X} И ЕСЛИ \bar{X} ЕСТЬ КВ-ПРОСТРАНСТВО, ТО И X ЕСТЬ КВ-ПРОСТРАНСТВО (теорема 4.3.8 и следствии 4.3.9).

В §§ 4 и 5 гл. IV методами теории полуупорядоченных пространств изучаются (β) -сопряженные пространства к пространствам Марцинкевича $M(\psi)$ и к пространствам со смешанной нормой $L^{(p,q)}$ (определения этих пространств приведены в гл. 0 § 6). В частности, найдены необходимые и достаточные условия для того, чтобы $M(\psi)^*$ и $(L^{(p,q)})^*$ были КВ-пространствами, пространствами счѐтного типа; показано, что все аномальные функционалы на $L^{(p,q)}$ — локализованные, но (в предположении справедливости континуум-гипотезы) на $M(\psi)$ могут существовать аномальные не локализованные функционалы (теоремы 4.4.2 и 4.5.1).

Наконец, в § 6 гл. IV рассматривается задача проектирования банаховой структуры на её замкнутый идеал: при этом используется уже упоминавшееся понятие локализованного функционала. В частности, доказана следующая теорема, являющаяся обобщением одного результата Т. Андо (см. Андо [3]).

Т е о р е м а 4.6.4. Пусть X есть банахово KN -пространство, Y — его замкнутый по норме идеал, удовлетворяющий условию (A). Если Y не является компонентой в X , то не существует банахова проектора^{х)} из X на Y .

х) Если X — произвольное KN -пространство, Y — любая его компонента, то банахов проектор из X на Y существует тривиальным образом (см. Булих [6], гл. IV, § 3).

В этом же параграфе получен ещё один результат отрицательного характера (теорема 4.6.1), который затем применяется к пространствам Орлица (теорема 4.6.2) и к пространствам со смешанной нормой (теорема 4.6.3).

В конце диссертации имеется приложение, в котором с помощью результатов гл. II доказана теорема об интерполяции линейных операторов в пространствах типа $X_0^{1-s} X_1^s$, уточняющая основную теорему работы (Забрейко [1]).

Все результаты диссертации докладывались по мере получения на семинаре Б.З. Вулфа по полунормированным пространствам при Ленинградском университете. Отдельные результаты диссертации докладывались также на заседаниях Ленинградского математического общества, на семинаре С.Г. Крейна по функциональному анализу при Воронежском университете и на семинаре Д.А. Гайнова по топологическим векторным пространствам при Московском университете.

Основные результаты диссертации изложены в работах (Мозановский [4], [6] - [12], [15] - [18]). Некоторые вспомогательные сведения содержатся также в других работах автора, приведённых в списке литературы.

Глава 0

ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ, ТЕРМИНОЛОГИЯ, ОБОЗНАЧЕНИЯ

Множество всех натуральных чисел обозначается через \mathbb{N} .
Пустое множество обозначается через \emptyset . Кардинальное число
произвольного множества Γ обозначается через $\text{Card } \Gamma$.
Характеристическая функция подмножества A данного фиксиро-
ванного множества E обозначается через χ_A . Если T
есть топологическое пространство, то $C(T)$ означает множест-
во всех вещественных непрерывных функций на T , при этом
 $C(T)$ может рассматриваться как линейное множество, линейная
структура и т.д. Под БИКОМПАКТМ или КОМПАКТМ (оба термина
используются как синонимы) понимается бикompактное хаусдор-
фово пространство. Через \mathbb{R}^n обозначается n -мерное
вещественное арифметическое евклидово пространство. Прочие
термины и обозначения из теории множеств и общей топологии
используются в смысле монографии (Александров [1]).

§ 1. Общая теория линейных структур

В терминологии и обозначениях из теории полуупорядочен-
ных пространств мы в основном следуем монографии Б. З. Вулиха
(см. Вулих [6]).

I. Под **КОНУСОМ** в линейном пространстве X , как обычно, понимается любое $K \subset X$, такое что $K \cap (-K) = \{0\}$ и для любых $\alpha, \beta \in [0, +\infty)$ справедливо $\alpha K + \beta K \subset K$.

K-ЛИНЕАЛОМ называется линейная структура (другие названия: векторная структура, векторная решетка, пространство Рисса).

K_б-ПРОСТРАНСТВОМ называется условно б-полный K-линеал, то есть такой K-линеал, в котором всякое счетное ограниченное сверху подмножество имеет верхнюю грань (точную верхнюю границу).

K-ПРОСТРАНСТВОМ называется условно полный K-линеал, то есть такой K-линеал, в котором всякое непустое ограниченное сверху подмножество имеет верхнюю грань.

Конус положительных элементов K-линеала X будем обозначать через X_+ , таким образом, $X_+ = \{x : x \in X, x \geq 0\}$.

ПОРЯДКОВЫМ ИНТЕРВАЛОМ в K-линеале X называется всякое множество вида $\{x \in X : x_1 \leq x \leq x_2\}$, где $x_1 \leq x_2$ ($x_1, x_2 \in X$).

Два элемента x, y K-линеала X называются **ДИЗЬОНКТНЫМИ** (обозначение: $x \text{ d } y$), если $|x| \wedge |y| = 0$. Два множества $E_1, E_2 \subset X$ называются **ДИЗЬОНКТНЫМИ** ($E_1 \text{ d } E_2$), если любой элемент $x \in E_1$ дизьонктен любому $y \in E_2$. Наконец, элемент $x \in X$ называется **ДИЗЬОНКТНЫМ** с множеством $E \subset X$ ($x \text{ d } E$), если $x \text{ d } y$ для любого $y \in E$.

Если E -произвольное множество из K-линеала X , то его **ДИЗЬОНКТНЫМ ДОПОЛНЕНИЕМ** называется множество E^d , состоящее из всех $x \in X$, дизьонктных с множеством E .

Подмножество E K -линеала X называется **ПОЛНЫМ** в X , если $E^d = \{0\}$.

Линейное подмножество U K -линеала X называется **ЛИНЕЙНОЙ ПОДСТРУКТУРОЙ** в X , если для любых $x, y \in U$ справедливо $x \vee y, x \wedge y \in U$.

Линейное подмножество U K -линеала X называется **ИДЕАЛОМ** или **НОРМАЛЬНЫМ ПОДЛИНЕАЛОМ** в X (оба термина используются как синонимы), если $\forall x \in X \forall y \in U (|x| \leq |y| \Rightarrow x \in U)$.

Идеал U K -линеала X называется **ФУНДАМЕНТОМ** в X , если он полон в X , то есть если $U^d = \{0\}$.

Пусть X - K -линеал, $u \in X$. **ГЛАВНЫМ ИДЕАЛОМ** в X порождённым элементом u , называется **наименьший идеал** в X , содержащий u . Он обозначается через X_u и состоит из всех $x \in X$, таких что $|x| \leq \lambda |u|$ для некоторого $\lambda \in [0, +\infty)$.

Пусть X - произвольный K -линеал. **КОМПОНЕНТОЙ** в X называется всякое $U \subset X$, являющееся **дизъюнктивным дополнением** какого-нибудь $E \subset X$. Иными словами, множество $U \subset X$ называется **компонентой** в X , если $U = U^{dd}$, где $U^{dd} = (U^d)^d$. Множество всех компонент K -линеала X будем обозначать через $\mathcal{C}(X)$. Напомним, что $\mathcal{C}(X)$ образует (по включению) полную булеву алгебру.

Если X есть архимедов K -линеал, то множество $U \subset X$ является компонентой в X тогда и только тогда, когда U есть идеал в X и выполнено следующее условие (называемое **УСЛОВИЕМ ПРАВИЛЬНОСТИ**): если $E \subset U$ и в X существует $\sup E (in \notin E)$, то $\sup E \in U (in \notin E \in U)$.

ГЛАВНОЙ КОМПОНЕНТОЙ в K -линеале X , порождённой элементом $u \in X$, называется наименьшая компонента в X , содержащая u .

Множество компонент $X_\xi (\xi \in \Sigma)$ K -линеала X называется ПОЛНЫМ в X , если в X не существует элемента, отличного от 0 и дельфинского с X_ξ при всех $\xi \in \Sigma$.

Пусть X — K -линеал, $x \in X, u \in \mathcal{O}(X)$. Если x можно представить в виде $x = y + z$, где $y \in u$, а $z \perp u$, то y называется ПРОЕКЦИЕЙ элемента x на u и обозначается $Pz_y x$. При этом, если u есть главная компонента, порождённая элементом $u \in X$, то проекцию x на u обозначают также через $(u) x$.

Пусть x — произвольный элемент K -линеала X . ОСКОЛКОМ элемента x называется всякий $x' \in X$, являющийся проекцией x в какую-нибудь компоненту. Иными словами, x' называется осколком элемента x , если $(x - x') \perp x'$.

ЕДИНИЦЕЙ или СЛАБОЙ ЕДИНИЦЕЙ в произвольном K -линеале (оба термина используются как синонимы) называется всякий элемент $u \geq 0$, такой что $x \wedge u > 0$ для любого $x > 0 (x \in X)$. Если в K -линеале X фиксирована какая-нибудь единица, то её, как правило, будем обозначать через $\mathbb{1}(X)$, или, если это не может вызвать недоразумений, просто через $\mathbb{1}$ (возможно с индексами).

Пусть X — K -линеал с фиксированной единицей $\mathbb{1}$. Элемент $e \in X$ называется ЕДИНИЦЫМ, если он является осколком элемента $\mathbb{1}$, то есть если $e \wedge (\mathbb{1} - e) = 0$. Совокупность

всех единичных элементов называется БАЗОЙ K -линеала X и обозначается $\epsilon(X)$.

Единица $\mathbb{1}$ в K -линеале X называется СИЛЬНОЙ, если для любого $x \in X$ существует $\lambda \in [0, +\infty)$ такое, что $|x| \leq \lambda \mathbb{1}$.

K -линеал, содержащий слабую единицу, называется K -ЛИНЕАЛОМ С ЕДИНИЦЕЙ.

Архимедов K -линеал с сильной единицей называется K -ЛИНЕАЛОМ ОГРАНИЧЕННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ.

Пусть X есть K_σ -пространство с фиксированной единицей $\mathbb{1}$. СЛЕДОМ элемента $x \in X$ (обозначается e_x) называется проекция единицы $\mathbb{1}$ на главную компоненту в X порождённую элементом x . Таким образом, $e_x = \langle x \rangle \mathbb{1}$.

Элемент x K -линеала X будем называть ЭЛЕМЕНТОМ СЧЁТНОГО ТИПА, если любое множество ненулевых, попарно дизъюнктивных, положительных и не превосходящих $|x|$ элементов из X не более чем счётно. K -ЛИНЕАЛОМ СЧЁТНОГО ТИПА называется K -линеал, все элементы которого счётного типа. Иными словами, K -линеал X называется K -линеалом счётного типа, если всякое ограниченное подмножество попарно дизъюнктивных его элементов, отличных от 0 , не более, чем счётно.

2. Пусть X - произвольный K -линеал, $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$ - направление в X . Запись $x_\alpha \uparrow$ означает, что это направление монотонно возрастает, то есть что $x_{\alpha_1} \leq x_{\alpha_2}$ при $\alpha_1 \preccurlyeq \alpha_2$ ($\alpha_1, \alpha_2 \in A$). Запись $x_\alpha \uparrow x$ где $x \in X$, означает, что $x_\alpha \uparrow$ и $\sup \{x_\alpha : \alpha \in A\} = x$. Двойственным образом определяется запись $x_\alpha \downarrow$ и $x_\alpha \downarrow x$. Пусть теперь $x_\alpha \geq 0$

при всех $\alpha \in A$. Запись $x_\alpha \uparrow$ означает, что $x_\alpha \uparrow$ и x_{α_1} есть осколок элемента x_{α_2} при всех $\alpha_1 \leq \alpha_2$ ($\alpha_1, \alpha_2 \in A$). Запись $x_\alpha \uparrow x$, где $x \in X$, означает, что $x_\alpha \uparrow$ и $\sup \{x_\alpha : \alpha \in A\} = x$. Двойственным образом определяется запись $x_\alpha \downarrow$ и $x_\alpha \downarrow x$.

Последовательность $x_n \in X$ ($n \in \mathbb{N}$) называется (0) -сходящейся к элементу $x \in X$ (обозначение: $x_n \xrightarrow{(0)} x$), если существуют последовательности $y_n, z_n \in X$ ($n \in \mathbb{N}$), такие что $y_n \uparrow x, z_n \uparrow x$ и $z_n \leq x_n \leq y_n$ при всех $n \in \mathbb{N}$.

Направление $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$ в X называется (0) -сходящимся к элементу $x \in X$ (обозначение: $x_\alpha \xrightarrow{(0)} x$), если существуют направления $\{y_\beta\}_{\beta \in B}, \{z_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ в X , удовлетворяющие условиям: $y_\beta \uparrow x, z_\gamma \uparrow x$ и для любых $\beta_0 \in B, \gamma_0 \in \Gamma$ найдётся $\alpha_0 \in A$ такое что $z_{\gamma_0} \leq x_\alpha \leq y_{\beta_0}$ при всех $\alpha \geq \alpha_0$.

Пусть X есть архимедов K -линеал. Последовательность $x_n \in X$ ($n \in \mathbb{N}$) называется (2) -сходящейся к элементу $x \in X$ или сходящейся с регулятором к x (обозначение: $x_n \xrightarrow{(2)} x$), если найдётся $z \in X_+$, называемый регулятором сходимости, такой что $|x - x_n| \leq \varepsilon_n z$ ($n \in \mathbb{N}$), где $\varepsilon_n \in [0, +\infty)$ и $\varepsilon_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Последовательность $x_n \in X$ ($n \in \mathbb{N}$) называется (2) -фундаментальной, если найдётся $z \in X_+$ и последовательность $\varepsilon_n \in [0, +\infty)$ ($n \in \mathbb{N}$), такие что: $|x_m - x_n| \leq \varepsilon_n z$ при всех $m \geq n$ ($m, n \in \mathbb{N}$) и $\varepsilon_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Архимедов K -линеал X называется (2) -полным, если всякая (2) -фундаментальная последовательность его элементов оказывается (2) -сходящейся. (2) -полные K -линеалы изучались, например, в работе (Векслер [1]).

Пусть X - архимедов K -линеал. E - произвольное

подмножество в X . Множество E называется (\mathcal{Z}) -ЗАМКНУТЫМ в X , если из того что $x_n \in E (n \in \mathbb{N}), x_n \xrightarrow{(\mathcal{Z})} x \in X$ следует, что $x \in E$.

Напомним следующий известный факт. Пусть X - архимедов K -линеал, Y - его идеал. Для того чтобы факторлинеал X/Y был архимедов, необходимо и достаточно, чтобы Y был (\mathcal{Z}) -замкнут в X (о понятии факторлинеала см., например, Биркгоф [1]).

3. Для произвольного архимедова K -линеала X через \hat{X} обозначается его K -ПОПОЛНЕНИЕ по Дедекинду-Одину (см. Булик [6], стр. 125-130), которое получается обычным методом сечений. Мы всегда будем считать, что X содержится в \hat{X} естественным образом как линейная подструктура.

4. K_δ -пространство с единицей называется РАСШИРЕННЫМ, если в нём всякое счётное множество попарно дизъюнктивных элементов ограничено (и, следовательно, имеет супремум и инфимум). Для того чтобы K -пространство было расширенным, необходимо и достаточно, чтобы в нём всякое (а не только счётное) множество попарно дизъюнктивных элементов было ограничено.

МАКСИМАЛЬНОЕ РАСШИРЕНИЕ K -пространства X обозначается через $\mathcal{M}(X)$; $\mathcal{M}(X)$ является расширенным K -пространством, содержащим X в качестве фундамента.

5. Пусть X есть расширенное K_δ -пространство с фиксированной единицей 1 . Известно (см. Булик [6], гл. V § 8), что в X естественным образом определена операция умножения элементов, превращающая X в полуупорядоченное кольцо.

Б.3. Вулицком было введено понятие обратного элемента в полуупорядоченном пространстве (см. Вулицк [I]-[4]).

Именно, пусть $x \in X$. Тогда существует и единственен элемент $y \in X$, такой что $e_y = e_x$ и произведение $xy = e_x$. Этот элемент y называется элементом, ОБРАТНЫМ по отношению к x , и обозначается через x^{-1} .

Заметим, что операция умножения элементов и понятие обратного элемента в расширенном K_G -пространстве с фиксированной единицей приобретают весьма простой и наглядный смысл, если воспользоваться реализациями упомянутого пространства на соответствующем бикомпакте (см. следующий параграф).

6. Аддитивный и однородный функционал f на K -линейном пространстве X называется ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМ (обозначение: $f \geq 0$), если $f(x) \geq 0$ при всех $x \in X_+$.

§ 2. Реализация линейных структур

1. Бикомпакт Q называется ЭКСТРЕМАЛЬНО НЕСВЯЗНЫМ или ЭКСТРЕМАЛЬНЫМ, если замыкание всякого открытого множества из Q - открыто-замкнуто^{х)}.

Бикомпакт Q называется КВАЗИЭКСТРЕМАЛЬНО НЕСВЯЗНЫМ или КВАЗИЭКСТРЕМАЛЬНЫМ, если замыкание всякого открытого типа F_G множества из Q - открыто-замкнуто.

До конца этого пункта пусть Q есть произвольный квазиэкстремальный бикомпакт.

^{х)} Множество называется ОТКРЫТО-ЗАМКНУТЫМ, если оно одновременно является как открытым, так и замкнутым.

Через $C_\infty(Q)$ обозначается множество всех вещественных непрерывных функций на Q , которые могут принимать на нигде не плотных множествах значения $+\infty$ и $-\infty$. В множестве $C_\infty(Q)$ естественным образом вводятся алгебраические операции, например, для любых $x_1, x_2 \in C_\infty(Q)$ их сумма $x_1 + x_2$ есть такой элемент $x \in C_\infty(Q)$, что $x_1(t) + x_2(t) = x(t)$ для всех $t \in Q$, таких что x_1, x_2, x конечны в точке t (указанный элемент x существует и единственен). При естественном частичном упорядочении $C_\infty(Q)$ оказывается расширенным K_0 -пространством. Если Q - экстремальный бикомпакт, то $C_\infty(Q)$ есть расширенное K -пространство.

Через $\Omega = \Omega(Q)$ будем обозначать совокупность всех множеств вида $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$, где A - открыто-замкнуто, а B - первой категории в Q . Известно, что Ω есть σ -алгебра множеств, Ω содержит все борелевские подмножества^{х)} из Q , и факторалгебра алгебры Ω по σ -идеалу всех подмножеств первой категории из Q изоморфна булевой алгебре всех открыто-замкнутых подмножеств бикомпакта Q (см., например, Сикорский [1], гл. II). Через $\mathcal{L}(Q)$ будем обозначать совокупность всех вещественных функций, заданных (с точностью до множества первой категории) на Q , измеримых относительно σ -алгебры Ω , и могущих принимать значения $+\infty$ и $-\infty$ на множествах первой категории. Две функции $x, y \in \mathcal{L}(Q)$ будем называть эквивалентными, если они различаются лишь на множестве первой кате-

^{х)} Если Q - экстремальный бикомпакт, то Ω содержит даже все борелевские подмножества из Q .

горизонт в Q . Совокупность $\dot{Y}(Q)$ всех классов эквивалентности отождествима с $C_\infty(Q)$ в следующем смысле: каждая функция $x \in C_\infty(Q)$ содержится в некотором классе эквивалентности из $\dot{Y}(Q)$ и обратно, каждый класс эквивалентности из $\dot{Y}(Q)$ содержит единственную функцию из $C_\infty(Q)$ (см., например, Сиворский [1], § 44).

2. Пусть Q — квазиэкстремальный бикомпакт, $x \in C_\infty(Q)$. НОСИТЕЛЕМ элемента x (обозначение: Q_x) будем называть замыкание в Q множества $\{t \in Q : x(t) \neq 0\}$. Ясно, что множество Q_x — открыто-замкнуто.

3. До конца этого параграфа пусть W есть расширенное K_6 -пространство с фиксированной единицей Π . Через $Q = Q(W)$ будем обозначать стоунов квазиэкстремальный бикомпакт булевой алгебры $\mathcal{E}(W)$. Для любого $e \in \mathcal{E}(W)$ через Q^e будем обозначать соответствующее ему открыто-замкнутое подмножество в Q .

Следующая хорошо известная теорема есть основной факт теории представлений линейных структур.

Т е о р е м а 0.2.1. (См., например, Вулфх [6], стр. 151). Существует и притом единственный изоморфизм K_6 -пространства W на K_6 -пространство $C_\infty(Q)$, переводящий каждый $e \in \mathcal{E}(W)$ в характеристическую функцию множества Q^e .

Указанный изоморфизм мы будем называть ПЕРВОЙ КЛАССИЧЕСКОЙ РЕАЛИЗАЦИЕЙ пары (W, Π) .

Так как $C_\infty(Q)$ и $\dot{Y}(Q)$ в указанном ранее смысле можно отождествить, то изоморфизм, о котором говорится в

теореме 0.2.I, естественным образом порождает некоторый изоморфизм пространства W на $\dot{Y}(Q)$. Этот последний изоморфизм мы будем называть ВТОРОЙ КЛАССИЧЕСКОЙ РЕАЛИЗАЦИЕЙ пары $(W, \mathbb{1})$.

§ 3. Нормированные структуры

I. Если X и Y суть пара линейных пространств, находящаяся в двойственности, то $\mathcal{B}(X, Y)$ и $\mathcal{B}(Y, X)$ означают слабые топологии на X и Y , соответственно, определяемые заданной двойственностью (см. Бурбаки [1], стр. 197, определение I).

Сопряжённое к нормированному пространству E обозначается через E^* . Топология $\mathcal{B}(E^*, E)$ на E^* называется слабой* топологией. Под (\mathcal{B}) -ЛИНЕЙНЫМ ФУНКЦИОНАЛОМ на E понимается элемент пространства E^* , под (\mathcal{B}) -ПОПОЛНЕНИЕМ пространства E понимается его обычное пополнение по норме, под (\mathcal{B}) -СХОДИМОСТЬЮ последовательности элементов из E понимается сходимость по норме, и т.д.

Так как термин "рефлексивность" используется в теории векторных структур как синоним термина "рефлексивность в смысле Нагано", то во избежание недоразумений, говоря о рефлексивности в смысле теории линейных топологических пространств мы будем использовать термин " (\mathcal{B}) -РЕФЛЕКСИВНОСТЬ", принятый в монографии Б.З. Вулиха (см. Вулих [6]).

Если E и F - нормированные пространства, то совокупность всех линейных непрерывных операторов из E в F

будем обозначать через $N_f(E \rightarrow F)$.

Пусть E - произвольное линейное множество, Γ - некоторое множество аддитивных и однородных функционалов на E . Говорят, что Γ - ТОТАЛЬНО на E , если для любого $x \neq 0$ ($x \in E$) существует $f \in \Gamma$, такой что $f(x) \neq 0$.

2. Под KN -ЛИНЕАЛОМ или НОРМИРОВАННОЙ СТРУКТУРОЙ понимается K -линеал, являющийся нормированным пространством с МОНОТОННОЙ НОРМОЙ, то есть такой нормой, что

$$\forall x, y \in X (|x| \leq |y| \implies \|x\| \leq \|y\|).$$

(β) - полный, то есть полный по норме. KN -линеал называется KB -ЛИНЕАЛОМ или БАХАХОВОЙ СТРУКТУРОЙ.

Если KN -линеал одновременно является K -пространством (K_B -пространством), то он называется KN -ПРОСТРАНСТВОМ ($K_B N$ -ПРОСТРАНСТВОМ).

Для (β) - полных KN -пространства и $K_B N$ -пространства особых терминов не вводится.

Т е о р е м а 0.3.1. (См. Накано [1], стр. 134, теорема 30.28). Пусть на K -линеале X заданы две монотонные банаховы нормы $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$. Тогда они эквивалентны, то есть существуют константы $C_1, C_2 > 0$, такие что $C_1 \|\cdot\|_1 \leq \|\cdot\|_2 \leq C_2 \|\cdot\|_1$.

Эта теорема Х.Накано показывает, что банахова топология KB -линеала полностью определяется имеющимся в нём порядком.

3. Пусть X - архимедов K -линеал ограниченных элементов с фиксированной сильной единицей 1 . Под ЕСТЕСТВЕННОЙ НОРМОЙ на X будем понимать норму, задаваемую формулой

$$\|x\| = \min \{ \lambda \geq 0 : |x| \leq \lambda \mathbb{1} \}, x \in X.$$

Если в X указанным способом введена норма, то X называется $K\mathcal{N}$ -ЛИНЕАЛОМ ОГРАНИЧЕННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ.

$K\mathcal{N}$ -ЛИНЕАЛОМ ОГРАНИЧЕННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ называется (δ) -ПОЛНЫЙ $K\mathcal{N}$ -ЛИНЕАЛ ОГРАНИЧЕННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ.

$K\mathcal{N}$ -ЛИНЕАЛ ОГРАНИЧЕННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ, КОТОРЫЙ ОДНОВРЕМЕННО ЯВЛЯЕТСЯ K -ПРОСТРАНСТВОМ (K_{σ} -ПРОСТРАНСТВОМ), НАЗЫВАЕТСЯ $K\mathcal{N}$ -ПРОСТРАНСТВОМ ($K_{\sigma}\mathcal{N}$ -ПРОСТРАНСТВОМ) ОГРАНИЧЕННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ.

Пусть теперь X - произвольный архимедов K -линеал, $u \in X$. Через $\|\cdot\|_{X_u}$ или $\|\cdot\|_u$ будем обозначать норму на X_u , задаваемую формулой

$$\|x\|_u = \min \{ \lambda \geq 0 : |x| \leq \lambda |u| \}, x \in X_u.$$

4. Норма в $K\mathcal{N}$ -линеале X называется ПОЛУНЕПРЕРЫВНОЙ, если из того, что последовательность $0 \leq x_n \uparrow x \in X$, следует, что $\|x_n\| \rightarrow \|x\|$.

Норма в $K\mathcal{N}$ -линеале X называется УНИВЕРСАЛЬНО ПОЛУНЕПРЕРЫВНОЙ, если из того, что направление $0 \leq x_{\alpha} \uparrow x \in X$ следует, что $\|x_{\alpha}\| \rightarrow \|x\|$.

Если X есть $K\mathcal{N}$ -пространство счётного типа, то полунепрерывность нормы в X эквивалентна её универсальной полунепрерывности.

5. Норма в $K\mathcal{N}$ -линеале X называется НЕПРЕРЫВНОЙ, если она удовлетворяет следующему условию:

$$(A) \text{ если последовательность } x_n \downarrow 0, \text{ то } \|x_n\| \rightarrow 0.$$

Если X есть $K_{\sigma}\mathcal{N}$ -пространство и в X выполнено условие (A), то в X выполнено и следующее условие, являющееся усилением условия (A):

(A) если направление $x_\alpha \uparrow 0$, то $\|x_\alpha\| \rightarrow 0$.

Т е о р е м а 0.3.2. (См. Огасавара [I]). Если X есть сепарабельное банахово K_N -пространство^{х)}, то в X выполнено условие (A).

П р е д л о ж е н и е 0.3.3. (См. Огасавара [I]). Для того чтобы в банаховом K_N -пространстве X было выполнено условие (A), необходимо и достаточно, чтобы каждый порядковый интервал в X был слабо компактен.

Лемма 0.3.4 (см. Андо [I]). Пусть X есть банахово K_N -пространство, в котором не выполнено условие (A). Тогда найдётся последовательность $u_n \in X_+$ ($n \in \mathbb{N}$), удовлетворяющая следующим условиям: 1) $u_i \wedge u_j = 0$ при $i \neq j$; 2) существует $\sup_n u_n \in X$; 3) $\inf_n \|u_n\| > 0$.

6. Норма в K_N -линеале X называется МОНОТОННО ПОЛНОЙ, если она удовлетворяет следующему условию:

(B) если последовательность $x_n \in X_+$ такова, что $x_n \uparrow$ и $\sup_n \|x_n\| < \infty$, то существует $\sup_n x_n \in X$.

Норма в K_N -линеале X называется УНИВЕРСАЛЬНО МОНОТОННО ПОЛНОЙ, если она удовлетворяет следующему условию:

(B') если направление $x_\alpha \in X_+$ таково, что $x_\alpha \uparrow$ и $\sup_\alpha \|x_\alpha\| < \infty$, то существует $\sup_\alpha x_\alpha \in X$.

Если X есть K_N -пространство, максимальное расширение которого есть K -пространство счётного типа, то монотонная полнота нормы в X эквивалентна её универсальной монотонной полноте.

х) На протяжении всей работы термин "сепарабельность" используется исключительно в смысле теории нормированных (точнее — метрических) пространств, а не в смысле теории полуупорядоченных пространств.

Т е о р е м а 0.3.5. (См. Амеми [1]). Всякое K_0M -пространство с монотонно полной нормой - (6) - полно.

Следующее предложение хорошо известно.

П р е д л о ж е н и е 0.3.6. Пусть X и Y суть банаховы K_0M -пространства, причём Y есть идеал в X и норма $\|\cdot\|_Y$ полунепрерывна и монотонно полна (не требуется, чтобы норма на Y была сужением нормы $\|\cdot\|_X$). Тогда единичный шар $\{\psi \in Y : \|\psi\|_Y \leq 1\}$ пространства Y есть замкнутое по норме подмножество в X .

7. Условия (A) и (B), рассмотренные в п.п. 5 и 6, были введены Л. В. Канторовичем. Они играют чрезвычайно важную роль в теории банаховых структур. С их помощью определяется один из важнейших классов банаховых структур - пространства Канторовича - Банаха или KB-пространства.

О п р е д е л е н и е 0.3.7. KB-ПРОСТРАНСТВОМ называется K_0M -пространство, в котором норма удовлетворяет условиям (A) и (B).

Иными словами, KB-пространство - это K_0M -пространство с непрерывной и монотонно полной нормой.

Всякое KB-пространство полно по норме и является K -пространством счётного типа. Норма в KB-пространстве всегда универсально полунепрерывна и универсально монотонно полна.

Следующая теорема принадлежит в основном Огасавара (см. Огасавара [1]; см. также Лозановский [3]).

Т е о р е м а 0.3.8. Для любого KB-линеала X следующие утверждения эквивалентны:

(a) X есть KB-пространство;

(б) X слабо саквенциально полон, то есть всякая слабо фундаментальная последовательность элементов из X оказывается слабо сходящейся к некоторому элементу из X ;

(в) в X не существует подпространства, изоморфного в смысле теории линейных топологических пространств пространству C_0 всех сходящихся к 0 числовых последовательностей;

(г) если последовательность $x_n \in X (n \in \mathbb{N})$ такова, что $\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi(x_n)| < \infty$ для любого $\varphi \in X^*$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ безусловно сходится^{х)} в нормированной топологии пространства X .

О п р е д е л е н и е 0.3.9. КВ-пространство X называется КВ-ПРОСТРАНСТВОМ С АДДИТИВНОЙ НОРМОЙ ИЛИ ПРОСТРАНСТВОМ ТИПА (L), если для любых $x, y \in X_+$ справедливо $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$.

КВ-пространство с аддитивной нормой мы обычно будем обозначать буквой L .

Если L есть КВ-пространство с аддитивной нормой, то функционал J на L , определяемый формулой

$$J(x) = \|x_+\|_L - \|x_-\|_L, x \in L$$

будем называть ФУНКЦИОНАЛОМ, ЗАДАЮЩИМ НОРМУ на L .

Ясно, что $0 \leq J \in L^*$.

8. Пусть X - произвольный $\mathbb{K}\mathbb{N}$ -линеал. Полагаем $X_+^* = \{\varphi \in X^* : \varphi \geq 0\}$. Мы всегда будем считать, что порядок на X^* определяется конусом X_+^* . Пространство X^* есть

^{х)} Определение безусловной сходимости ряда в нормированном пространстве см. (Дэй [1], гл. IV § 1).

банахово KM -пространство с универсально полунепрерывной и универсально монотонно полной нормой.

9. **О п р е д е л е н и е** 0.3.10. (Канторович, Вулик, Пинскер [1], стр. 355). KM -линеал X называется квазиравномерно выпуклым, если существует такое $\eta > 0$, что для всякой пары дизъюнктивных положительных элементов x_1 и x_2 из X с $\|x_1\| = \|x_2\| = 1$ имеет место неравенство $\|x_1 + x_2\| \leq 2 - \eta$.

Т е о р е м а 0.3.11. Пусть X - квазиравномерно выпуклый KM -линеал. Тогда $X^*, X^{***}, \dots, X^{(2n+1)}, \dots$ суть KB -пространства.

Эта теорема, принадлежащая Ю.А.Абрамовичу, вытекает из результатов работы (Лозановский [13]).

10. Пусть X - произвольный KM -линеал. Если в его (b) -пополнении (то есть пополнении по норме) ввести порядок, приняв в качестве положительных элементов (b) -пределы последовательностей из X_+ , то оно становится KB -линеалом, содержащим X в качестве линейной подструктуры (см. Вулик [6], стр. 197).

Пусть X - произвольный KM -линеал. Его K -пополнение \hat{X} становится KM -пространством, если на нём ввести норму следующим образом:

$$\|\hat{x}\|_{\hat{X}} = \inf \{ \|x\|_X : |\hat{x}| \leq x \in X \}, \quad \hat{x} \in \hat{X}.$$

Заметим, что $\|x\|_{\hat{X}} = \|x\|_X$ для любого $x \in X$. Норма $\|\cdot\|_{\hat{X}}$ называется естественным распространением нормы $\|\cdot\|_X$ с X на \hat{X} .

Если норма $\| \cdot \|_X$ - банахова, то и норма $\| \cdot \|_{\tilde{X}}$ - банахова (см. Вулик, Лозановский [I]).

§ 4. Функционалы в линейных структурах

I. В этом пункте X есть произвольный архимедов K -линейный.

Через \tilde{X} обозначается множество всех РЕГУЛЯРНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ на X , то есть функционалов, представимых в виде разности двух линейных положительных функционалов. По теореме Л. В. Канторовича \tilde{X} является K -пространством при естественном частичном упорядочении. K -пространство \tilde{X} называется ПРОСТРАНСТВОМ ПРИСОЕДИНЕННЫМ к X .

Функционал $f \in \tilde{X}$ называется ВПОЛНЕ ЛИНЕЙНЫМ, если он (0) -непрерывен по направлениям, то есть если из того, что направление $x_\alpha \xrightarrow{(0)} x$ в X следует, что $f(x_\alpha) \rightarrow f(x)$. Множество всех вполне линейных функционалов на \tilde{X} обозначается через \bar{X} ; оно является компонентой в \tilde{X} . \bar{X} называется СОПРЯЖЕННЫМ (или СОПРЯЖЕННЫМ В СМЫСЛЕ НАКАНО) ПРОСТРАНСТВОМ к X . По каждому $x \in X$ можно построить функционал $F_x \in \bar{X}$ по формуле

$$F_x(f) = f(x), f \in \bar{X}. \quad (*)$$

K -пространство X с тотальным \bar{X} называется РЕФЛЕКСИВНЫМ (или РЕФЛЕКСИВНЫМ В СМЫСЛЕ НАКАНО), если второе сопряженное K -пространство $\bar{\bar{X}}$ исчерпывается функционалами вида

F_x , определяемыми по формуле (*).

Функционал $f \in \tilde{X}$ называется АНОРМАЛЬНЫМ, если существует такой фундамент Φ в X , что $f(x) = 0$ для любого $x \in \Phi$. Множество всех анормальных функционалов на X обозначается через \tilde{X}_{an} ; оно является идеалом в \tilde{X} .

Функционал $f \in \tilde{X}$ называется АНТИНОРМАЛЬНЫМ, если он дизъюнктивен всем вполне линейным функционалам. Множество всех антинормальных функционалов на X обозначается через \tilde{X}_{ant} ; оно является компонентой в \tilde{X} .

Известно, что \tilde{X}_{an} есть фундамент в \tilde{X}_{ant} , но, вообще говоря, $\tilde{X}_{an} \neq \tilde{X}_{ant}$. Следующая теорема даёт достаточное условие для совпадения классов анормальных и антинормальных функционалов.

Т е о р е м а 0.4.1. Пусть X есть архимедов K -линеал, в котором существует фундамент Y с тотальным \bar{Y} . Тогда $\tilde{X}_{an} = \tilde{X}_{ant}$. В частности, это равенство справедливо для любого архимедова K -линеала X с тотальным \bar{X} .

Эта теорема легко следует из (Люксембург [I], XVA, теорема 50.4), но, по существу, в неявном виде содержится уже в монографии (Канторович, Вулик, Пинскер [II]).

2. Если X есть KN -линеал, то X^* есть идеал в \tilde{X} . Для любого KB -линеала X имеет место равенство $X^* = \tilde{X}$.

Если X есть KN -линеал, то полагаем $X^*_{an} = X^* \cap \tilde{X}_{an}$,
 $X^*_{ant} = X^* \cap \tilde{X}_{ant}$.

Т е о р е м а 0.4.2. (Люксембург, Заанен [I], XII, теорема 37.1). Для любого KN -линеала X множество $X^* \cap \bar{X}$ есть фундамент в \bar{X} ; если \bar{X} тотально на X , то и $X^* \cap \bar{X}$ тотально на X .

Т е о р е м а 0.4.3. (Мори, Амемия, Нагано [1]).

Для любого KN -пространства X с тотальным \bar{X} следующие утверждения эквивалентны:

(а) норма в X универсально полунепрерывна;

(б) для любого $x \in X$ справедливо равенство

$$\|x\| = \sup \{ |f(x)| : f \in X^* \cap \bar{X}, \|f\| \leq 1 \}.$$

Следующее предложение вытекает из теоремы 0.4.3.

П р е д л о ж е н и е 0.4.4. Пусть X - KN -пространство с тотальным \bar{X} , причём $\|\cdot\|_X$ универсально монотонно полна. Тогда X рефлексивно в смысле Нагано и на X существует монотонная норма $\|\cdot\|_X^0$, эквивалентная норме $\|\cdot\|_X$, которая одновременно универсально полунепрерывна и универсально монотонно полна. Можно принять

$$\|x\|_X^0 = \sup \{ |f(x)| : f \in \bar{X}, \|f\| \leq 1 \}, x \in X.$$

П р е д л о ж е н и е 0.4.5. Пусть X - KV -линеал,

Y - его замкнутый по норме фундамент, причём $\|\cdot\|_Y$ есть сужение $\|\cdot\|_X$ на Y . Для любого $f \in \bar{Y}$ существует единственный $g \in \bar{X}$, такой что сужение $g|_Y = f$. При этом $\|f\|_{Y^*} = \|g\|_{X^*}$. Тем самым отображение $\bar{Y} \ni f \rightarrow g \in \bar{X}$ есть алгебраический и порядковый изоморфизм и изометрия \bar{Y} на \bar{X} .

Это предложение хорошо известно.

3. Т е о р е м а 0.4.6. Пусть X - K_N -пространство ограниченных элементов. Если последовательность $f_n \in X^*$ ($n \in \mathbb{N}$) слабо* сходится к $f \in X^*$, то она и слабо сходится к f .

Эта теорема является переформулировкой известного результата о совпадении слабой и слабой* сходимостей для последовательностей мер на квазиэкстремально несвязном компакте (см. Гротендик [1] и Силвер [2]).

Следующая теорема доказана в работе (Лозановский [5]) и впоследствии пере доказана в работе (Шефер [1]).

Т е о р е м а 0.4.7. Пусть X - произвольное K -пространство. K - произвольная компонента в \tilde{X} . Если последовательность $\{f_n \in K (n \in \mathbb{N})\}$ такова, что для любого $x \in X$ существует конечный
$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x),$$
 то $f \in K$.

§ 5. Представление вполне линейных функционалов. Дуальные пространства

1. Под **ПРОСТРАНСТВОМ С МЕРОЙ**, как обычно, будет пониматься тройка (T, Σ, μ) , где T - некоторое множество, Σ - некоторая σ -алгебра его подмножеств, μ - неотрицательная счётно-аддитивная мера на Σ , могущая, возможно, принимать и значение $+\infty$.

Пусть (T, Σ, μ) - пространство с мерой. Через $S = S(T, \Sigma, \mu)$ будет обозначаться множество всех классов попарно эквивалентных функций, заданных (с точностью до множества меры 0) на T , измеримых относительно Σ и могущих принимать значения $+\infty$ и $-\infty$ на множествах меры 0. Подчеркнём, что элементы множества $S(T, \Sigma, \mu)$ суть не отдельные функции, а классы функций.

Прочие термины из теории меры будут использоваться в смысле монографии (Халмош [1]).

Напомним, что для любого пространства с мерой (T, Σ, μ) множество $S(T, \Sigma, \mu)$ есть расширенное K_σ -пространство: если мера μ σ -конечна, то $S(T, \Sigma, \mu)$ есть расширенное K -пространство счётного типа.

Для любого пространства с мерой (T, Σ, μ) и любого $1 \leq p \leq +\infty$ через $L^p(\mu)$ или $L^p(T, \Sigma, \mu)$ обозначается обычное лебегово пространство, состоящее из всех $x \in S(T, \Sigma, \mu)$, таких что $\|x\| = \left(\int_T |x|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty$ при $1 \leq p < +\infty$ и $\|x\| = \text{ess sup}_{t \in T} |x(t)| < +\infty$ при $p = +\infty$.

2. В этом пункте Q есть произвольный квазикompактный бикомпакт. Через $\Omega = \Omega(Q)$ и $\mathcal{L}(Q)$ обозначаются те же объекты, что и в § 2.

О п р е д е л е н и е 0.5.1. Пусть μ есть неотрицательная счётно-аддитивная мера на σ -алгебре множеств Ω . Мера μ называется **НОРМАЛЬНОЙ**, если выполнены условия:

- 1) $\mu(A) > 0$ для любого открыто-замкнутого $A \neq \emptyset$;
- 2) если A открыто-замкнуто и $\mu(A) = +\infty$, то существует открыто-замкнутое множество $A_1 \subset A$, такое что $0 < \mu(A_1) < +\infty$;
- 3) $\mu(B) = 0$ для любого множества B первой категории.

Следующие результаты, по существу, содержатся в монографии (Канторович, Вулик, Пинскер [1]) и в работах (Вулик, Лозановский [2]), (Накутани [1], [2]), (Люксембург и Заанен [1], заметка XII), (Келли [1]).

Т е о р е м а 0.5.2. Если на Q существует нормальная мера μ , то $S(Q, \Omega, \mu) = \mathcal{L}(Q)$. Тем самым, в этом случае $C_\infty(Q)$ естественным образом можно отождествить с $S(Q, \Omega, \mu)$. Кроме того, в этом случае всякое подмножество первой категории из Q нигде не плотно в Q .

Т е о р е м а 0.5.3. Следующие утверждения эквивалентны:

(а) на Q существует нормальная мера;

(б) в $C_\infty(Q)$ существует фундамент с тотальным множеством вполне линейных функционалов;

(в) в $C_\infty(Q)$ существует фундамент, являющийся КВ-пространством с аддитивной нормой;

(г) для любого КВ-пространства X , являющегося фундаментом в $C_\infty(Q)$, пространство \bar{X} тотально на X .

Т е о р е м а 0.5.4. (а) Пусть L - КВ-пространство с аддитивной нормой, являющееся фундаментом в $C_\infty(Q)$.

J - функционал, задающий норму на L . Для $E = A \Delta B \in \Omega$, где A открыто-замкнуто, а B первой категории, полагаем

$\mu(E) = \|\chi_A\|_L$ при $\chi_A \in L$ и $\mu(E) = +\infty$ при $\chi_A \notin L$. Тогда

μ есть нормальная мера на Q и $J(x) = \int_Q x d\mu$ для

$x \in L$. При этом, если $C_\infty(Q)$ отождествить с $S(Q, \Omega, \mu)$ (см. теорему 0.5.2), то $L = L^1(Q, \Omega, \mu)$.

(б) Обратно, всякая нормальная мера на Q может быть получена указанным в пункте (а) способом.

3. В этом пункте: W - расширенное K -пространство с фиксированной единицей 1 ; L - фиксированное K -пространство с аддитивной нормой, являющееся фундаментом X в W ;

J - функционал, задающий норму на L ; X - произвольный идеал в W ; W_X - компонента в W , порождённая X .

О п р е д е л е н и е 0.5.5. Пространство

$$X' \stackrel{\text{def}}{=} \{x' \in W_X : xx' \in L \text{ для любого } x \in X\}$$

называется дуальным пространством к X .

Ясно, что X' есть идеал в W .

По каждому $x' \in X'$ можно построить функционал $f_{x'}$ на X по формуле

$$f_{x'}(x) = J(xx'), x \in X.$$

Этот функционал $f_{x'} \in \bar{X}$.

Следующая теорема приведена в работах (Лозановский [4]), (Райс [1]) и (Вулик, Лозановский [2]), но, по существу, в замаскированном виде встречалась и раньше.

Т е о р е м а 0.5.6. отображение

$$X' \ni x' \longrightarrow f_{x'} \in \bar{X}$$

есть алгебраический и порядковый изоморфизм K -пространства

X' на K -пространство \bar{X} .

Таким образом, дуальное пространство X' естественным образом можно отождествить с сопряжённым по Накано пространством \bar{X} .

X) Мы предполагаем здесь, что указанное пространство L существует.

О п р е д е л е н и е 0.5.7. Если X — банахово K, N -пространство, то норма $\|\cdot\|_{X'}$ на X' , задаваемая формулой

$$\|x'\|_{X'} = \sup \{ J(|xx'|) : x \in X, \|x\|_X \leq 1 \}, \quad x' \in X',$$

называется дуальной нормой по отношению к $\|\cdot\|_X$.

Ясно, что $\|x'\|_{X'} = \|\delta_{x'}\|_{X^*}$ для любого $x' \in X'$.

П р е д л о ж е н и е 0.5.8. Если X — произвольный идеал в W , причём \bar{X} — тотально на X , то $X \subset X''$. Равенство $X = X''$ имеет место тогда и только тогда, когда K -пространство X рефлексивно в смысле Нагано.

Это предложение очевидно.

Т е о р е м а 0.5.9. Пусть X — банахово K, N -пространство, являющееся идеалом в W . Тогда

(а) $X \subset X''$ и $\|x\|_{X''} \leq \|x\|_X$ для любого $x \in X$;

(б) равенство $\|x\|_{X''} = \|x\|_X$ для любого $x \in X$ имеет место тогда и только тогда, когда норма $\|\cdot\|_X$ универсально полунепрерывна;

(в) равенство $X = X''$ по запасу элементов имеет место тогда и только тогда, когда норма $\|\cdot\|_X$ универсально монотонно полна.

Первое утверждение теоремы легко следует из предложения 0.5.8. Два других утверждения вытекают из теоремы 0.4.3 и предложения 0.4.4.

З а м е ч а н и е 0.5.10. Рассмотрим следующий важный частный случай. Пусть (T, Σ, μ) — пространство с σ -конечной мерой. $W = S(T, \Sigma, \mu)$. В этом случае всегда будем счи-

тате, что \mathbb{I} есть класс попарно эквивалентных функций, содержащий χ_T , и что $L = L^1(T, \Sigma, \mu)$. Пусть X — произвольный фундамент в $S(T, \Sigma, \mu)$. Тогда дуальное пространство

$$X' = \left\{ x' \in S(T, \Sigma, \mu) : \int_T |x x'| d\mu < \infty \text{ для любого } x \in X \right\}.$$

Общий вид вполне линейного функционала на X дается формулой

$$f(x) = \int_T x x' d\mu, \quad x \in X,$$

где x' — произвольный элемент из X' .

§ 6. Специальные пространства

В каждом из пространств, рассматриваемых в этом параграфе, частичное упорядочение — естественное.

1. Пространства R^n , $C(T)$ (T — топологическое пространство), $S(T, \Sigma, \mu)$ и $L^p(T, \Sigma, \mu)$ ((T, Σ, μ) — пространство с мерой, $1 \leq p \leq +\infty$) — определены ранее.

Если (T, Σ, μ) есть отрезок $[0, 1]$ с лебеговой мерой, то вместо $S(T, \Sigma, \mu)$ и $L^p(T, \Sigma, \mu)$ будем писать $S[0, 1]$ и $L^p[0, 1]$.

2. Пусть Γ — произвольное множество.

а) Через S_Γ обозначается пространство всех вещественных функций на Γ .

б) Через ℓ_Γ^p обозначается пространство всех $x \in S_\Gamma$ таких что $\|x\|_{\ell_\Gamma^p} = \left[\sum_{\gamma \in \Gamma} |x(\gamma)|^p \right]^{\frac{1}{p}} < +\infty$ ($1 \leq p < +\infty$).

в) Через ℓ_Γ^∞ обозначается пространство всех $x \in S_\Gamma$ таких что $\|x\|_{\ell_\Gamma^\infty} = \sup_{\gamma \in \Gamma} |x(\gamma)| < +\infty$.

г) Через C_Γ обозначается подпространство в ℓ_Γ^∞ состоящее из всех $x \in \ell_\Gamma^\infty$, удовлетворяющих следующему условию: существует число $\lambda = \lambda(x)$, такое что для любого числа $\varepsilon > 0$ неравенство $|x(\gamma) - \lambda| < \varepsilon$ выполняется для всех $\gamma \in \Gamma$, кроме, может быть, конечного их числа. Норма в C_Γ индуцирована из ℓ_Γ^∞ .

д) Через $(C_0)_\Gamma$ обозначается подпространство в C_Γ состоящее из всех $x \in C_\Gamma$, для которых число $\lambda(x) = 0$.

3. Если $\Gamma = \mathbb{N}$ (множество всех натуральных чисел), то вместо S_Γ , ℓ_Γ^p , C_Γ , $(C_0)_\Gamma$ будем писать S , ℓ^p , C , C_0 .

4. В терминологии и обозначениях из теории пространств Фрэнкеля мы полностью следуем монографии (Красносельский, Рунцицкий [I]).

5. ПРОСТРАНСТВА СО СМЕШАННОЙ НОРМОЙ (см. Бенедек, Панzone [I]). Пусть $1 \leq p, q \leq +\infty$. Пространство $L^{(p,q)}$ состоит из всех функций $x(t_1, t_2)$, определенных и измеримых на квадрате $\{(t_1, t_2) : 0 \leq t_1, t_2 \leq 1\}$, для которых $\|x\|_{L^{(p,q)}} < +\infty$, где

$$\|x\|_{L^{(p,q)}} = \begin{cases} \left(\int_0^1 \left(\int_0^1 |x(t_1, t_2)|^p dt_1 \right)^{\frac{q}{p}} dt_2 \right)^{\frac{1}{q}}, & \text{если } 1 \leq p, q < +\infty. \\ \sqrt[q]{\operatorname{vzaisup}_{0 \leq t_2 \leq 1} \left(\int_0^1 |x(t_1, t_2)|^p dt_1 \right)^{\frac{1}{p}}}, & \text{если } 1 \leq p < +\infty, q = +\infty. \\ \left(\int_0^1 \left(\operatorname{vzaisup}_{0 \leq t_1 \leq 1} |x(t_1, t_2)|^q \right) dt_2 \right)^{\frac{1}{q}}, & \text{если } p = +\infty, 1 \leq q < +\infty. \\ \operatorname{vzaisup}_{(t_1, t_2)} |x(t_1, t_2)|, & \text{если } p = q = +\infty. \end{cases}$$

6. СИММЕТРИЧНЫЕ ПРОСТРАНСТВА (см. Семёнов [1], [2]).

Банахово KN -пространство X , являющееся фундаментом в $S[0,1]$, называется СИММЕТРИЧНЫМ пространством, если из того, что $x \in X$, $y \in S[0,1]$, $|x|$ и $|y|$ равноизмеримы^{х)}, следует, что $y \in X$ и $\|x\|_X = \|y\|_X$.

Предложение 0.6.1. Пусть X - симметричное пространство, не совпадающее по запасу элементов с $L^\infty[0,1]$. Пусть X_0 есть замыкание (по норме) множества $L^\infty[0,1]$ в X . Тогда в X_0 выполнено условие (А) но, если $X \neq X_0$, в X_0 не выполнено условие (В).

Это предложение хорошо известно.

7. Пусть Ψ есть неубывающая, непрерывная, вогнутая на $[0,1]$ функция, такая что $\Psi(0) = 0$, $\Psi(t) > 0$ при $t > 0$ и $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\Psi(t)} = 0$.
Для $x \in S[0,1]$ через x^* обозначается НЕВОЗРАСТАЮЩАЯ ПЕРЕСТАНОВКА функции $|x|$, то есть x^* есть невозрастающая функция, равноизмеримая с функцией $|x|$.

а) ПРОСТРАНСТВО ЛОРЕНЦА $\Lambda(\Psi)$ (см. Лоренц [1]) состоит из всех $x \in S[0,1]$, для которых

$$\|x\|_{\Lambda(\Psi)} = \int_0^1 x^*(t) d\Psi(t) < +\infty.$$

б) ПРОСТРАНСТВО МАРИШКЕВИЧА $M(\Psi)$ состоит из всех $x \in S[0,1]$, для которых

^{х)} Функции $x, y \in S[0,1]$ называются РАВНОИЗМЕРИМЫМИ, если для любого $a \in (-\infty, +\infty)$ справедливо $\mu\{t \in [0,1] : x(t) > a\} = \mu\{t \in [0,1] : y(t) > a\}$, где μ - мера Лебега на $[0,1]$.

$$\|x\|_{M(\Psi)} = \sup_{0 < h \leq 1} \frac{\int_0^h x^*(t) dt}{\Psi(h)} < +\infty.$$

Через $M_0(\Psi)$ обозначается замыкание (по норме) множества $L^\infty[0,1]$ в $M(\Psi)$.

Следующее предложение хорошо известно (см. Семёнов [1],[2]).

Предложение 0.6.2.

1) $\Lambda(\Psi)$ есть KB-пространство;

2) в $M_0(\Psi)$ выполнено условие (A), но не выполнено условие (B):

3) равенства $(\Lambda(\Psi))' = M(\Psi)$, $(M_0(\Psi))' = (M(\Psi))' = \Lambda(\Psi)$

имеют место как по запасу элементов, так и по норме.

Глава I

ФУНКЦИИ И ФУНКЦИОНАЛЫ В ЛИНЕЙНЫХ СТРУКТУРАХ

В этой главе (в отличие от трёх последующих глав) основным объектом является не банахова структура, а произвольная (вообще говоря, не нормированная) линейная структура. Результаты этой главы существенно используются в последующих (особенно в гл. II).

В § I гл. I изучаются функции от элементов K -линеала. Это понятие, введённое Л. В. Канторовичем, играет важную роль в теории полуупорядоченных пространств и особенно в её приложениях. В частности (см., например, гл. II), на понятии функции от элементов линейной структуры основываются многие конструкции, связанные с преобразованиями одних банаховых структур в другие. Полезно оно и в теории меры (см., например, Бурбаки [2], гл. V, § 5). Это понятие исследовалось, в частности, в работах (Булик [5], [6]), (Канторович, Булик, Линскер [1]), (Крейн М. Г. и Крейн С. Г. [2]), (Шрохов [1], [2]), причём даваемые там определения несколько отличаются друг от друга по степени общности. Мы даём новое определение функции от элементов архимедова K -линеала (см. определения I. I. 1 и I. I. 7), которое общее известных ранее и, как нам кажется, более приспособлено для приложений. Показано, в частности, что всякое расширенное K -пространство W замкнуто относительно операции взятия

баровской функции от элементов из W (теорема I.1.3 и следствие I.1.4); при прежних определениях функции от элементов K -линеала это имело место лишь при дополнительных ограничениях на W . Найдены необходимые и достаточные условия для того, чтобы данный архимедов K -линеал X был замкнут относительно операции взятия непрерывной положительно однородной функции от элементов из X (теорема I.1.18); отметим, что в работе (Вулик [5]), в которой исследовался этот вопрос, найдены лишь достаточные условия.

Пространство \bar{X} вполне линейных функционалов на произвольном K -пространстве X допускает простое представление в виде дуального пространства X' (см. гл. 0 § 5). Вопрос же о сколько-нибудь "удобном" представлении пространства \tilde{X} регулярных функционалов на X оказывается существенно более трудным. До сих пор, насколько нам известно, за исключением хорошо известных классических случаев, такое представление было получено лишь для пространств X очень специального типа (см., например, Гретски [1] и Рао [1], [2]), причём методами, принципиально не допускающими обобщения на случай произвольного K -пространства X . В § 2 гл. I строится реализация пространства \tilde{X} для произвольного K -пространства X в виде идеала в максимальном расширении пространства мер на стоуновом бикompакте булевой алгебры $\mathcal{K}(X)$ и показывается, что в определённом смысле эта реализация определяется единственным образом. Построенная нами реализация (см. теоремы I.2.20, I.2.22 и I.2.23) является одним из главных результатов диссертации. Отметим, что

эта реализация оказалась очень удобной при описании сопряжённых пространств к пространствам, полученным с помощью конструкции Кальдерона (см. гл. II).

§ I. Функции от элементов линейной структуры

I. Пусть W - расширенное K -пространство, в котором фиксирована единица $\mathbb{1}$. $Q = Q(W)$ - стоунов экстремальный бикомпакт булевой алгебры $\mathcal{E}(W)$. $h: W \rightarrow C_{\infty}(Q)$ - первая классическая реализация пары $(W, \mathbb{1})$. Фиксируем произвольные $n \in \mathbb{N}$, множество $T \subset \mathbb{R}^n$ и элементы $x_1, x_2, \dots, x_n \in W$. Положим $H = \{q \in Q : (hx_1(q), hx_2(q), \dots, hx_n(q)) \in T\}$. Будем дополнительно предполагать, что $Q \setminus H$ есть множество первой категории в Q . Это условие, разумеется, выполнено автоматически, если $T = \mathbb{R}^n$.

О п р е д е л е н и е I. I. I. Пусть $f \in S_T$ и $z \in W$ таковы^{x)}, что существует множество $\mathcal{F} \subset H$, обладающее следующими свойствами:

а) $Q \setminus \mathcal{F}$ первой категории в Q ;

б) для любой точки $q \in \mathcal{F}$ справедливо $(hx_1(q), hx_2(q), \dots, hx_n(q)) = fz(q)$.

Тогда полагаем $f_{\mathbb{1}}^W(x_1, x_2, \dots, x_n) \stackrel{\text{def}}{=} z$.

Заметим, что, очевидно, этим определением элемент $f_{\mathbb{1}}^W(x_1, x_2, \dots, x_n) \in W$ определён однозначно.

^{x)} Напомним, что S_T есть множество всех вещественных функций на T .

О п р е д е л е н и е I.1.2. Через $\mathcal{N} = \mathcal{N}(T; x_1, x_2, \dots, x_n)$ обозначим множество всех таких $f \in S_T$, для которых существует $f_{\Pi}^W(x_1, x_2, \dots, x_n) \in W$.

Т е о р е м а I.1.3. а) $C(T) \subset \mathcal{N}$;

б) ЕСЛИ $f_k \in \mathcal{N} (k \in \mathbb{N})$ и для любого $t \in T$ существует конечный $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(t) = f(t)$, то $f \in \mathcal{N}$ и

$$(f_k)_{\Pi}^W(x_1, x_2, \dots, x_n) \xrightarrow{(0)} f_{\Pi}^W(x_1, x_2, \dots, x_n) \text{ в } W.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Напомним, что если Q_1 есть плотное подмножество в Q и $x \in C(Q_1)$, то существует единственный $z \in C_{\infty}(Q)$, такой что сужение $z|_{Q_1} = x$. Это следует, например, из того, что всякое плотное подмножество в Q является C^* -вложенным в Q (см. Гиллман, Джерисон [1], стр. 96, 6M2). Далее нам удобно отождествить W с $C_{\infty}(Q)$.

Докажем а). Пусть $f \in C(T)$. Примем $\mathcal{P} = \mathbb{N}$ и положим $x(q) = f(x_1(q), x_2(q), \dots, x_n(q)), q \in \mathcal{P}$. Так как $x \in C(\mathcal{P})$ и \mathcal{P} плотно в Q , то существует единственный $z \in C_{\infty}(Q)$, такой что $z|_{\mathcal{P}} = x$.

Ясно, что $f_{\Pi}^W(x_1, x_2, \dots, x_n) = z$. Докажем б). Пусть

$(f_k)_{\Pi}^W(x_1, x_2, \dots, x_n) = z_k$. Пусть $\mathcal{P}_k \subset \mathbb{N}$ таково, что $Q \setminus \mathcal{P}_k$ первой категории в Q и $f_k(x_1(q), \dots, x_n(q)) = z_k(q)$ при $q \in \mathcal{P}_k$.

Положим $\mathcal{P} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \mathcal{P}_k$. Ясно, что $Q \setminus \mathcal{P}$ первой категории в

Q . Воспользуемся теоремой 2.33, гл. XIII из (Канторович, Вулик, Пинюкер [1]) и дополнениями, сделанными в процессе её доказательства.

Так как при всех $q \in \mathcal{P}$ существует конечный $\lim_{k \rightarrow \infty} z_k(q)$ и $Q \setminus \mathcal{P}$ первой категории в Q , то в W существует $(0)\text{-}\lim z_k = z$. Но $z_k(q) \rightarrow z(q)$ при всех $q \in \mathcal{P}_0$, где $Q \setminus \mathcal{P}_0$ первой категории в Q . Положим $\mathcal{P}' = \mathcal{P}_0 \cap \mathcal{P}$.

Тогда $Q \supset \mathcal{P}'$ первой категории в Q и $f(x_1(q), x_2(q), \dots, x_n(q)) = z(q)$ при всех $q \in \mathcal{P}'$. Отсюда по определению $f_{\Pi}^W(x_1, \dots, x_n) = z$. Теорема доказана.

С л е д с т в и е I.1.4. Множество $\mathcal{K}(\Gamma; x_1, \dots, x_n)$ содержит все бэровские функции на Γ . Таким образом, для любого расширенного K -пространства W с фиксированной единицей Π , левой бэровской функции f на R^n и любых $x_1, x_2, \dots, x_n \in W$ существует элемент^{х)} $f_{\Pi}^W(x_1, \dots, x_n) \in W$.

З а м е ч а н и е I.1.5. Нетрудно переформулировать определение I.1.1. в терминах второй классической реализации. Ограничимся важнейшим частным случаем. Пусть $W = \mathcal{L}(Q)$, причём Π есть элемент из $\mathcal{L}(Q)$, содержащий x_Q . Пусть f - бэровская функция на R^n . Для $x \in \mathcal{L}(Q)$ пусть $\dot{x} \in \mathcal{L}(Q)$ означает соответствующий класс. Возьмём любые $\dot{x}_k \in \mathcal{L}(Q)$ и выберем по представителю $x_k \in \dot{x}_k$ ($k = 1, 2, \dots, n$). Положим $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, где справа написана обычная суперпозиция функций. Ясно, что $z \in \mathcal{L}(Q)$, ибо "внешняя" функция - бэровская, а "внутренние" функции - измеримы, и что $f_{\Pi}^W(\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n) = \dot{z}$.

З а м е ч а н и е I.1.6. Пусть $(\mathcal{D}, \Sigma, \mu)$ - пространство с σ -конечной мерой и $W = \mathcal{S}(\mathcal{D}, \Sigma, \mu)$ с естественной единицей. Пусть f есть бэровская функция на R^n , $x_1, x_2, \dots, x_n \in W$. Тогда $f_{\Pi}^W(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, где справа написана обычная суперпозиция бэровской функции и (классов) измеримых функций x_1, x_2, \dots, x_n .

^{х)} Это утверждение обобщается на расширенные K -пространства; на доказательстве мы не останавливаемся, так как этот факт нам не потребуется далее.

Перейдём теперь к определению функции от элементов произвольного архимедова K -линеала.

О п р е д е л е н и е 1.1.7. Пусть X - архимедов K -линеал, $W = \mathcal{M}(\hat{X})$ и в W фиксирована единица $\mathbb{1}$.

Пусть $n \in \mathbb{N}$, $T \subset \mathbb{R}^n$, $f \in S_T$ и $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$. Если существует $f_{\mathbb{1}}^W(x_1, \dots, x_n) \in W$, то полагаем $f_{\mathbb{1}}^X(x_1, \dots, x_n) \stackrel{\text{def}}{=} f_{\mathbb{1}}^W(x_1, \dots, x_n)$.

Подчеркнём, что $f_{\mathbb{1}}^X(x_1, \dots, x_n)$ есть элемент W , а, вообще говоря, не X .

2. Особо остановимся на положительно однородных функциях от элементов K -линеала.

О п р е д е л е н и е 1.1.8. Через $CH(\mathbb{R}^n)$ обозначаем множество всех положительно однородных непрерывных функций на \mathbb{R}^n .

Л е м м а 1.1.9. (Вулик [5]). Пусть X - архимедов K -линеал и в $W = \mathcal{M}(\hat{X})$ фиксированы единицы $\mathbb{1}_1$ и $\mathbb{1}_2$. Тогда для любых $n \in \mathbb{N}$, $f \in CH(\mathbb{R}^n)$, $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$ справедливо $f_{\mathbb{1}_1}^X(x_1, \dots, x_n) = f_{\mathbb{1}_2}^X(x_1, \dots, x_n) \in \hat{X}$. Поэтому в случае $f \in CH(\mathbb{R}^n)$ вместо $f_{\mathbb{1}}^X(x_1, \dots, x_n)$ мы будем писать просто $f^X(x_1, \dots, x_n)$, опуская иногда и верхний индекс.

Далее нам понадобится несколько вспомогательных предложений.

Л е м м а 1.1.10. Пусть B - компактно и пусть конечное множество функций $\{d_k\}^m \subset C(B)$ разделяет точки из B . Тогда для любого $z \in C(B)^{k=1}$ существует $f \in CH(\mathbb{R}^{m+1})$ такая что $f(d_1, d_2, \dots, d_m, e) = z$, где $e = \chi_B$ и слева написана обычная суперпозиция непрерывных функций.

Доказательство. Не умаляя общности, можно считать, что B есть замкнутое подмножество в R^m , причём $d_k(t) = t_k$, где $t = (t_1, t_2, \dots, t_m)$ есть произвольная точка из B ($k=1, \dots, m$). Возьмём ограниченную функцию $g \in C(R^m)$ такую что $g|_B = z$, и для $t = (t_1, \dots, t_m, t_{m+1}) \in R^{m+1}$ положим

$$f(t) = \begin{cases} t_{m+1} g\left(\frac{t_1}{t_{m+1}}, \frac{t_2}{t_{m+1}}, \dots, \frac{t_m}{t_{m+1}}\right) & \text{при } t_{m+1} \neq 0 \\ 0 & \text{при } t_{m+1} = 0. \end{cases}$$

Ясно, что $f \in CH(R^{m+1})$ и $f(d_1, \dots, d_m, e)(t) = g(t_1, \dots, t_m) = z(t)$ при всех $t = (t_1, \dots, t_m) \in B$. Лемма доказана.

Л е м м а I.I.II. Пусть X K -пространство, Y - его идеал, $n \in N$, $f \in CH(R^n)$. Тогда для любых $y_1, y_2, \dots, y_n \in Y$ справедливо $f^X(y_1, \dots, y_n) = f^Y(y_1, \dots, y_n)$.

Справедливость леммы I.I.II прямо следует из определений I.I.I, I.I.7 и леммы I.I.9.

Л е м м а I.I.I2. Пусть X - K -пространство, Y - его линейная подструктура, $u \in Y_+$, причём $Y = Y_u$, то есть u есть сильная единица в Y . Пусть B есть би-компакт, N - линейная подструктура в $C(B)$, разделяющая точки из B . γ - есть изоморфизм Y на N , такой что $\gamma u = X_B$ (указанные B, N, γ существуют в силу теоремы Крейнов-Какутани, см. Вулик [6], гл. VII, § 5). Пусть теперь $n \in N$, $f \in CH(R^n)$ и $y_1, y_2, \dots, y_n \in Y$. Тогда следующие утверждения эквивалентны.

(а) $f^X(y_1, \dots, y_n) \in Y$;

(б) Суперпозиция $f(\gamma y_1, \gamma y_2, \dots, \gamma y_n) \in N$.

При этом, если выполнены эквивалентные условия (а), (б),

то $f^x(y_1, \dots, y_n) = f^{-1}(fy_1, \dots, fy_n)$.

Доказательство. Не умаляя общности, можно считать, что $X = X_n$, это следует из леммы I.I.II. Пусть

Q — стоунов экстремальный бикомпакт булевой алгебры $\mathcal{A}(X)$ и пусть \mathcal{A} есть изоморфизм K -пространства X на K -пространство $C(Q)$, такой что $\mathcal{A}u = u|_Q$. Пусть Z есть замыкание Y в X по u -норме, то есть по норме

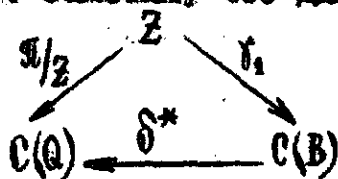
$$\|x\|_u = \min \{ \lambda \geq 0 : |x| \leq \lambda u \}, x \in X.$$

Тогда Z есть K -линеал ограниченных элементов, причём f продолжается до изоморфизма f_1 K -линеала Z на K -линеал

$C(B)$. Ясно, что существует непрерывное отображение δ бикомпакта Q на бикомпакт B , такое что $(\mathcal{A}z)(q) = (f_1 z)(\delta q)$ для любого $z \in Z$ и любой точки $q \in Q$. Обозначим через δ^* отображение $C(B)$ в $C(Q)$, задаваемое формулой

$$(\delta^* x)(q) = x(\delta q), q \in Q,$$

где $x \in C(B)$. Заметим, что диаграмма



очевидно коммутативна, то есть $\mathcal{A}|_Z = \delta^* f_1$.

Докажем теперь, что (а) \Rightarrow (б). Положим для краткости $\bar{y} = (y_1, \dots, y_n)$, $f(\bar{y}) = f^x(y_1, \dots, y_n)$. Фиксируем $\rho \in B$ и найдём $q \in Q$, такую что $\delta q = \rho$. Тогда имеем

$$\begin{aligned} (f^x(\bar{y})\rho) &= (f_1 f(\bar{y})\rho) = (f_1 f(\bar{y})\delta q) = (\delta^* f_1 f(\bar{y}))(q) = \\ &= (\mathcal{A} f(\bar{y}))(q) = (f(\mathcal{A}\bar{y}))(q) = f(\mathcal{A}\bar{y}(q)) = f(\delta^* f_1 \bar{y}(q)) = \end{aligned}$$

$$= f(\gamma_1 \bar{y}(\delta q)) = f(\gamma_1 \bar{y}(\rho)) = f(\gamma \bar{y}(\rho)) = (f(\gamma \bar{y}))(\rho).$$

Так как точка $\rho \in B$ - любая, то $\gamma f(\bar{y}) = f(\gamma \bar{y})$. Следовательно, $f(\gamma \bar{y}) \in H$, причём $f(\bar{y}) = \gamma^{-1} f(\gamma \bar{y})$.

Докажем, что $(\delta) \Rightarrow (\alpha)$. Пусть $f(\gamma \bar{y}) \in H$. Найдётся $z \in Y$, такой что $\gamma z = \gamma_1 z = f(\gamma \bar{y})$. Тогда для любого $q \in Q$ имеем $(\pi z)(q) = (\delta^* \gamma_1 z)(q) = (\gamma_1 z)(\delta q) = (f(\gamma \bar{y}))(\delta q) = f((\gamma_1 \bar{y})(\delta q)) = f((\delta^* \gamma_1 \bar{y})(q)) = f((\pi \bar{y})(q)) = (\pi \bar{y})(q)$. Следовательно, $\pi z = f(\pi \bar{y})$. Отсюда $z = \pi^{-1} f(\pi \bar{y})$, то есть $z = f(\bar{y})$. Тем самым $f(\bar{y}) \in Y$. Лемма доказана.

Л е м м а I.I.13. В условиях леммы I.I.12, если Y_n полно по норме $\|\cdot\|_n$, то эквивалентные условия (а), (б) выполнены.

Действительно, в этом случае $H = C(B)$, тем самым выполнено условие (б).

Л е м м а I.I.14. Пусть X K -пространство, Y - его линейная подструктура, $n \in \mathbb{N}$, $f \in CH(R^n)$ и $y_1, y_2, \dots, y_n \in Y$. Положим $n = |y_1| + |y_2| + \dots + |y_n|$. Тогда найдётся последовательность $v_k \in Y$ ($k \in \mathbb{N}$), которая сходится в $f^X(y_1, y_2, \dots, y_n)$ в X с регулятором n .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть Z есть множество всех элементов из X , которые являются (γ) -пределами последовательностей из Y_n с регулятором сходимости n . Тогда $Z = Z_n$ полно по норме $\|\cdot\|_n$, и остаётся применить лемму I.I.13. Лемма доказана.

Вводимый далее класс "квази (?) -полных" K -линеалов, как нам кажется, представляет интерес не только в связи с рассмотрением функций от элементов K -линеала, но заслуживает внимания и сам по себе.

О п р е д е л е н и е I.I.15. Пусть X - архимедов K -линеал, $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$. Пусть U есть линейная подструктура в X , порождённая множеством $\{x_k\}_{k=1}^n$, и пусть $u = |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|$. Ясно, что $U \subset X_u$. Через $X(x_1, x_2, \dots, x_n)$ будем обозначать замыкание U в X_u по норме $\|\cdot\|_u$.

О п р е д е л е н и е I.I.16. Архимедов K -линеал X будем называть квази (?) -полным, если для любого $n \in \mathbb{N}$ и любых $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$ K -линеал $X(x_1, x_2, \dots, x_n)$ полон по норме $\|\cdot\|_u$, где $u = |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|$.

З а м е ч а н и е I.I.17. Ясно, что всякий архимедов (?) -полный K -линеал будет и квази (?) -полным. В каждом из следующих трёх примеров K -линеал, обозначенный через X , квази (?) -полон, но, вообще говоря, не является (?) -полным.

(а) Пусть B - банахово пространство и точка $t_0 \in B$. За X принимаем линейную подструктуру в $C(B)$, состоящую из всех таких $x \in C(B)$, что x постоянна в некоторой окрестности точки t_0 .

(б) Пусть Σ - бесконечное множество индексов и для каждого $\xi \in \Sigma$ T_ξ есть некоторое топологическое пространство. Пусть $T = \prod_{\xi \in \Sigma} T_\xi$ есть обычное топологическое произведение. Будем говорить, что функция $x \in C(T)$ зависит лишь от

конечного числа координат, если существует конечное множество $\Sigma_0 \subset \Sigma$, обладающее следующими свойствами:

если $t = \{t_\xi\} \in T$, $t' = \{t'_\xi\} \in T$ и $t_\xi = t'_\xi$ при всех $\xi \in \Sigma_0$, то $x(t) = x(t')$.

За X принимаем линейную подструктуру в $C(T)$, состоящую из всех таких $x \in C(T)$, что x зависит лишь от конечного числа координат.

(в) Пусть B - произвольный бикомпакт. За X принимаем множество всех функций, заданных, непрерывных и ограниченных на плотных открытых подмножествах в B (с естественным отождествлением).

Связь понятии квази (?) -полноты с понятием функции от элементов K -линеала выясняется в следующей теореме.

Т е о р е м а I.1.18. Для любого архимедова K -линеала X следующие утверждения эквивалентны.

(а) для любого $n \in \mathbb{N}$, любой $f \in C\mathbb{N}(R^n)$ и любых $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$ справедливо $f^X(x_1, x_2, \dots, x_n) \in X$.

(б) X квази (?) -полон.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Справедливость (б) \Rightarrow (а) прямо вытекает из леммы I.1.14. Докажем (а) \Rightarrow (б). Фиксируем $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$ и полагаем $u = |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|$. Найдемся бикомпакт B , линейная подструктура H в $C(B)$,

разделяющая точки из B , и изоморфизм γ K -линеала $X(x_1, x_2, \dots, x_n)$ на K -линеал H , такие что $\gamma u \neq \lambda_B$. Ясно, что семейство $\{\gamma x_k\}_{k=1}^n$ разделяет точки из B .

Возьмем произвольный $z \in C(B)$. В силу леммы I.1.10 существует

пусть $f \in CH(\mathbb{R}^{n+1})$, такая что $f(\gamma x_1, \gamma x_2, \dots, \gamma x_n, \gamma w) = Z$.
 По условию $f^x(x_1, x_2, \dots, x_n, w) = w \in X$. В силу леммы I.I.14
 $w \in X(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Наконец, в силу леммы I.I.12 $\gamma w = Z$.
 Итак, $H = C(B)$. Поэтому $X(x_1, x_2, \dots, x_n)$ полон по норме
 $\|\cdot\|_n$. Теорема доказана.

3. В следующей теореме даются достаточные условия для того, чтобы значения непрерывной (но уже не обязательно положительно однородной) функции от элементов K -линеала принадлежали этому K -линеалу. Введём следующее обозначение. Для $f \in C(\mathbb{R}^n)$ и $0 < \alpha < +\infty$ полагаем

$$z(f, \alpha) = \sup \{ |f(x)| : x \in \mathbb{R}^n, \|x\|_{\mathbb{R}^n} \leq \alpha \},$$

$$z(f) = \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \frac{z(f, \alpha)}{\alpha}.$$

Теорема I.I.19. Пусть X - архимедов квази (z) -полный K -линеал с единицей 1 . Пусть $n \in \mathbb{N}$, $f \in C(\mathbb{R}^n)$, $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$. Для того чтобы было $f^x(x_1, x_2, \dots, x_n) \in X$, достаточно выполнение одного из следующих условий:

(а) $z(f) = 0$.

(б) $z(f) < +\infty$ и X есть K -пространство.

Доказательство. Пусть выполнено (а). Для $t = (t_1, t_2, \dots, t_n, t_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$ положим

$$g(t) = \begin{cases} t_{n+1} f\left(\frac{t_1}{t_{n+1}}, \frac{t_2}{t_{n+1}}, \dots, \frac{t_n}{t_{n+1}}\right) & \text{при } t_{n+1} \neq 0 \\ 0 & \text{при } t_{n+1} = 0. \end{cases}$$

Из $z(f) = 0$ следует, что $g \in CH(\mathbb{R}^{n+1})$, ибо это условие обеспечивает непрерывность g на гиперплоскости $t_{n+1} = 0$ в

\mathbb{R}^{n+1} (непрерывность в остальных точках и положительная однородность q очевидны). Пусть $W = \mathcal{M}(\hat{X})$. Тогда очевидно $f_{\mathbb{H}}^W(x_1, x_2, \dots, x_n) = q^W(x_1, x_2, \dots, x_n, 1)$. Следовательно, $f_{\mathbb{H}}^X(x_1, x_2, \dots, x_n) = q^X(x_1, x_2, \dots, x_n, 1) \in X$ в силу теоремы I.1.18. Пусть выполнено (б). Из $z(f) < +\infty$ следует, что $|f_{\mathbb{H}}^X(x_1, \dots, x_n)| \leq c(|x_1| + \dots + |x_n| + 1)$, где $c > 0$ - некоторое число. Поэтому $f_{\mathbb{H}}^X(x_1, \dots, x_n) \in X$. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е I.1.20. Из результатов Б.З. Вулиха [5] следует, что в теореме I.1.19 к числу условий, обеспечивающих справедливость $f_{\mathbb{H}}^X(x_1, \dots, x_n) \in X$, можно добавить также и следующие:

- (в) \mathbb{H} есть сильная единица в X .
- (г) K -линеал X - максимальный (см. Вулих [5], стр. 384).
- (д) $X_{\mathbb{H}}$ полно по норме $\|\cdot\|_{\mathbb{H}}$. X - внутренне нормален (см. Вулих [5], стр. 378) и $z(f) < +\infty$.

4. Вернёмся опять к случаю положительно однородных непрерывных функций. Следующее предложение прямо следует из леммы I.1.12 и I.1.14 и теоремы I.1.18.

П р е д л о ж е н и е I.1.21. Пусть X - архимедов K -линеал, Y и Z - его линейные подструктуры, являющиеся квази (2) -полными K -линеалами. Тогда для любых $n \in \mathbb{N}$, $f \in \mathcal{C}\mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ и $w_1, w_2, \dots, w_n \in Y \cap Z$ справедливо $f^Y(w_1, w_2, \dots, w_n) = f^Z(w_1, w_2, \dots, w_n) \in Y \cap Z$.

О п р е д е л е н и е I.1.22. Пусть X - архимедов квази (2) -полный K -линеал, Y - его идеал. Будем говорить, что Y функционально замкнут в X , если при всех $n \in \mathbb{N}$,

$f \in CH(R^n)$ и всех $x_1, x_2, \dots, x_n, x'_1, x'_2, \dots, x'_n \in X$ удовлетворяющих условию

$$x_i - x'_i \in Y \quad (i=1, 2, \dots, n), \quad (1.1)$$

справедливо

$$f^X(x_1, x_2, \dots, x_n) - f^X(x'_1, x'_2, \dots, x'_n) \in Y.$$

Теорема 1.1.23. Пусть X - архимедов квази (\mathcal{Z}) -полный K -линейал, Y его (\mathcal{Z}) -замкнутый идеал, ω - канонический гомоморфизм X на факторлинейал X/Y .

Тогда

- (а) Y функционально замкнут в X ;
- (б) факторлинейал X/Y квази (\mathcal{Z}) -полон;
- (в) при всех $n \in \mathbb{N}$, $f \in CH(R^n)$ и $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$

справедливо

$$\omega(f^X(x_1, x_2, \dots, x_n)) = f^{X/Y}(\omega x_1, \omega x_2, \dots, \omega x_n). \quad (1.2)$$

Доказательство. Заметим прежде всего, что Y квази (\mathcal{Z}) -полон. Действительно, для любых y_1, y_2, \dots, y_n из условия следует, что $Y(y_1, y_2, \dots, y_n) = X(y_1, y_2, \dots, y_n)$, откуда вытекает, что $Y(y_1, y_2, \dots, y_n)$ есть K -линейал ограниченных элементов. Докажем (а). Пусть $x_1, \dots, x_n, x'_1, \dots, x'_n \in X$ удовлетворяют условию (1.1), $f \in CH(R^n)$. Положим $u = |x_1| + \dots + |x_n| + |x'_1| + \dots + |x'_n|$, $Z = X(x_1, \dots, x_n, x'_1, \dots, x'_n)$, $V = Y \cap Z$. Так как Z полно по норме $\|\cdot\|_u$, то существует бикомпанкт B и изоморфизм γ K -линейала Z

^{x)} Из (\mathcal{Z}) -замкнутости Y в X следует, что факторлинейал X/Y архимедов.

на $C(B)$, такой что $\gamma u = \chi_B$. Так как V , очевидно, замкнуто в Z по норме $\|\cdot\|_u$, то γV есть замкнутый идеал в $C(B)$. Следовательно, существует замкнутое подмножество B_1 в B , такое что $\gamma V = \{x \in C(B) : x|_{B_1} = 0\}$. В силу (I.1) имеем $x_i - x'_i \in V$ ($i = 1, \dots, n$) , откуда $(\gamma x_i)(\rho) = (\gamma x'_i)(\rho)$ во всех точках $\rho \in B_1$ ($i = 1, \dots, n$) . Отсюда ясно, что $\{(\gamma x_1, \dots, \gamma x_n) - (\gamma x'_1, \dots, \gamma x'_n)\} \in \gamma V$, то есть $\gamma^{-1}\{(\gamma x_1, \dots, \gamma x_n) - (\gamma x'_1, \dots, \gamma x'_n)\} \in V$, то есть $\{(x_1, \dots, x_n) - (x'_1, \dots, x'_n)\} \in V$. Докажем (б) . Возьмём произвольные $z_1, \dots, z_n \in X/Y$. Пусть $x_i \in X$ таковы, что $\omega x_i = z_i$ ($i = 1, \dots, n$) . По условию $X(x_1, \dots, x_n)$ есть КВ-линеал ограниченных элементов с сильной единицей $u = |x_1| + \dots + |x_n|$. Без труда проверяется, что его образ $\omega(X(x_1, \dots, x_n))$ есть КВ-линеал ограниченных элементов с сильной единицей^{х)} $\omega u = |z_1| + \dots + |z_n|$, причём этот образ есть линейная подструктура в X/Y . Обозначим $U = X/Y$. Так как $U(z_1, \dots, z_n) \subset \omega(X(x_1, \dots, x_n))$, то $U(z_1, \dots, z_n)$ есть КВ-линеал ограниченных элементов с сильной единицей $|z_1| + \dots + |z_n|$. Докажем (в) . Фиксируем $n \in \mathbb{N}$. Пусть $\mathcal{D} = \{(t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n : |t_1| + \dots + |t_n| = 1\}$. Для $f \in CH(\mathbb{R}^n)$ полагаем $f^* = f|_{\mathcal{D}}$. Обозначим через \mathcal{U} множество всех $f \in CH(\mathbb{R}^n)$, таких что для любых $x_1, \dots, x_n \in X$ справедливо (I.2) . Наконец, положим $\mathcal{U}^* = \{f^* : f \in \mathcal{U}\}$. Ясно, что \mathcal{U}^* есть линейное подмножество в

^{х)} Мы воспользовались здесь следующим хорошо известным (и без труда проверяемым) фактом. Пусть E_1 - КВ-линеал ограниченных элементов с фиксированной сильной единицей u , E_2 - архимедов К-линеал, ω - линейное отображение E_1 на E_2 , являющееся структурным гомоморфизмом. Тогда ωu есть сильная единица в E_2 , причём E_2 с этой сильной единицей и нормой $\|\cdot\|_{\omega u}$

$C(\mathcal{D})$. Так как ω сохраняет конечные супремумы и инфимумы, то \mathcal{U}^* есть линейная подструктура в $C(\mathcal{D})$. Заметим, что \mathcal{U}^* содержит все константы и что функции из \mathcal{U}^* разделяют точки из \mathcal{D} , ибо все координатные функции пространства R^n содержатся в \mathcal{U} . Наконец, \mathcal{U}^* замкнуто в $C(\mathcal{D})$ по обычной равномерной норме. В силу теоремы Стоуна-Вейерштрасса из связанного следует, что $\mathcal{U}^* = C(\mathcal{D})$, откуда $\mathcal{U} = \mathcal{C}H(R^n)$. Теорема доказана.

§ 2. Реализация пространств регулярных функционалов

I. Установим сначала некоторые вспомогательные предложения.

О п р е д е л е н и е 1.2.1. Пусть X — архимедов K -линеал, Y — его идеал, $f \in \tilde{X}$, $q = f/y$. Функционал f называется **МИНИМАЛЬНЫМ РАСПРОСТРАНЕНИЕМ** q с Y на X , если для любого $x \in X_+$ справедливо $f_+(x) = \sup\{q_+(y) : 0 \leq y \leq x, y \in Y\}$ и $f_-(x) = \sup\{q_-(y) : 0 \leq y \leq x, y \in Y\}$.

Если X — архимедов K -линеал, Y — его идеал, то полагаем:

$$\tilde{X}_Y = \{f \in \tilde{X} : f/y = 0\}.$$

Если X — KN -линеал, Y — его идеал с нормой, индуцированной из X , то полагаем

$$X_Y^* = \{f \in X^* : f/y = 0\}.$$

Л е м м а 1.2.2. Пусть X — архимедов K -линеал, Y — его идеал. Функционал $f \in \tilde{X}$ совпадает с минимальным распространением на X своего сужения f/y тогда и только тогда, когда $f \in \tilde{X}_Y$.

Л е м м а 1.2.3. Пусть X - K -линеал, Y - его идеал с нормой, индуцированной из X . Функционал $f \in X^*$ совпадает с минимальным распространением на X своего сужения $f|_Y$ тогда и только тогда, когда $f \in X_Y^*$. Положим $Tf = f|_Y, f \in (X_Y^*)^d$. отображение T есть линейный и структурный изоморфизм K -пространства $(X_Y^*)^d$ на K -пространство Y^* .

Эти две леммы, разумеется, хорошо известны, см., например, (Локсембург и Заанен [1], заметка IX, теоремы 30.3 и 30.7).

Напомним, что если X - произвольное K -пространство, то $\mathcal{U}(X)$ означает булеву алгебру его компонент.

Л е м м а 1.2.4. Пусть W_1 и W_2 - расширенные K -пространства, Π_1 и Π_2 - единицы в них, T_1 - фундамент в W_1 , T_2 - идеал в W_2 и пусть B - изоморфизм булевой алгебры $\mathcal{U}(T_1)$ на булеву алгебру $\mathcal{U}(T_2)$. Тогда существует единственная пара (R, V) , где V - компонента в W_2 , а R - изоморфизм K -пространства W_1 на V , удовлетворяющая условиям:

- 1) $R(\Pi_1) = R \sum_V \Pi_2$;
- 2) $R(H) \cap T_2 = B(H \cap T_1)$ для любой компоненты $H \in \mathcal{U}(W_1)$.

Эта лемма очевидна: за V нужно принять компоненту в W_2 , порождаемую множеством T_2 , и учесть, что по условию базы K -пространств W_1 и V изоморфны.

2. В этом пункте: W - расширенное K -пространство с фиксированной единицей Π , X - любой его идеал, $M = W_{\Pi}$ - идеал ограниченных элементов из W . Введём некоторые обозначения.

Пусть $f \in \tilde{X}, u \in X_+$. Положим для любого $x \in M$

$$f_{(u)}(x) = f(xu).$$

Ясно, что $f_{(u)} \in \tilde{M}$, а оператор $A_{(u)}$ из \tilde{X} в \tilde{M} , определяемый формулой $A_{(u)}f = f_{(u)}$, линеен и положителен.

Л е м м а 1.2.5. Пусть $E \subset \tilde{X}$ и в \tilde{X} существует $q = \sup E$. Тогда $A_{(u)}q = \sup \{A_{(u)}f : f \in E\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Для любого $x \in M_+$ имеем

$$\begin{aligned} (A_{(u)}q)(x) &= q(xu) = \sup_{\substack{z_1 + \dots + z_n = xu, \\ z_1, \dots, z_n \geq 0, \\ f_1, \dots, f_n \in E}} \{f_1(z_1) + \dots + f_n(z_n)\} = \\ &= \sup_{\substack{x_1 + \dots + x_n = x, \\ x_1, \dots, x_n \geq 0, \\ f_1, \dots, f_n \in E}} \{f_1(x_1u) + \dots + f_n(x_nu)\} = \sup_{\substack{x_1 + \dots + x_n = x, \\ x_1, \dots, x_n \geq 0, \\ f_1, \dots, f_n \in E}} \{(f_1)_{(u)}(x_1) + \dots + \\ &+ (f_n)_{(u)}(x_n)\} = (\sup_{f \in E} A_{(u)}f)(x). \end{aligned}$$

С л е д с т в и е 1.2.6. (а) $|A_{(u)}f| = A_{(u)}(|f|)$

(очевидно).

(б) Если $A_{(u)}f \geq 0$, то существует $q \geq 0 (q \in \tilde{X})$ для которого $A_{(u)}f = A_{(u)}q$.

Действительно, достаточно положить $q = |f|$.

Л е м м а 1.2.7. Образ пространства \tilde{X} при отображении $A_{(u)}$ есть идеал в \tilde{M} .

Д о к а з а т е л ь с т в о . В силу леммы 1.2.5 $A_{(u)}(\tilde{X})$ — линейная подструктура в \tilde{M} . Пусть $0 \leq \varphi < \psi$, где $\psi \in A_{(u)}(\tilde{X})$, $\varphi \in \tilde{M}$. Существует такой $f \in \tilde{X}_+$, что $\psi = A_{(u)}f$. Для любого $x \in X_u$ положим $h(x) = \varphi(xu^{-1})$ (ясно, что $xu^{-1} \in M$). Тогда

х) Ясно, что оператор $A_{(u)}$ может не быть взаимно однозначным.

$h \in \tilde{X}_u$, и, если $x \in X_u^+$, то $h(x) = \varphi(xu) \leq \varphi(xu^+) = f_{(u)}(xu^+) = f(x)$. Таким образом, $0 \leq h \leq f|_{X_u}$. Обозначим через ℓ минимальное распространение функционала h с X_u на X : $\ell \leq f$. При этом, если $x \in M$, то $xu \in X_u$ и $\ell_{(u)}(xu) = \ell(xu) = h(xu) = \varphi(x)$, то есть $\ell_{(u)} = \varphi$ или $\varphi = A_{(u)}\ell$. Тем самым $\varphi \in A_{(u)}(\tilde{X})$.

С л е д с т в и е 1.2.8. Если $u, v \in X_+$ и $u \leq v$, то

$$A_{(u)}(\tilde{X}) \subset A_{(v)}(\tilde{X}).$$

Действительно, из определения операторов $A_{(u)}$ и $A_{(v)}$ сразу следует, что $A_{(u)} \leq A_{(v)}$, а тогда требуемое включение вытекает сразу из леммы 1.2.7.

Л е м м а 1.2.9. Если $f \in \tilde{X}$, то $f = 0$ тогда и только тогда, когда $A_{(u)}f = 0$ при любом $u \in X_+$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Ясно, что если $f = 0$, то $A_{(u)}f = 0$ при любом $u \in X_+$. Обратно, если $A_{(u)}f = 0$ при любом $u \in X_+$, то, беря $x = \mathbb{1}$, мы получим, что $f(u) = f_{(u)}(\mathbb{1}) = 0$ при любом $u \in X_+$, то есть $f = 0$.

Л е м м а 1.2.10. Если $f, g \in \tilde{X}$, то следующие утверждения равносильны:

(а) $f \wedge g$;

(б) $A_{(u)}f \wedge A_{(u)}g$ при любом $u \in X_+$;

(в) $A_{(u)}f \wedge A_{(v)}g$ при любых $u, v \in X_+$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. (а) \implies (в). Используя лемму 1.2.5 и следствие 1.2.6, имеем $|A_{(u)}f| \wedge |A_{(v)}g| = A_{(u)}|f| \wedge A_{(v)}|g| \leq A_{(uvv)}|f| \wedge A_{(uvv)}|g| = A_{(uvv)}(|f| \wedge |g|) = 0$.

(в) \implies (б). Очевидно.

(б) \implies (а). Имеем $A_{(u)}(|f| \wedge |g|) = |A_{(u)}f| \wedge |A_{(u)}g| = 0$, а тогда $|f| \wedge |g| = 0$ по лемме 1.2.9.

Введём множество $V(\tilde{X}) = \bigcup_{u \in X_+} A_{(u)}(\tilde{X})$. Как объединение семейства идеалов из \tilde{M} , направленного по включению (см. лемму 1.2.7 и следствие 1.2.8), $V(\tilde{X})$ — тоже идеал в \tilde{M} . Аналогично, для любой компоненты $H \in \mathcal{O}(\tilde{X})$ полагаем

$$V(H) = \bigcup_{u \in X_+} A_{(u)}(H).$$

Л е м м а 1.2.11. Если H_1 и H_2 — две взаимно дополнительные компоненты K -пространства \tilde{X} , то $V(H_1)$ и $V(H_2)$ — взаимно дополнительные компоненты K -пространства $V(\tilde{X})$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Множества $V(H_1)$ и $V(H_2)$ дизъюнктны по лемме 1.2.10. Произвольный $h \in V(\tilde{X})$ представим в виде $h = A_{(u)}f$, где $f \in \tilde{X}$, $u \in X_+$. Положим $f_1 = P_{Z_{H_1}}f$, $f_2 = P_{Z_{H_2}}f$. Тогда $h_i = A_{(u)}f_i \in V(H_i)$, $(i=1,2)$, а $h = h_1 + h_2$. Отсюда уже сразу следует, что $V(H_1)$ и $V(H_2)$ — компоненты и при этом взаимно дополнительные.

С л е д с т в и е 1.2.12. (а) Если $H_1 \not\perp H_2$, ($H_1, H_2 \in \mathcal{O}(\tilde{X})$), то $V(H_1) \not\perp V(H_2)$.

(б) Если $H_1 \neq H_2$, то $V(H_1) \neq V(H_2)$.

Л е м м а 1.2.13. Пусть Y — идеал в X , $q \in \tilde{Y}_+$, и пусть существует минимальное распространение функционала q на X , которое мы обозначим через f . Тогда

- 1) $f(v) = q(v)$ для любого $v \in Y_+$;
- 2) множества $\mathcal{P}_1 = \{f(u) : u \in X_+\}$ и $\mathcal{P}_2 = \{q(v) : v \in Y_+\}$ порождают в \tilde{M} одну и ту же компоненту.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1) Для любого $x \in M$ и $v \in Y_+$ имеем $q(v)(x) = q(xv) = f(xv) = f(v)(x)$.

2) Из 1) следует, что $\mathcal{P}_2 \subset \mathcal{P}_1$. Для фиксированного $u \in X_+$

Так как $q_{(v)} \in \mathcal{G}$ для любого $q_{(v)} \in \mathcal{G}$, то $\sup \mathcal{G}$ в \tilde{M} существует. Обозначим его временно через φ . Теперь достаточно доказать, что $f_{(u)}(x) = \varphi(x)$ для любого x из базы $\mathcal{E}(M)$, поскольку линейные комбинации единичных элементов образуют в M множество, плотное относительно сходимости с регулятором. Но $\varphi(x) = \sup_{0 \leq v \leq u, v \in \mathcal{U}} q_{(v)}(x) = \sup_{0 \leq v \leq u, v \in \mathcal{U}} q(xv) = \sup_{0 \leq v \leq u, v \in \mathcal{U}} q(y) = f(xu) = f_{(u)}(x)$, и лемма доказана.

Л е м м а I.2.14. Для произвольной компоненты Z из K -пространства $B(\tilde{X})$ существует такая компонента $H \in \mathcal{K}(\tilde{X})$, что $B(H) = Z$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Положим $H = \bigcap_{v \in X_+} A_{(v)}^{-1}(Z)$ и проверим, что H - требуемая компонента. Ясно, что H - компонента в \tilde{X} и что $B(H) \subset Z$. Пусть $q \in Z_+$. Тогда существуют такие $\varphi \in \tilde{X}_+$, $u \in X_+$, что $\varphi_{(u)} = A_{(u)}\varphi = q$. Идеал X_u обозначим для краткости через Y и построим минимальное распространение f функционала $\psi = \varphi|_Y$ на все X . Тогда $f_{(u)} = \varphi_{(u)} = q$. Проверим, что $f \in H$. Это значит, что $f_{(v)} \in Z$ при любом $v \in X_+$. По предыдущей лемме достаточно проверить, что $\psi_{(w)} \in Z$ при любом $w \in Y_+$. Но для любого $w \in Y_+$ существует такое число $\lambda \geq 0$, что $w \leq \lambda u$. А тогда $\psi_{(w)} \leq \psi_{(\lambda u)} = \lambda \psi_{(u)} = \lambda \varphi_{(u)} = \lambda q \in Z$ и $\psi_{(w)} \in Z$.

Из лемм I.2.11 и I.2.14 (см. также следствие I.2.12) сразу следует, что отображение B есть изоморфизм между булевыми алгебрами компонент K -пространств \tilde{X} и $B(\tilde{X})$.

^{x)} Напоминаем, что оператор $A_{(u)}$ сохраняет грани.

Напомним, что максимальное расширение произвольного K -пространства U обозначается через $\mathcal{M}(U)$.

Л е м м а 1.2.15. Пусть в K -пространствах $\mathcal{M}(\tilde{X})$ и $\mathcal{M}(\tilde{M})$ зафиксированы единицы $\mathbb{1}_1$ и $\mathbb{1}_2$ (соответственно). Тогда существует единственная пара (R_X, V_X) , где V_X - компонента в $\mathcal{M}(\tilde{M})$, а R_X - изоморфизм K -пространства $\mathcal{M}(\tilde{X})$ на V_X , удовлетворяющая условиям:

- 1) $R_X(\mathbb{1}_1) = R_{\mathbb{2}} V_X \mathbb{1}_2$;
- 2) $R_X(H) \cap V(\tilde{X}) = V(H \cap \tilde{X})$ для любой $H \in \mathcal{O}(\mathcal{M}(\tilde{X}))$.

Лемма вытекает из леммы 1.2.4. При этом заметим, что V_X - компонента в $\mathcal{M}(\tilde{M})$, порождённая множеством $V(\tilde{X})$.

3. Теперь мы введём понятие дизъюнктивности для регулярных функционалов, заданных на различных идеалах одного и того же расширенного K -пространства. Пусть W - расширенное K -пространство, в котором фиксирована единица $\mathbb{1}$, X и Y - любые его идеалы, $M = W_{\mathbb{1}}$ - идеал ограниченных элементов.

О п р е д е л е н и е 1.2.16. Пусть $f \in \tilde{X}$, $g \in \tilde{Y}$. Будем говорить, что f и g **ДИЗЪЮНКТИВНЫ** ($f \text{ D } g$), если $f(u)dg(v)$ в K -пространстве \tilde{M} для любых $u \in X_+$, $v \in Y_+$.

Из леммы 1.2.10 видно, что в случае, когда $X = Y$, дизъюнктивность в новом обобщённом смысле равносильна обычной. Отметим также, что если $g = 0$, то $f \text{ D } g$ для любого $f \in X$.

Л е м м а 1.2.17. Для любого множества $\mathcal{P} \subset \tilde{Y}$ совокупность $H = \{f : f \in X, f \text{ D } g \text{ для любого } g \in \mathcal{P}\}$ - компонента в \tilde{X} .

Доказательство. Обозначим через E дизъюнктное дополнение в K -пространстве \tilde{M} к множеству всех функционалов $q(v)$, где $q \in \mathcal{P}$, $v \in Y_+$. Тогда E - компонента в \tilde{M} . Но $H = \bigcap_{u \in X_+} A_{(u)}^{-1}(E)$, и тем самым H - компонента в \tilde{X} .

Лемма 1.2.18. Если $f \in \tilde{X}$, $q \in \tilde{M}$, то соотношение $f \perp Dq$ равносильно тому, что $f_{(u)} \perp dq$ для любого $u \in X_+$.

Доказательство. Если $f \perp Dq$, то $f_{(u)} \perp dq(v)$ для любых $u \in X_+$, $v \in M_+$. В частности, беря $v = \mathbb{1}$, получим $q(v) = q$ и, следовательно, $f_{(u)} \perp dq$. Обратно, пусть $f_{(u)} \perp dq$ для любого $u \in X_+$. Если $v \in M_+$, то $v \leq c \mathbb{1}$ при некотором c , а тогда $|q(v)| = |q|_{(v)} \leq c|q|$. Следовательно, $|f_{(u)}| \wedge |q(v)| \leq |f_{(u)}| \wedge c|q| = 0$.

Лемма 1.2.19. Пусть $\mathcal{P} \subset \tilde{X}$, а H - компонента в \tilde{X} , порождённая множеством \mathcal{P} . Тогда множество $L = \bigcup_{u \in X_+} A_{(u)}(\mathcal{P})$ порождает в $B(\tilde{X})$ компоненту $B(H)$.

Доказательство. Обозначим через Z компоненту в $B(\tilde{X})$, порождённую множеством L . Тогда $Z \subset B(H)$. Из доказательства леммы 1.2.14 видно, что $B^{-1}(Z) = \bigcap_{u \in X_+} A_{(u)}^{-1}(Z)$, и потому $\mathcal{P} \subset B^{-1}(Z)$. Отсюда сразу вытекает, что $H \subset B^{-1}(Z)$ или $B(H) \subset Z$, а тем самым $Z = B(H)$.

4. Переходим к основным теоремам о реализации пространств регулярных функционалов. По-прежнему W - расширенное K -пространство, в котором фиксирована единица $\mathbb{1}$, X и Y - любые его идеалы, $M = W_{\mathbb{1}}$ - идеал ограниченных элементов. В K -пространствах $\mathcal{M}(\tilde{X})$ и $\mathcal{M}(\tilde{M})$ зафиксированы единицы $\mathbb{1}_1$ и $\mathbb{1}_2$ (соответственно).

Теорема 1.2.20. СУЩЕСТВУЕТ ЕДИНСТВЕННАЯ ПАРА (R_X, V_X) . ГДЕ V_X - КОМПОНЕНТА В $\mathcal{M}(\tilde{M})$, А R_X - ИЗОМОРИЗМ К-ПРОСТРАНСТВА $\mathcal{M}(\tilde{X})$ НА V_X . УДОВЛЕТВОРЯЮЩАЯ УСЛОВИЯМ:

1) ДЛЯ ЛЮБЫХ $f \in \tilde{X}$ И $g \in \tilde{M}$ СООТНОШЕНИЯ $f Dg$ И $R_X f dg$ РАВНОСИЛЬНЫ;

$$2) R_X(\mathbb{1}_1) = R_X V_X \mathbb{1}_2.$$

Определение 1.2.21. Оператор R_X из теоремы 1.2.20 будем называть КАНОНИЧЕСКОЙ РЕАЛИЗАЦИЕЙ пространства \tilde{X} , или, точнее, канонической реализацией пары $(\tilde{X}, \mathbb{1}_1)$.

Доказательство теоремы 1.2.20. Мы покажем, что требуемым условиям удовлетворяет пара (R_X, V_X) из леммы 1.2.15. В проверке нуждается только условие 1).

Пусть $f \in \tilde{X}$, $g \in \tilde{M}$, H - компонента в $\mathcal{M}(\tilde{X})$, порождённая функционалом f , $H_1 = H \cap \tilde{X}$. Из леммы 1.2.17 следует, что соотношения $f Dg$ и $H_1 Dg$ ^{х)} равносильны. Последнее, по лемме 1.2.18, равносильно тому, что $h_{(u)} dg$ для любых $h \in H_1$ и $u \in X_+$, то есть тому, что $B(H_1) dg$. Это же, в свою очередь, по лемме 1.2.15, равносильно соотношению $R_X(H) dg$. Но так как R_X - изоморфизм, то $R_X(H)$ - компонента в V_X , порождённая функционалом $R_X f$.

Теперь докажем, что требуемая пара - единственная. Пусть (R'_X, V'_X) - ещё одна пара, удовлетворяющая условиям теоремы;

H и H_1 имеют прежний смысл. Тогда соотношения $R_X f dg$ и $R'_X f dg$ ($f \in \tilde{X}, g \in \tilde{M}$) равносильны, а потому множества $R_X(H_1)$

^{х)} это значит, что $h Dg$ для любого $h \in H_1$.

и $R'_X(H_i)$ порождают в $\mathcal{M}(\tilde{M})$ одну и ту же компоненту, то есть $R_X(H) = R'_X(H)$ для любой компоненты H из $\mathcal{M}(\tilde{X})$. В частности, $V'_X = R'_X(\mathcal{M}(\tilde{X})) = R_X(\mathcal{M}(\tilde{X})) = V_X$. Кроме того, $R'_X(H) \cap B(\tilde{X}) = B(H \cap \tilde{X})$, поскольку R_X обладает этим свойством (см. лемму 1.2.15), а тогда единственность R_X вытекает из леммы 1.2.15.

Теорема 1.2.22. Пусть $f \in \tilde{X}$. Тогда компонента в $\mathcal{M}(\tilde{M})$, порождённая элементом $R_X f$, совпадает с компонентой, порождённой множеством $\{f(u) : u \in X_+\}$.

Доказательство. Из теоремы 1.2.20 и леммы 1.2.13 следует, что соотношения $f(u) dg$ при любом $u \in X_+$ и $R_X f dg (g \in \tilde{M})$ равносильны. Отсюда уже сразу вытекает, что дизъюнктные дополнения в $\mathcal{M}(\tilde{M})$ к элементу $R_X f$ и к множеству $\{f(u) : u \in X_+\}$ совпадают, следовательно, совпадают и указанные в теореме компоненты.

Теорема 1.2.23. Если $f \in \tilde{X}, g \in \tilde{Y}$, то соотношения $f Dg$ и $R_X f dR_Y g$ равносильны.

Доказательство. По определению соотношение $f Dg$ равносильно тому, что $f(u) dg(v)$ при любых $u \in X_+, v \in Y_+$. Последнее же, по теореме 1.2.22, равносильно дизъюнктности функционалов $R_X f$ и $R_Y g$ (х).

Таким образом, рассматривая различные идеалы в одном и том же K -пространстве W , мы сможем нагрузить пространства, присоединённые к ним, в одно K -пространство $\mathcal{M}(M)$ и при этом так, что функционалы, дизъюнктные в обобщённом смысле D .

х) Так как дизъюнктность двух множеств равносильна дизъюнктности порождённых ими компонент.

переходят при погружении в элементы, дизъюнктные в обычном смысле.

Наложив на X и Y некоторые дополнительные ограничения, докажем ещё одну теорему.

Т е о р е м а 1.2.24. ПУСТЬ X - KN -ПРОСТРАНСТВО, Y - ЕГО ИДЕАЛ С НОРМОЙ, ИНДУЦИРОВАННОЙ ИЗ X , И В $\mathcal{M}(\tilde{X})$ ВЫБРАНА ЕДИНИЦА Π_1 . ТОГДА В $\mathcal{M}(\tilde{Y})$ МОЖНО ВЫБРАТЬ ЕДИНИЦУ Π_2 ТАК, ЧТО ПРИ КАНОНИЧЕСКОЙ РЕАЛИЗАЦИИ ПРОСТРАНСТВ \tilde{X} И \tilde{Y} БУДУТ ВЫПОЛНЕНЫ СЛЕДУЮЩИЕ УСЛОВИЯ:

- 1) $R_Y(Y^*)$ - КОМПОНЕНТА В $R_X(X^*)$;
- 2) ЕСЛИ $f \in X^*$, $\varphi = f|_Y$, ТО $R_Y \varphi$ ЕСТЬ ПРОЕКЦИЯ ЭЛЕМЕНТА $R_X f$ НА $R_Y(Y^*)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Используя обозначения, введённые в начале параграфа, рассмотрим множество $X_Y^* = \{f : f \in X^*, f|_Y = 0\}$. Положим $U = (X_Y^*)^d$ и будем считать $\mathcal{M}(X^*)$ (соответственно $\mathcal{M}(Y^*)$) компонентой в $\mathcal{M}(\tilde{X})$ (соответственно в $\mathcal{M}(\tilde{Y})$), а $\mathcal{M}(X_Y^*)$ и $\mathcal{M}(U)$ - компонентами в $\mathcal{M}(X^*)$. То отображение Γ , которое было введено в лемме 1.2.3, будем считать продолженным до изоморфизма K -пространства $\mathcal{M}(U)$ на K -пространство $\mathcal{M}(Y^*)$. Выберем единицу Π_2 в $\mathcal{M}(\tilde{Y})$ так, что

$$P_{Z_{\mathcal{M}(Y^*)}} \Pi_2 = \Gamma(P_{Z_{\mathcal{M}(U)}} \Pi_1). \quad (2.1)$$

Докажем, что

$$R_X \Gamma^{-1} = R_Y|_{\mathcal{M}(Y^*)}. \quad (2.2)$$

Пусть $f \in Y^*$, $q \in \tilde{M}$. Тогда соотношения

$$q d R_X T^{-1} f \quad \text{и} \quad q d R_Y f \quad \text{равносильны.} \quad (2.3)$$

Действительно, по теореме 1.2.22 первое из них равносильно соотношению

$$q d (T^{-1} f)_{(u)} \quad \text{для любого } u \in X_+, \quad (2.4)$$

а второе - тому, что

$$q d f_{(v)} \quad \text{для любого } v \in Y_+, \quad (2.5)$$

Легко видеть, что если $T^{-1} f \geq 0$, то $T^{-1} f$ - минимальное распространение функционала f с Y на X (х). Поэтому применима лемма 1.2.13, и множества функционалов $\{(T^{-1} f)_{(u)} : u \in X_+\}$ и $\{f_{(v)} : v \in Y_+\}$ порождают в \tilde{M} одну и ту же компоненту. Следовательно, соотношения (2.4) и (2.5) равносильны, и (2.3) доказано.

Из (2.3) видно, что $R_X T^{-1}(H) = R_Y(H)$ для любой компоненты $H \in \mathcal{K}(\mathcal{M}(Y^*))$. В частности,

$$R_X T^{-1}(\mathcal{M}(Y^*)) = R_Y(\mathcal{M}(Y^*)). \quad (2.6)$$

Далее, из (2.1) вытекает, что

$$R_X T^{-1}(P_{\mathcal{M}(Y^*)} \mathbb{1}_2) = R_X(P_{\mathcal{M}(U)} \mathbb{1}_1).$$

Следовательно, это единичный элемент в $\mathcal{M}(\tilde{M})$, а тогда, в силу (2.6), он совпадает с $R_Y(P_{\mathcal{M}(Y^*)} \mathbb{1}_2)$. Из всего сказанного и вытекает (2.2) (хх).

х) Ясно, что минимальное распространение (б) - линейного функционала (б) - линейно, а $T^{-1} f$ определяется однозначно.

хх) Если A и B - два изоморфных отображения расширенного K -пространства E_1 на расширенное K -пространство E_2 , то $A(U) = B(U)$ для любой компоненты U .

Далее, имеем $R_Y(Y^*) = R_X(T^{-1}(Y^*)) = R_X(u)$ и по-
тому $R_Y(Y^*)$ - компонента в $R_X(X)$.

Пусть теперь $f \in X^*$, $\varphi = f|_Y$. Положим $\psi = f - T^{-1}\varphi$. Тогда $\psi \in X_Y^*$, а $R_X f = R_X T^{-1}\varphi + R_X \psi = R_Y \varphi + R_X \psi$. Но $R_X \psi dR_X u = R_Y(Y^*)$, а потому $R_Y \varphi$ - проекция функционала $R_X f$ на $R_Y(Y^*)$.

З а м е ч а н и е 1.2.25. В условиях теоремы 1.2.24 $R_Y(\tilde{Y})$ не обязано быть компонентой в $R_X(\tilde{X})$ ни при каком выборе единиц. Достаточно рассмотреть $X = L^1[0, 1]$, $Y = L^\infty[0, 1]$.

5. В этом пункте будут изложены некоторые дополнительные сведения о канонической реализации, которые нам понадобятся в главе II. По-прежнему W - расширенное K -пространство, в котором фиксирована единица $\mathbb{1}$. X - любой его идеал.

$M = W_{\mathbb{1}}$ - идеал ограниченных элементов. В K -пространствах $\mathcal{M}(\tilde{X})$ и $\mathcal{M}(\tilde{M})$ зафиксированы единицы $\mathbb{1}_1$ и $\mathbb{1}_2$ (соответственно). Пусть R_X есть каноническая реализация пространства \tilde{X} . Естественным образом считаем, что $\mathcal{M}(\tilde{M})$ и $\mathcal{M}(\tilde{M}_{ant})$ суть компоненты в $\mathcal{M}(\tilde{M})$, порождённые \tilde{M} и \tilde{M}_{ant} соответственно.

П р е д л о ж е н и е 1.2.26. Для любого $f \in \tilde{X}$ следующие утверждения эквивалентны:

- (а) $f \in \tilde{X}$;
- (б) $f_{(u)} \in \tilde{M}$ при всех $u \in X_+$;
- (в) $R_X f \in \mathcal{M}(\tilde{M})$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. (а) \implies (б). Если направление $x_\alpha \neq 0$ ($\alpha \in A$) в M , то $ux_\alpha \neq 0$ в X , поэтому $f_{(u)}(x_\alpha) = f(ux_\alpha) \rightarrow 0$ при всех $u \in X_+$. Эквивалентность (б) \iff (в) есть следствие теоремы 1.2.22. Докажем (б) \implies (а). Пусть на-

правление $x_\alpha \neq 0$ ($\alpha \in A$) в X . Можно считать, что существует $u \in X_+$, такой что $x_\alpha \leq u$ при всех $\alpha \in A$. Тогда $u^{-1}x_\alpha \neq 0$ в M , поэтому $\{x_\alpha\} = \{(u^{-1}x_\alpha)\} \rightarrow 0$.

Предложение 1.2.27. Для любого $f \in \tilde{X}$ следующие утверждения эквивалентны:

- (а) $f \in \tilde{X}_{ant}$;
- (б) $f(u) \in \tilde{M}_{ant}$ при всех $u \in X_+$;
- (в) $R_X f \in \mathfrak{M}(\tilde{M}_{ant})$.

Доказательство. (а) \Rightarrow (в). Допустим, что $f \in \tilde{X}_{ant}$, но $R_X f \notin \mathfrak{M}(\tilde{M}_{ant})$. Тогда существует $h \in \mathfrak{M}(\tilde{M})$ такой что $0 < h \leq |R_X f| = R_X |f|$. Найдётся $h \in \tilde{X}$ такой что $R_X h = h$. Ясно, что $0 < h \leq |f|$. Остаётся заметить, что в силу предложения 1.2.26 $h \in \tilde{X}$, что невозможно. Эквивалентность (б) \Leftrightarrow (в) есть следствие теоремы 1.2.22.

Докажем (в) \Rightarrow (а). Так как $R_X f \in \mathfrak{M}(\tilde{M}_{ant})$, то $R_X f \in \mathfrak{M}(\tilde{M})$. Тогда в силу предложения 1.2.26 будет $R_X f \in R_X \mathfrak{M}$, то есть $f \in \mathfrak{M}$, для любого $g \in \tilde{X}$. Тем самым $f \in \tilde{X}_{ant}$.

Введём теперь следующее обозначение. Пусть V есть K -пространство и $f \in \bar{V}_+$, тогда V_f есть его компонента существенной положительности.

Лемма 1.2.28. Для любых $f \in \bar{X}_+$, $g \in \bar{M}_+$ следующие утверждения эквивалентны:

- (а) $f \perp Dg$;
- (б) функционалы $f|_{X \cap M}$ и $g|_{X \cap M}$ дезъюнктивны.

Доказательство. Положим для краткости

$V = X \cap M, F = \{f|_V, G = q|_V$. Так как $\{F_{(u)} : u \in V_+\} \subset \{f_{(u)} : u \in X_+\}$, $\{G_{(v)} : v \in V_+\} \subset \{g_{(v)} : v \in M_+\}$, то в силу теоремы 1.2.22 из $f \perp Dg$ следует, что $F \perp G$, то есть что $F \perp G$. Обратно, пусть $F \perp G$. Тогда $V_F \cap V_G = \{0\}$. Но $V_G = M_g \cap V$. Следовательно, $V_F \cap M_g = \{0\}$, поэтому $F_{(u)} \perp g_{(v)}$ для любых $u \in V_+, v \in M_+$. Тем самым $F \perp g$. Но f есть минимальное распространение F на X . Из леммы 1.2.13 тогда следует, что $f \perp Dg$. Лемма доказана.

Предложение 1.2.29. Пусть X не просто идеал, но фундамент в W и пусть \bar{M} тотально на M . Следующие утверждения эквивалентны:

- (а) \bar{X} тотально на X ;
- (б) $R_X(\bar{X})$ есть фундамент в $\mathcal{M}(\bar{M})$.

Доказательство. Положим $V = X \cap M$. Пусть \bar{X} тотально на X . Допустим, что $R_X(\bar{X})$ не есть фундамент в $\mathcal{M}(\bar{M})$. Тогда существует $q \in \bar{M}$, такой что $q > 0$ и $q \perp D\bar{X}$. Из леммы 1.2.23 теперь следует, что на $M_q \cap X$ аннулируются все функционалы $f \in \bar{X}$. Противоречие. Утверждение (а) \Rightarrow (б) доказано. Пусть теперь $R_X(\bar{X})$ есть фундамент в $\mathcal{M}(\bar{M})$. Допустим, что \bar{X} не является тотальным на X . Тогда существует компонента K в X , такая что $K \neq \{0\}$ и каждый $f \in \bar{X}$ аннулируется на K . Возьмём произвольный $q \in \bar{M}$, такой что $q > 0$ и $M_q \cap X \subset K$. Из леммы 1.2.23 тогда следует, что $\bar{X} \perp Dq$, тем самым $R_X(\bar{X})$ не есть фундамент в $\mathcal{M}(\bar{M})$. Противоречие. Предложение доказано.

Глава II

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ БАНАХОВЫХ СТРУКТУР С ПОМОЩЬЮ ВОГНУТЫХ ФУНКЦИЙ

Глава II построена несколько иначе, чем другие главы, а именно: в §§ 1-6 приведены формулировки основных результатов, а в §§ 7-18 - их доказательства.

В работе Кальдерона [1] была введена конструкция, позволяющая по заданным банаховым KN -пространствам X_0 и X_1 , являющимися идеалами в некотором расширенном K -пространстве^{X)}

W , и вогнутой функции $\psi(\xi, \eta)$, удовлетворяющей определенным условиям, образовать новое банахово KN -пространство $\psi(X_0, X_1)$, являющееся идеалом в W (см. определение 2.1.7).

Указанная конструкция является широким обобщением известной конструкции пространств Орлица (см. Красносельский и Рунцкий [1]).

Глава II посвящена изучению этой важной конструкции. Наш метод принципиально отличается от метода Кальдерона: метод Кальдерона основан на теории аналитических функций комплексного переменного, а наш метод основан на теории полуупорядоченных пространств и в особенности на аппарате канонических реализаций пространств регулярных функционалов, разработанном в главе I § 2.

^{X)} В работе Кальдерона рассматривался только случай $W = S(T, \Sigma, \mu)$, где (T, Σ, μ) есть пространство с σ -конечной мерой.

В этой главе к числу главных результатов диссертации относятся: теорема 2.2.8 (о строении пространства $(X_0^{1-s} X_1^s)^*$), теорема 2.2.12 (о строении пространства $(X_0^{1-s} X_1^s)'$), теорема 2.3.4 (о степенном преобразовании нормы), теорема 2.4.2 (о свойствах пространства $\Psi(X_0, X_1)$), теоремы 2.4.5 и 2.4.6 (о дуальных пространствах к пространствам типа $\Psi(X_0, X_1)$).

Несмотря на довольно специальный характер конструкции Кальдерона, с помощью её свойств, установленных в §§ I-4, удалось получить некоторые результаты, относящиеся к общей теории банаховых структур (теоремы 2.5.1, 2.5.3 и 2.5.5) и к теории банаховых пространств с безусловными базисами (теорема 2.6.1). Эти теоремы тоже относятся к числу главных результатов диссертации.

§ I. Основные определения и простейшие следствия из них

I. О п р е д е л е н и е 2.1.1. \mathcal{A}_2 есть множество всех вещественных функций $\varphi(\xi, \eta)$, удовлетворяющих условиям:

а) Область определения φ есть \mathbb{R}_+^2 и φ непрерывна (по совокупности аргументов) на \mathbb{R}_+^2 ;

б) φ - вогнута, то есть

$$\varphi(\lambda \xi_1 + (1-\lambda)\xi_2, \lambda \eta_1 + (1-\lambda)\eta_2) \geq \lambda \varphi(\xi_1, \eta_1) + (1-\lambda)\varphi(\xi_2, \eta_2)$$

при всех $\lambda \in (0, 1)$ и всех $(\xi_1, \eta_1), (\xi_2, \eta_2) \in \mathbb{R}_+^2$;

в) $\varphi(\xi, 0) = \varphi(0, \eta) = 0$ при всех $\xi, \eta \geq 0$; (1.1)

г) $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \varphi(\xi, \alpha) = \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \varphi(\beta, \eta) = +\infty$ при всех $\xi, \eta > 0$. (1.2)

Из определения 2.1.1 прямо следует, что любая функция $\varphi(\xi, \eta) \in \mathcal{A}_2$ удовлетворяет также следующим условиям:

д) для любого $\xi > 0$ функция $\varphi(\xi, \cdot)$ строго возрастает на $[0, +\infty)$;

е) для любого $\eta > 0$ функция $\varphi(\cdot, \eta)$ строго возрастает на $[0, +\infty)$;

ж) $\varphi(\xi, \eta) > 0$ при всех $\xi, \eta > 0$.

О п р е д е л е н и е 2.1.2. \mathcal{A}_2^0 есть множество всех положительно однородных функций из \mathcal{A}_2 .

Важным примером функции класса \mathcal{A}_2^0 является функция $\xi^{1-s} \eta^s$, где $0 < s < 1$. Она существенно используется в дальнейших построениях.

О п р е д е л е н и е 2.1.3. Для $\varphi \in \mathcal{A}_2^0$ полагаем

$$\hat{\varphi}(\xi, \eta) = \inf_{\alpha, \beta > 0} \frac{\alpha \xi + \beta \eta}{\varphi(\alpha, \beta)}, \quad (\xi, \eta) \in \mathbb{R}_+^2. \quad (1.3)$$

Следующее предложение будет доказано в § 7 п. I.

П р е д л о ж е н и е 2.1.4. Пусть $\varphi \in \mathcal{A}_2^0$. Тогда $\hat{\varphi} \in \mathcal{A}_2^0$, причём $\hat{\hat{\varphi}} = \varphi$.

Между функциями из \mathcal{A}_2^0 и N -функциями^{х)} в смысле Красносельского и Рутцкого [1] существует тесная связь.

П р е д л о ж е н и е 2.1.5. (а) Пусть $M(\xi)$ и $N(\xi)$ суть пара дополнительных друг к другу N -функций. Для $\xi, \eta \geq 0$ положим

^{х)} Напомним, что функция $M(\xi)$, определённая на $(-\infty, +\infty)$, называется N -функцией, если она непрерывна, выпукла, чётна и удовлетворяет следующим условиям: $M(\xi) > 0$ при $\xi > 0$;
 $\lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{M(\xi)}{\xi} = 0$; $\lim_{\xi \rightarrow +\infty} \frac{M(\xi)}{\xi} = +\infty$.

$$\varphi(\xi, \eta) = \begin{cases} 0 & \text{при } \eta = 0 \\ \eta M^{-1}(\xi \eta^{-1}) & \text{при } \eta > 0. \end{cases} \quad (1.4)$$

Тогда $\varphi \in \mathcal{U}_2^0$, причём

$$\hat{\varphi}(\xi, \eta) = \begin{cases} 0 & \text{при } \xi = 0 \\ \xi N^{-1}(\eta \xi^{-1}) & \text{при } \xi > 0. \end{cases} \quad (1.5)$$

Здесь и всюду далее $M^{-1}(\xi)$ и $N^{-1}(\xi)$ суть функции, обратные к $M(\xi)$ и $N(\xi)$, рассматриваемым при неотрицательных значениях аргумента.

(б) Обратно, для любой $\varphi \in \mathcal{U}_2^0$ найдётся единственная N -функция $M(\xi)$ такая, что справедливо (1.4). Именно, $M(\xi)$ есть чётное продолжение на $(-\infty, +\infty)$ функции, обратной к функции $\varphi(\xi, 1)$.

Доказательство см. в § 7 п. 1.

Заметим, что если $\varphi(\xi, \eta) = \xi^{1-s} \eta^s$, где $0 < s < 1$, то $\hat{\varphi}(\xi, \eta) = \frac{1}{s^s(1-s)^{1-s}} \xi^{1-s} \eta^s$ и соответствующие по (1.4) и (1.5) N -функции суть $M(\xi) = |\xi|^{1-s}$, $N(\xi) = s(1-s)^{\frac{1}{s}} |\xi|^{\frac{1}{s}}$. Действительно, взяв в (1.4) $\eta = 1$, получаем $M^{-1}(\xi) = \varphi(\xi, 1) = \xi^{1-s}$, откуда $M(\xi) = |\xi|^{\frac{1}{1-s}}$. Но (см. Красносельский и Рутницкий [1], стр. 25) N -функции $M_1(\xi) = (1-s)|\xi|^{\frac{1}{1-s}}$ и $N_1(\xi) = s|\xi|^{\frac{1}{s}}$ — дополняют друг к другу. Следовательно (см. Красносельский и Рутницкий [1], стр. 23), для любых чисел $a, b > 0$ N -функции $aM_1(b\xi)$ и $aN_1(\frac{\xi}{ab})$ тоже дополняют друг к другу. Взяв $a = \frac{1}{1-s}$, $b = 1$, получим $M(\xi) = aM_1(b\xi)$, откуда $N(\xi) = aN_1(\frac{\xi}{ab}) = \frac{1}{1-s} N_1((1-s)\xi) = \frac{s}{1-s} (1-s)^{\frac{1}{s}} |\xi|^{\frac{1}{s}} = s(1-s)^{\frac{1}{s}} |\xi|^{\frac{1}{s}}$. Откуда $N^{-1}(\xi) = \frac{1}{s^s(1-s)^{1-s}} \xi^s$ теперь по (1.5) получаем $\hat{\varphi}(\xi, \eta) = \frac{1}{s^s(1-s)^{1-s}} \xi^{1-s} \eta^s$.

2. Определение 2.1.6. НА ПРОДУМЕННОМ ВСЕЙ ГЛАВЫ II W ЕСТЬ ПРОИЗВОЛЬНОЕ РАСШИРЕННОЕ K -ПРОСТРАНСТВО С ФИКСИРОВАННОЙ ЕДИНИЦЕЙ: $\Pi(W)$. X_0 И X_1 СУТЬ БАНАХОВЫ KN -ПРОСТРАНСТВА, ПРЕДСТАВЛЯЮЩИЕ ИДЕАЛАМИ В W . В ТЕХ СЛУЧАЯХ, КОГДА НА $W, \Pi(W), X_0, X_1$ БУДУТ НАКЛАДЫВАТЬСЯ КАКИЕ-НИБУДЬ ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ОГРАНИЧЕНИЯ, ЭТИ ОГРАНИЧЕНИЯ БУДУТ КАЖДЫЙ РАЗ ОСОБО ОГОВАРИВАТЬСЯ. ПОЛАГАЕМ $M = W_{\Pi(W)}$ ПРОСТРАНСТВО ОГРАНИЧЕННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ (см. гл. 0 § 1).

Напомним, что $X_0 \cap X_1$ И $X_0 + X_1 = \{x_0 + x_1 : x_0 \in X_0, x_1 \in X_1\}$ СУТЬ ИДЕАЛЫ В W , И ЧТО ОНИ ОКАЗЫВАЮТСЯ БАНАХОВЫМИ KN -ПРОСТРАНСТВАМИ, ЕСЛИ НА НИХ ВВЕСТИ СЛЕДУЮЩИЕ НОРМЫ:

$$\|x\|_{X_0 \cap X_1} = \max\{\|x\|_{X_0}, \|x\|_{X_1}\}, x \in X_0 \cap X_1, \quad (1.6)$$

$$\|x\|_{X_0 + X_1} = \inf\{\|x_0\|_{X_0} + \|x_1\|_{X_1} : x_0 \in X_0, x_1 \in X_1, |x_0| + |x_1| = |x|\}, x \in X_0 + X_1 \quad (1.7)$$

Определение 2.1.7. ПУСТЬ $\varphi \in \mathcal{A}_2$. ЧЕРЕЗ $\varphi(X_0, X_1)$ ОБОЗНАЧАЕМ МНОЖЕСТВО ВСЕХ ТАКИХ $x \in W$, ЧТО

$$|x| \leq \lambda \varphi(|x_0|, |x_1|) \quad (1.8)$$

ДЛЯ НЕКОТОРОГО ЧИСЛА $\lambda \geq 0$ И КАКИХ-НИБУДЬ $x_i \in X_i$ С $\|x_i\|_{X_i} \leq 1$ ($i = 0, 1$). ЧЕРЕЗ $\|x\|_{\varphi(X_0, X_1)}$ ОБОЗНАЧАЕМ ИНДИУМУ ВСЕХ ВОЗМОЖНЫХ λ В (1.8).

Предложение 2.1.8. Пусть $\varphi \in \mathcal{A}_2$. Тогда $\varphi(X_0, X_1)$ есть идеал в W и с нормой $\|\cdot\|_{\varphi(X_0, X_1)}$ есть банахово KN -пространство.

Доказательство см. в § 7 п. 2.

Если функция $\varphi(\xi, \eta) = \xi^{1-s} \eta^s$, где $0 < s < 1$
 пространство $\varphi(x_0, x_1)$ будем обозначать просто через $X_0^{1-s} X_1^s$.
 Таким образом, пространство $X_0^{1-s} X_1^s$ состоит из всех
 $x \in W$, таких что

$$|x| \leq \lambda |x_0|^{1-s} |x_1|^s \quad (1.9)$$

для некоторого числа $\lambda > 0$ и каких-нибудь $x_i \in X_i$ с
 $\|x_i\|_{X_i} \leq 1$ ($i = 0, 1$). При этом $\|x\|_{X_0^{1-s} X_1^s}$ есть инфимум
 всех возможных λ в (1.9).

Предложение 2.1.9. Пусть $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{O}_2$. Тогда
 (а) Равенство

$$(\varphi_1(x_0, x_1), \|\cdot\|_{\varphi_1(x_0, x_1)}) = (\varphi_2(x_0, x_1), \|\cdot\|_{\varphi_2(x_0, x_1)}) \quad (1.10)$$

при всевозможных $W, \mathbb{1}(W), x_0, x_1$ имеет место только тогда,
 когда $\varphi_1 = \varphi_2$.

(б) Равенство

$$\varphi_1(x_0, x_1) = \varphi_2(x_0, x_1) \quad (1.11)$$

по запасу элементов при всевозможных $W, \mathbb{1}(W), x_0, x_1$ имеет
 место тогда и только тогда, когда существуют числа $c_1, c_2 > 0$,
 такие что

$$c_1 \varphi_2 \leq \varphi_1 \leq c_2 \varphi_2 \quad (1.12)$$

Кроме того, если это условие выполнено, то

$$c_1 \|\cdot\|_{\varphi_1(x_0, x_1)} \leq \|\cdot\|_{\varphi_2(x_0, x_1)} \leq c_2 \|\cdot\|_{\varphi_1(x_0, x_1)} \quad (1.13)$$

Доказательство см. в § 7 п. 3.

О п р е д е л е н и е 2.1.10. Функции $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{O}_2$ эквивалентны, если для некоторых $c_1, c_2 > 0$ справедливо (1.12).

З а м е ч а н и е 2.1.11. Пусть (T, Σ, μ) - пространство с вполне σ -конечной мерой, $\varphi \in \mathcal{O}_2^0$ и пусть $M(\xi)$ есть N -функция, соответствующая φ в силу предложения 2.1.5. Примем $W = S(T, \Sigma, \mu), X_0 = L^1(T, \Sigma, \mu), X_1 = L^\infty(T, \Sigma, \mu)$. Тогда $(\varphi(x_0, x_1), \|\cdot\|_{\varphi(x_0, x_1)})$ есть обычное пространство орлича с нормой Локсэмбурга, построенное по N -функции $M(\xi)$ (см. Красносельский и Рутцкий [1]). Действительно, для любого $x \in S$ имеем

$$\begin{aligned} & \{ \lambda > 0 : |x| \leq \lambda \varphi(x_0, |x|) \text{ для некоторых } x_0 \in L^1, x_1 \in L^\infty \text{ с } \|x_0\|_{L^1} \leq 1, \|x_1\|_{L^\infty} \leq 1 \} = \\ & = \{ \lambda > 0 : |x| \leq \lambda \varphi(x_0, x_1) \text{ для некоторого } x_0 \in L^1 \text{ с } \|x_0\|_{L^1} \leq 1 \} = \\ & = \{ \lambda > 0 : |x| \leq \lambda M^{-1}(x_0) \text{ для некоторого } x_0 \in L^1 \text{ с } \|x_0\|_{L^1} \leq 1 \} = \\ & = \{ \lambda > 0 : M\left(\frac{|x|}{\lambda}\right) \in L^1, \|M\left(\frac{|x|}{\lambda}\right)\|_{L^1} \leq 1 \}. \end{aligned}$$

ТАКИМ ОБРАЗОМ, РАССМАТРИВАЕМАЯ КОНСТРУКЦИЯ ЯВЛЯЕТСЯ ОБОБЩЕНИЕМ КОНСТРУКЦИИ ПРОСТРАНСТВ ОРЛИЧА.

§ 2. 0 пространствах типа $X_0^{1-s} X_1^s$.

На протяжении этого параграфа S есть число, такое что $0 < s < 1$. Обозначим для краткости $X_s = X_0^{1-s} X_1^s$.

1. Напомним (см. гл. I § 2), что для $f \in (X_i)^*$, $u \in X_i$ ($i = 0, 1, S$) через $f_{(u)}$ обозначается функционал на M действующий по формуле

$$f_{(u)}(x) = f(xu), x \in M.$$

При построении пространства $(X_0^{1-s} X_1^s)^*$ важную роль играет следующее предложение.

Предложение 2.2.1. Для любых $f \in (X_0)_+^*$, $g \in (X_1)_+^*$ существует единственный $h \in (X_s)_+^*$, такой что

$$h_{(u^{1-s} v^s)} = (f_{(u)})^{1-s} (g_{(v)})^s \text{ для всех } u \in (X_0)_+, v \in (X_1)_+. \quad (2.1)$$

Здесь $(f_{(u)})^{1-s} (g_{(v)})^s$ есть значение функции $\xi^{1-s} \eta^s$ на элементах $f_{(u)}, g_{(v)}$ K -пространства \tilde{M} (см. гл. I § 1).

Доказательство см. § 9 п. 2.

Определение 2.2.2. Пусть f, g, h из предложения 2.2.1. Полагаем

$$f^{1-s} g^s \stackrel{\text{def}}{=} h. \quad (2.2)$$

Замечание 2.2.3. Вообще говоря, $f^{1-s} g^s$ в (2.2) есть только обозначение. О функции от элементов K -пространства здесь говорить не приходится, ибо f и g суть элементы двух различных K -пространств $(X_0)^*$ и $(X_1)^*$. Рассмотрим, однако, частный случай, когда $X_0 \cap X_1$ плотно в X_0 и X_1 по соответствующим нормам. Тогда $X_0 \cap X_1$ плотно в X_s . Следовательно, $(X_0)^*, (X_1)^*$ и $(X_s)^*$ естественным образом вкладываются в $(X_0 \cap X_1)^*$. Тогда f, g и h можно считать элементами одного и того же K -пространства $(X_0 \cap X_1)^*$, и h есть значение функции $\xi^{1-s} \eta^s$ на элементах f и g K -пространства $(X_0 \cap X_1)^*$. Сказанное будет доказано далее, см. § 9 п. 3.

Пусть до конца параграфа в $\mathcal{M}(\tilde{M})$ фиксирована какая-нибудь единица $\mathbb{1}(\mathcal{M}(\tilde{M}))$. Выберем пока произвольно единицы $\mathbb{1}_0, \mathbb{1}_1$ и $\mathbb{1}_S$ в пространствах $\mathcal{M}((X_0)^*)$, $\mathcal{M}((X_1)^*)$ и $\mathcal{M}((X_S)^*)$, соответственно, и рассмотрим соответствующие канонические реализации (гл. I, § 2).

$$R_i : \mathcal{M}((X_i)^*) \longrightarrow \mathcal{M}(\tilde{M}) \quad (i=0,1,S).$$

О п р е д е л е н и е 2.2.4. Для $i=0,1,S$ через E_i обозначим базу пространства $\mathcal{M}((X_i)^*)$, то есть $E_i = \{e : e \in \mathcal{M}((X_i)^*), e \wedge (\mathbb{1}_i - e) = 0\}$. Полагаем $E_i = E_i \cap (X_i)^*$ ($i=0,1,S$).

О п р е д е л е н и е 2.2.5. Будем говорить, что единица $\mathbb{1}_S$ подчинена единицам $\mathbb{1}_0, \mathbb{1}_1$, если для любых $e_0 \in E_0, e_1 \in E_1$ справедливо $e_0^{1-S} e_1^S \in E_S$. Здесь $e_0^{1-S} e_1^S$ понимается в смысле определения 2.2.2.

П р е д л о ж е н и е 2.2.6. Пусть $\mathbb{1}_0$ и $\mathbb{1}_1$ выбраны произвольно. Тогда существует и единственна единица $\mathbb{1}_S$, подчиненная единицам $\mathbb{1}_0, \mathbb{1}_1$. При этом

$$\mathbb{1}_S = \sup \{e_0^{1-S} e_1^S : e_0 \in E_0, e_1 \in E_1\} \quad \text{в } \mathcal{M}((X_S)^*). \quad (2.3)$$

Доказательство см. в § 10 п. 2.

Пусть до конца параграфа фиксированы произвольные единицы $\mathbb{1}_0, \mathbb{1}_1$ и пусть единица $\mathbb{1}_S$ подчинена им.

П р е д л о ж е н и е 2.2.7. Для любых $f \in (X_0)^*, g \in (X_1)^*$ справедливо

$$R_S(f^{1-S} g^S) = [R_0(f)]^{1-S} [R_1(g)]^S. \quad (2.4)$$

Здесь $f^{1-S} g^S$ слева понимается в смысле определения 2.2.2, а в правой части стоит значение функции $\xi^{1-S} \eta^S$ на элементах $R_0(f), R_1(g)$ K -пространства $\mathcal{M}(\tilde{M})$.

Доказательство см. в § 10 п. 3.

Отождествим теперь (для простоты записи) пространства $(x_0)^*, (x_1)^*, (x_s)^*$ с их образами $R_0((x_0)^*), R_1((x_1)^*), R_s((x_s)^*)$ при канонических реализациях. Тогда эти пространства суть идеалы в $\mathcal{M}(\tilde{M})$. Теперь из пространств $(x_0)^*, (x_1)^*$ можно образовать пространство $((x_0)^*)^{1-s}((x_1)^*)^s$ точно так же как $X_0^{1-s} X_1^s$ строится из пространств X_0, X_1 .

Т е о р е м а 2.2.8. ПУСТЬ ПО-ПРЕЖНЕМУ ЕДИНИЦЫ Π_0, Π_1 ВЫБРАНЫ ПРОИЗВОЛЬНО, А ЕДИНИЦА Π_s ПОЛУЧЕНА ИМ. ТОГДА РАВЕНСТВО

$$(x_s)^* = ((x_0)^*)^{1-s} ((x_1)^*)^s \quad (2.5)$$

ИМЕЕТ МЕСТО КАК ПО ЗАПАСУ ЭЛЕМЕНТОВ, ТАК И ПО НОРМЕ.

Доказательство см. в § 11.

По поводу теоремы 2.2.8 заметим следующее. В работе Кальдерона [1] с помощью векторнозначных аналитических функций получено некоторое представление пространства $(x_s)^*$ через $(x_0)^*$ и $(x_1)^*$, но лишь при довольно тяжёлых ограничениях на X_0 и X_1 (в частности, требуется, чтобы $X_0 \cap X_1$ было плотно в X_s). В нашей же теореме 2.2.8 никаких дополнительных ограничений на X_0 и X_1 не накладываемся.

2. Следующие предложения описывают некоторые полезные свойства рассматриваемой конструкции.

П р е д л о ж е н и е 2.2.9. ДЛЯ ТОГО ЧТОБЫ В X_s БЫЛО ВЫПОЛНЕНО УСЛОВИЕ (A), НЕОБХОДИМО И ДОСТАТОЧНО, ЧТОБЫ ДЛЯ ЛЮБЫХ $f \in (x_0)^*_{\text{ant}}, g \in (x_1)^*_{\text{ant}}$ БЫЛО $f D g$.

Доказательство см. в § 12 п. 1.

С л е д с т в и е 2.2.10. Если в одном из пространств X_0, X_1 выполнено условие (A), то в X_S тоже выполнено условие (A).

Действительно, пусть, например, в X_0 выполнено условие (A), тогда (Булих [6], гл. IX, § 4) $(X_0)_{\text{ant}}^* = \{0\}$ и применимо предложение 2.2.9^{X)}.

Т е о р е м а 2.2.11. Пусть одно из пространств X_0, X_1 , а также одно из пространств \bar{X}_0, \bar{X}_1 суть КВ-пространства. Тогда X_S (δ) -рефлексивно.

Доказательство см. в § 12 п. 3.

В работе Кальдерона [1] показано, что если одно из пространств X_0, X_1 (δ) -рефлексивно, то и X_S (δ) -рефлексивно. Это утверждение существенно слабее нашей теоремы 2.2.11. Действительно, пусть, например, X_0 - (δ) -рефлексивно. Тогда в силу теоремы Огасавара (см. Булих [6], стр. 294) X_0 и \bar{X}_0 суть КВ-пространства, и применима теорема 2.2.11.

3. До конца этого параграфа будем предполагать, что в W существует фундамент L , являющийся КВ-пространством с аддитивной нормой. Через J обозначаем функционал, задающий норму на L , то есть

$$J(x) = \|x_+\|_L - \|x_-\|_L, \quad x \in L. \quad (2.6)$$

Напомним (гл. 0 § 5), что если X есть банахово $\mathbb{K}N$ -пространство и идеал в W , то дуальное пространство X' со-

X) Заметим, впрочем, что следствие 2.2.10 нетрудно доказать и элементарно, исходя только из определения пространства X_S .

стоит из всех $x' \in W$, таких, что x' принадлежит компоненте в W , порождённой x , и

$$\|x'\|_{X'} = \sup\{J(|xx'|): x \in X, \|x\|_X \leq 1\} < +\infty. \quad (2.7)$$

Т е о р е м а 2.2.12. РАВНОСТВО

$$(x_0^{1-s} x_1^s)' = ((x_0)')^{1-s} ((x_1)')^s \quad (2.8)$$

УДЕЛЕТ МЕСТО КАК ПО ЗАПАСУ ЭЛЕМЕНТОВ, ТАК И ПО НОРМЕ.

Доказательство см. в § 12 п. 2.

Заметим, что теорема 2.2.12 является усилением некоторых результатов С. Г. Крейна, Ю. И. Петунина и Е. М. Семёнова (см. Крейн, Петунин, Семёнов [1], § 5).

§ 3. О степенном преобразовании нормы

Пусть X есть банахово KN -пространство, $p \in (1, +\infty)$ — некоторое число. Определим в $\mathcal{M}(X)$ какую-нибудь единицу $1 = 1(\mathcal{M}(X))$ и пусть $Y = \mathcal{M}(X)_1$ есть порождённое ею KN -пространство ограниченных элементов в $\mathcal{M}(X)$.

О п р е д е л е н и е 2.3.1. Полагаем

$$X_p = \{x \in \mathcal{M}(X) : |x|^p \in X\}, \quad (3.1)$$

$$\|x\|_{X_p} = (\| |x|^p \|_X)^{\frac{1}{p}} \text{ для } x \in X_p. \quad (3.2)$$

П р е д л о ж е н и е 2.3.2. $(X_p, \|\cdot\|_{X_p})$ ЕСТЬ БАНАХОВО KN -ПРОСТРАНСТВО И ФУНДАМЕНТ В $\mathcal{M}(X)$. БОЛЕЕ ТОГО

$$X_p = X^{1-s} Y^s, \text{ где } s = \frac{p-1}{p}, \quad (3.3)$$

ПРИЧЁМ РАВЕНСТВО ИМЕТ МЕСТО КАК ПО ЗАПАСУ ЭЛЕМЕНТОВ, ТАК И ПО НОРМЕ.

Действительно, для любого $x \in \mathcal{M}(X)$ имеем, очевидно^{x)}

$$\begin{aligned} \inf \{ \lambda > 0 : |x| \leq \lambda u^{1-s} v^s, \text{ где } u \in X_+, \|u\|_X \leq 1, v \in Y_+, \|v\|_Y \leq 1 \} &= \\ = \inf \{ \lambda > 0 : |x| \leq \lambda u^{1-s} \mathbb{1}^s, \text{ где } u \in X_+, \|u\|_X \leq 1 \} &= \\ = \inf \{ \lambda > 0 : |x| \leq \lambda u^{\frac{1}{p}}, \text{ где } u \in X_+, \|u\|_X \leq 1 \} &= \\ = \begin{cases} +\infty & \text{при } x \notin X_p \\ \|x\|_{X_p} & \text{при } x \in X_p. \end{cases} \end{aligned}$$

Это предложение показывает, что даваемая определением 2.3.1 конструкция есть частный случай конструкции, изучаемой в предыдущем параграфе.

З а м е ч а н и е 2.3.3. Пространство $(X_p, \|\cdot\|_{X_p})$ зависит от выбора единицы $\mathbb{1}(\mathcal{M}(X))$. Однако пространства, получающиеся при различном выборе указанной единицы, оказываются алгебраически и порядково изоморфными и изометричными. Сказанное будет доказано в § 13 п.1.

Т е о р е м а 2.3.4. (а) ПРОСТРАНСТВО $(X_p)^*$ ЕСТЬ КВ-ПРОСТРАНСТВО.

(б) ПРОСТРАНСТВО X_p (в)-РЕЛИКВИВНО ТОГДА И ТОЛЬКО ТОГДА, КОГДА X ЕСТЬ КВ-ПРОСТРАНСТВО.

(в) ПРОСТРАНСТВО $(X_p)^{**}$ АЛГЕБРАЧЕСКИ И ПОРЯДКОВО ИЗОМОРФНО И ИЗОМЕТРИЧНО ПРОСТРАНСТВУ $(\overline{X^*})_p$, ГДЕ $\overline{X^*}$ ЕСТЬ СОПРЯЖЁННОЕ В СМЫСЛЕ НАКАНО И БАНАХОУ СОПРЯЖЁННОМУ X^* , А $(\overline{X^*})_p$ ПОЛУЧАЕТСЯ ИЗ $\overline{X^*}$ СОГЛАСНО ОПРЕДЕЛЕНИЮ 2.3.1.

^{x)} Мы, как обычно, считаем, что инфимум пустого подмножества множества $(-\infty, +\infty)$ равен $+\infty$.

Доказательство см. в § 13 п. 2.

Заметим, что в работе (Крейн, Семенов, Петунин [1], следствие 5.1) дано лишь достаточное условие (\mathfrak{b}) -рефлексивности пространства X_p : для того чтобы X_p было (\mathfrak{b}) -рефлексивно, достаточно, чтобы X было (\mathfrak{b}) -рефлексивно. Это утверждение является тривиальным следствием нашей теоремы 2.3.4б, ибо всякое (\mathfrak{b}) -рефлексивное X является KB-пространством по теореме Спасагара (см. Вулик [5], стр. 294).

С л е д с т в и е 2.3.5. Пространство $(X_p)^{****}$ алгебраически и порядково изоморфно и изометрично пространству $(\overline{X^*})_p$.

С л е д с т в и е 2.3.6. Пусть норма в X универсально полунепрерывна и универсально монотонно полна и пусть \overline{X} тотально на X . Тогда пространство X_p алгебраически и порядково изоморфно и изометрично пространству $(\overline{X_p})^*$.

Действительно, ясно, что норма в X_p универсально полунепрерывна и универсально монотонно полна и что $\overline{X_p}$ тотально на X_p . Кроме того, $\overline{X_p}$ есть KB-пространство в силу теоремы 2.3.4а, откуда $(\overline{X_p})^* = \overline{\overline{X_p}}$. Остается применить теорему 0.5.9.

§ 4. О пространствах типа $\Psi(X_0, X_1)$.

Напомним (см. определение 2.1.6), что всюду в главе II W означает произвольное расширенное K -пространство с фиксированной единицей $\mathbb{1}(w)$, $M = W_{\mathbb{1}(w)}$ - соответствующее KN -простран-

ство ограниченных элементов, X_0 и X_1 суть банаховы KN -пространства, являющиеся идеалами в W .

I. Пусть $\varphi \in \mathcal{A}_2^0$, $X = \varphi(X_0, X_1)$. Ясно, что $X_0 \cap X_1 \subset X$. Через X_{min}^* будем обозначать совокупность всех $F \in X^*$ таких, что F есть минимальное распространение на X своего сужения $F|_{X_0 \cap X_1}$ (см. определение 1.2.1). Тогда X_{min}^* естественно вкладывается как идеал в $(X_0 \cap X_1)^*$, если каждому $F \in X_{min}^*$ сопоставить его сужение на $X_0 \cap X_1$. Аналогично, если $X_0 \cap X_1$ плотно в X_i ($i=0,1$) по норме, то, сопоставив каждому $f \in X_i^*$ его сужение на $X_0 \cap X_1$, мы получим вложение X_i^* в $(X_0 \cap X_1)^*$. В этом случае, вложив X_0^* и X_1^* в $(X_0 \cap X_1)^*$, можно (см. определение 2.1.7) образовать пространство $\hat{\varphi}(X_0^*, X_1^*)$, являющееся идеалом в $(X_0 \cap X_1)^*$.

Т е о р е м а 2.4.1. ПУСТЬ $\varphi \in \mathcal{A}_2^0$, $X = \varphi(X_0, X_1)$ И ПУСТЬ $X_0 \cap X_1$ ПЛОТНО В X_0 И X_1 ПО СООТВЕТСТВУЮЩИМ НОРМАМ. ТОГДА ПОСЛЕ УКАЗАННОГО ВЛОЖЕНИЯ X_{min}^* , X_0^* И X_1^* В $(X_0 \cap X_1)^*$ СПРАВЕДЛИВО РАВЕНСТВО

$$X_{min}^* = \hat{\varphi}(X_0^*, X_1^*) \quad (4.1)$$

ПО ЗАПАСУ ЭЛЕМЕНТОВ И

$$\|F\|_{\hat{\varphi}(X_0^*, X_1^*)} \leq \|F\|_{X^*} \leq 2 \|F\|_{\hat{\varphi}(X_0^*, X_1^*)} \text{ ПРИ } F \in X_{min}^*. \quad (4.2)$$

ЕСЛИ ДОБАВОК $M(\xi)$ И $N(\xi)$ ИЗ (1.4) И (1.5) УДОВЛЕТВОРЯЮТ Δ_2 -УСЛОВИЮ (см. Красносельский и Рутцкий [1], стр. 36) ПРИ ВСЕХ ЗНАЧЕНИЯХ АРГУМЕНТА, ТО $X_0 \cap X_1$

$$X_{\min}^* = X^* \quad (4.3)$$

Доказательство см. в § 14.

2. Далее в этом параграфе нигде не требуется, чтобы $X_0 \cap X_1$ было плотно по норме в X_0 или X_1 , но будем до конца этого параграфа предполагать, что в W имеется фундамент L , являющийся KV -пространством с аддитивной нормой.

Теорема 2.4.2. Пусть $\varphi \in \mathcal{U}_2^0$, $x = \varphi(x_0, x_1)$.

(а) Если нормы $\|\cdot\|_{X_i}$ ($i=0,1$) универсально монотонно полны, то этим же свойством обладает норма $\|\cdot\|_X$.

(б) Пусть нормы $\|\cdot\|_{X_i}$ ($i=0,1$) универсально монотонно полны и универсально полунепрерывны. Тогда этим же двумя свойствами обладает и норма $\|\cdot\|_X$. При этом для любого $x \in X_+$ существуют $x_i \in (X_i)_+$, такие что $\|x_i\|_{X_i} \leq 1$ ($i=0,1$) и $x \leq \lambda \varphi(x_0, x_1)$, где $\lambda = \|x\|_X$. Иными словами, в этом случае среди чисел λ из определения 2.1.7 существует наименьшее.

(в) Пусть нормы $\|\cdot\|_{X_i}$ ($i=0,1$) универсально полунепрерывны и пусть N - функции $M(\xi)$ и $N(\xi)$ из (1.4) и (1.5) (см. предложение 2.1.5) удовлетворяют Δ_ρ -условию при всех ξ . Тогда и норма $\|\cdot\|_X$ универсально полунепрерывна.

Доказательство см. в § 15.

Замечание 2.4.3. В частности, в случае, когда $\varphi(\xi, \eta) = \xi^{1-s} \eta^s$ ($0 < s < 1$), из универсальной полунепрерывности норм $\|\cdot\|_{X_i}$ ($i=0,1$) следует, что и норма $\|\cdot\|_{X_0^{1-s} X_1^s}$ универсально полунепрерывна. Однако, если на функцию $\varphi \in \mathcal{U}_2^0$ не накладывать никаких ограничений, то из универсальной полунепрерывности норм $\|\cdot\|_{X_i}$ ($i=0,1$) не следует

полу непрерывность нормы $\|\cdot\|_X$. Таким образом, в последнем утверждении теоремы 2.4.2 сделанное ограничение на функцию φ отбросить нельзя. Соответствующий пример приведён в § 15 (см. пример 2.15.5).

3. Определение 2.4.4. Пусть $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{A}_2$.

(а) Пара (φ_1, φ_2) называется СОГЛАСОВАННОЙ, если

$$\left(\|\varphi_1(x_0, x_1)\|, \|\varphi_1(x_0, x_1)\|' \right) = \left(\|\varphi_2(x'_0, x'_1)\|, \|\varphi_2(x'_0, x'_1)\|' \right) \quad (4.4)$$

при всевозможных $W, \mathbb{I}(W), L, x_0, x_1$.

(б) Пара (φ_1, φ_2) называется СЛАБО СОГЛАСОВАННОЙ, если

$$\|\varphi_1(x_0, x_1)\|' = \|\varphi_2(x'_0, x'_1)\|' \quad (4.5)$$

по запасу элементов при всевозможных $W, \mathbb{I}(W), L, x_0, x_1$.

Следующие две теоремы дают исчерпывающее описание всех согласованных и слабо согласованных пар.

Т е о р е м а 2.4.5. (а) ДЛЯ ЛЮБЫХ $\lambda \in (0, +\infty), s \in (0, 1)$ ПОЛОЖИМ

$$\varphi_1(\xi, \eta) = \lambda \xi^{1-s} \eta^s, \quad \varphi_2(\xi, \eta) = \lambda^{-1} \xi^{1+s} \eta^s \quad \text{ПРИ } (\xi, \eta) \in \mathbb{R}_+^2. \quad (4.6)$$

ТОГДА ПАРА (φ_1, φ_2) - СОГЛАСОВАНА.

(б) ОБРАТНО, ДЛЯ ЛЮБОЙ СОГЛАСОВАННОЙ ПАРЫ (φ_1, φ_2) НАЙДУТСЯ $\lambda \in (0, +\infty), s \in (0, 1)$, ТАКИЕ ЧТО СПРАВЕДЛИВО (4.6).

Доказательство см. в § 16.

Т е о р е м а 2.4.6. (а) ДЛЯ ЛЮБОЙ $\varphi \in \mathcal{A}_2^0$ ПАРА $(\varphi, \hat{\varphi})$ СЛАБО СОГЛАСОВАНА. ПРИ ЭТОМ

$$\|\cdot\|_{\hat{\varphi}(x'_0, x'_1)} \leq \|\cdot\|_{(\varphi(x_0, x_1))'} \leq 2 \|\cdot\|_{\hat{\varphi}(x'_0, x'_1)} \quad (4.7)$$

ПРИ ВСЕВОЗМОЖНЫХ $W, \mathbb{I}(W), L, x, y$

(б) ОБРАТНО, ПУСТЬ $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{O}_2$ И ПАРА (φ_1, φ_2) СЛАБО СОГЛАСОВАНА. ТОГДА СУЩЕСТВУЕТ $\varphi \in \mathcal{O}_2^0$, ТАКАЯ ЧТО φ ЭКВИВАЛЕНТНА φ_1 , А $\hat{\varphi}$ ЭКВИВАЛЕНТНА φ_2 (см. определение 2.1.10).

Доказательство см. в § 17.

З а м е ч а н и е 2.4.7. Неравенство (4.7) является неулучшаемым в следующем смысле: пусть числа $c_1, c_2 > 0$ таковы, что

$$c_1 \|\cdot\| \hat{\varphi}(x'_0, x'_1) \leq \|\cdot\| (\varphi(x_0, x_1))^s \leq c_2 \|\cdot\| \hat{\varphi}(x'_0, x'_1) \quad (4.8)$$

при всевозможных $\varphi \in \mathcal{O}_2^0, W, \mathbb{1}(W), L, X_0, X_1$. Тогда $c_1 \leq 1, c_2 \geq 2$.

Действительно, возьмём произвольное $s \in (0, 1)$ и примем $\varphi(\xi, \eta) = \xi^{1-s} \eta^s$. Тогда $\hat{\varphi}(\xi, \eta) = \frac{1}{s^s (1-s)^{1-s}} \cdot \xi^{1-s} \eta^s$. Но в силу теоремы 2.4.5 пара $(\xi^{1-s} \eta^s, \xi^{1-s} \eta^s)$ — согласована. Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} c_1 \|\cdot\| \hat{\varphi}(x'_0, x'_1) &= c_1 s^s (1-s)^{1-s} \|\cdot\| (x'_0)^{1-s} (x'_1)^s \leq \|\cdot\| (\varphi(x_0, x_1))^s \\ &= \|\cdot\| (x'_0)^{1-s} (x'_1)^s \leq c_2 \|\cdot\| \hat{\varphi}(x'_0, x'_1) = c_2 s^s (1-s)^{1-s} \|\cdot\| (x'_0)^{1-s} (x'_1)^s. \end{aligned}$$

Поэтому $c_1 \leq \frac{1}{s^s (1-s)^{1-s}} \leq c_2$. Остаётся заметить, что $\lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s^s (1-s)^{1-s}} = 1$ и что при $s = \frac{1}{2}$ будет $\frac{1}{s^s (1-s)^{1-s}} = 2$.

§ 5. Приложения к общей теории банаховых структур

По-прежнему W есть произвольное расширенное K -пространство с фиксированной единицей $\mathbb{1}(W)$. В этом параграфе будем дополнительно предполагать, что в W имеется фундамент L , являющийся KB -пространством с аддитивной нормой. Через J обозначаем функционал, задавший норму на L . Напомним, что $M = W_{\mathbb{1}(W)}$ есть KN -пространство ограниченных элементов из W .

Через L_2 обозначаем пространство, полученное из L применением определения 2.3.1 с $\rho = 2$, то есть

$$L_2 = \{x \in W : x^2 \in L\}, \quad (5.1)$$

$$\|x\|_{L_2} = (\|x^2\|_L)^{\frac{1}{2}} \text{ для } x \in L_2. \quad (5.2)$$

Наконец, всюду в этом параграфе через X обозначено произвольное банахово KN -пространство, являющееся фундаментом в W . Подчеркнём, что никаких дополнительных ограничений на X мы не накладываем.

1. Теорема 2.5.1. для любых $f \in X^*_{ant}$ и $g \in (X')^*_{ant}$
СПРАВЕДИВО

$$f D g. \quad (5.3)$$

Доказательство см. в § 18.

В связи с теоремой 2.5.1 естественно возникает следующий вопрос. Пусть Y есть произвольный (уже не обязательно нор-

избранной) фундамент в W , такой что \bar{Y} тотально на Y , и пусть $f \in \tilde{Y}_{ant}$, $g \in (\tilde{Y}')_{ant}$. Будет ли справедливо соотношение fDg ? Несложные примеры показывают, что указанное соотношение может не иметь места. Тем самым теорема 2.5.1 не допускает непосредственного обобщения на ненормированный случай.

Т е о р е м а 2.5.2. РАВЕНСТВО

$$X^{\frac{1}{2}} (X')^{\frac{1}{2}} = L_2 \quad (5.4)$$

СПРАВЕДЛИВО КАК ПО ЗАПАСУ ЭЛЕМЕНТОВ, ТАК И ПО НОРМЕ.

Доказательство см в § 18.

Прежде чем формулировать следующую теорему, заметим, что если $z \in L$, $x \in X$, $x' \in X'$ и $z = xx'$, то справедливо следующее неравенство, обычно называемое неравенством Гельдера: $\|z\|_L \leq \|x\|_X \cdot \|x'\|_{X'}$. Сказанное, разумеется, очевидно, в силу самого определения нормы $\|\cdot\|_{X'}$.

Т е о р е м а 2.5.3. 1) для любого $z \in L$ и любого числа $\varepsilon > 0$ найдутся такие $x \in X$, $x' \in X'$, что $z = xx'$ и

$$\|z\|_L \geq (1 - \varepsilon) \|x\|_X \cdot \|x'\|_{X'}$$

2) если норма в X универсально полунепрерывна и универсально монотонно полна, то утверждение 1) допускает следующее усиление: для любого $z \in L$ найдутся такие $x \in X$, $x' \in X'$, что $z = xx'$ и $\|z\|_L = \|x\|_X \cdot \|x'\|_{X'}$.

Доказательство см. в § 18.

Некоторые другие результаты, дополняющие теорему 2.5.3, приведены в гл. IV § 1 п. 2.

З а м е ч а н и е 2.5.4. В формулировке утверждения 2) теоремы 2.5.3 требование универсальной полунепрерывности и универсальной монотонной полноты нормы на X нельзя опустить.

Приведём соответствующий пример. Полагаем: $W = S$ (обычное пространство всех последовательностей вещественных чисел),

$L = \ell^1$, $X = C_0$. Тогда, очевидно, $X' = \ell^1$. Возьмём произвольный элемент пространства $L = \ell^1$, у которого бесконечное множество координат отлично от нуля. Легко видеть, что его нельзя разложить в такое произведение, о котором говорится в утверждении 2) теоремы 2.5.3, но для любого $\varepsilon > 0$ существует разложение, гарантируемое утверждением 1) этой теоремы.

2. Так как X есть произвольное банахово KN -пространство, являющееся фундаментом в W , то, вообще говоря, X не содержится в L и не содержит M . Однако справедлива следующая

Т е о р е м а 2.5.5. Пусть $\mathbb{1}(W) \in L$, то есть $M \subset L$. Тогда существует такой $y \in W_+$, что

$$M \subset X[y] \subset L, \quad (5.5)$$

где $X[y] = \{xy : x \in X\}$.

Доказательство см. в § 18.

З а м е ч а н и е 2.5.6. Введём на $X[y]$ норму,

положив

$$\|x\|_{X[y]} = \|xy^{-1}\|_X.$$

Тогда $X[y]$ становится банаховым KN -пространством, являющимся фундаментом в W , которое алгебраически и порядково изоморфно и изометрично пространству X . Таким образом, например, любое банахово KN -пространство, являющееся фундаментом в $S[0,1]$, путём умножения на некоторую "весовую" функцию, можно превратить в такое же пространство, но "задатое" в $L^\infty[0,1]$ или $L^1[0,1]$.

§ 6. Приложения к банаховым пространствам с безусловными базисами

Две теоремы о банаховых пространствах с безусловными базисами, приводимые в этом параграфе, являются следствиями теоремы 2.5.3 и будут доказаны в § 18.

Всюду в этом параграфе E есть произвольное банахово пространство с безусловным базисом $\{e_k\}$; $\{f_k\}$ — есть биортогональная с $\{e_k\}$ система линейных непрерывных функционалов^{х)}.

Т е о р е м а 2.6.1. Для любого банахова пространства E с безусловным базисом $\{e_k\}$ существует константа $\epsilon > 0$, обладающая следующим свойством: для любой числовой последовательности $\lambda = \{\lambda_k\} \in \ell^1$ найдутся числовые последовательности $\{u_k\}, \{v_k\}$, такие что

- 1) $u_k v_k = \lambda_k$ при всех k ;
- 2) ряды $\sum_k u_k e_k, \sum_k v_k f_k$ сходятся по нормам пространств E и E^* к некоторым $x \in E$ и $f \in E^*$;
- 3) справедливо неравенство

$$\|\lambda\|_{\ell^1} \geq \epsilon \|x\|_E \cdot \|f\|_{E^*}.$$

Введём следующее определение.

О п р е д е л е н и е 2.6.2. Будем говорить, что базис $\{e_k\}$ удовлетворяет условию (\star) , если из того, что $\{a_k\}, \{b_k\} \in \ell_1, |a_k| \leq |b_k|$ при всех k и ряд $\sum_k b_k e_k$ сходится, следует, что $\|\sum_k a_k e_k\|_E \leq \|\sum_k b_k e_k\|_E$.

^{х)} В терминологии из теории базисов в банаховых пространствах мы следуем Дэй (см. Дэй [1], гл. IV).

Хорошо известно, что для любого банахова пространства E с безусловным базисом $\{e_k\}$ существует эквивалентная перенормировка, после которой базис $\{e_k\}$ будет удовлетворять условию (\star) .

Т е о р е м а 2.3.8. ПУСТЬ БАЗИС $\{e_k\}$ ОГРАНИЧЕННО ПОЛОН (см. Лем [1], стр. 119) И УДОВЛЕТВОРИТЕЛ УСЛОВИЮ (\star) .

ТОГДА ДЛЯ ЛЮБОЙ ЧИСЛОВОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ $\lambda = \{\lambda_k\} \in \ell^1$ НАЙДУТСЯ ЧИСЛОВЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ $\{u_k\}, \{v_k\}$, ТАКЖЕ ЧТО

1) $u_k v_k = \lambda_k$ ПРИ ВСЕХ k :

2) РЯД $\sum_k u_k e_k$ СХОДИТСЯ ПО НОРМЕ К НЕКОТОРОМУ $x \in E$.

А РЯД $\sum_k v_k f_k$ СЛАБО* СХОДИТСЯ К НЕКОТОРОМУ $f \in E^*$:

3) $\|\lambda\|_{\ell^1} = \|x\|_E \cdot \|f\|_{E^*}$.

§ 7. Доказательства предложений 2.1.4, 2.1.5, 2.1.8, 2.1.9. Вспомогательные сведения о вогнутых функциях и банаховых структурах

I. В этом пункте будут доказаны предложения 2.1.4 и 2.1.5

Л е м м а 2.7.1. Пусть $M(\xi)$ и $N(\xi)$ суть пара дополнительных друг к другу N -функций. Для $\xi, \eta \geq 0$ положим

$$\varphi(\xi, \eta) = \begin{cases} 0 & \text{при } \eta = 0 \\ \eta M^{-1}(\xi \eta^{-1}) & \text{при } \eta > 0 \end{cases}, \quad \psi(\xi, \eta) = \begin{cases} 0 & \text{при } \xi = 0 \\ \xi N^{-1}(\eta \xi^{-1}) & \text{при } \xi > 0 \end{cases}. \quad (7.1)$$

Тогда $\varphi, \psi \in \mathcal{O}_2^0$ и $\psi = \hat{\varphi}, \varphi = \hat{\psi}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Заметим прежде всего, что правые части равенств (7.1) получаются одно из другого перестановкой функций $M(\xi)$ и $N(\xi)$ и аргументов ξ и η . Поэтому достаточно только доказать, что $\varphi \in \mathcal{O}_2^0$ и $\psi = \hat{\varphi}$. Пусть

$(\xi_0, \eta_0) \in R_+^2$, покажем, что φ непрерывна в точке (ξ_0, η_0) .

Если $\eta_0 > 0$, то это очевидно. Пусть теперь $\eta_0 = 0$. Тогда для любой точки $(\xi, \eta) \in R_+^2$ и любого числа $\lambda > 1$ в силу неравенства Инга (Красносельский и Рутковский [1], стр. 24) имеем

$$|\varphi(\xi, \eta) - \varphi(\xi_0, \eta_0)| = \varphi(\xi, \eta) = \eta M^{-1}(\xi \eta^{-1}) = \eta \left[\lambda \cdot \frac{1}{\lambda} M^{-1}(\xi \eta^{-1}) \right] \leq \eta [N(\lambda) + M(\frac{1}{\lambda} M^{-1}(\xi \eta^{-1}))] \leq \eta [N(\lambda) + \frac{1}{\lambda} M(M^{-1}(\xi \eta^{-1}))] = \eta N(\lambda) + \xi \lambda^{-1} \text{ при } \eta > 0.$$

Отсюда ясно, что φ непрерывна в точке (ξ_0, η_0) . Итак, φ

непрерывна на R_+^2 . Для доказательства вогнутости φ достаточно убедиться, что $\varphi\left(\frac{\xi_1 + \xi_2}{2}, \frac{\eta_1 + \eta_2}{2}\right) \geq \frac{1}{2} [\varphi(\xi_1, \eta_1) + \varphi(\xi_2, \eta_2)]$ при всех $(\xi_1, \eta_1), (\xi_2, \eta_2) \in R_+^2$, таких что $\eta_1, \eta_2 > 0$. Используя вогнутость функции $M^{-1}(\xi)$, имеем $\varphi\left(\frac{\xi_1 + \xi_2}{2}, \frac{\eta_1 + \eta_2}{2}\right) =$

$$= \frac{\eta_1 + \eta_2}{2} \cdot M^{-1}\left(\frac{\xi_1 + \xi_2}{\eta_1 + \eta_2}\right) = \frac{\eta_1 + \eta_2}{2} \cdot M^{-1}\left(\frac{\eta_1}{\eta_1 + \eta_2} \cdot \frac{\xi_1}{\eta_1} + \frac{\eta_2}{\eta_1 + \eta_2} \cdot \frac{\xi_2}{\eta_2}\right) \geq \frac{\eta_1 + \eta_2}{2} \left[\frac{\eta_1}{\eta_1 + \eta_2} M^{-1}\left(\frac{\xi_1}{\eta_1}\right) + \frac{\eta_2}{\eta_1 + \eta_2} M^{-1}\left(\frac{\xi_2}{\eta_2}\right) \right] = \frac{1}{2} [\varphi(\xi_1, \eta_1) + \varphi(\xi_2, \eta_2)]. \text{ Итак, } \varphi \text{ - вогнута.}$$

Равенства $\varphi(\xi, 0) = \varphi(0, \eta) = 0$ при всех $\xi, \eta \geq 0$ - оче-

видно. Также очевидно, что $\lim_{\beta \rightarrow +\infty} \varphi(\beta, \eta) = +\infty$ при всех $\eta > 0$, ибо $\lim_{\xi \rightarrow +\infty} M^{-1}(\xi) = +\infty$. Далее, так как $\lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{M^{-1}(\xi)}{\xi} = +\infty$,

то $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \varphi(\xi, \alpha) = +\infty$ при всех $\xi > 0$. Таким образом,

$\varphi \in \mathcal{O}_2$. Положительная однородность φ очевидна, поэтому

$\varphi \in \mathcal{O}_2^0$. Осталось доказать, что $\Psi = \hat{\varphi}$. Покажем сначала,

что $\varphi(\alpha, \beta) \varphi(\xi, \eta) \leq \alpha \xi + \beta \eta$ при всех $\alpha, \beta, \xi, \eta \geq 0$. Это

очевидно, если $\alpha \beta \xi \eta = 0$. Если же $\alpha \beta \xi \eta \neq 0$, то в силу не-

равенства Инга имеем $\varphi(\alpha, \beta) \varphi(\xi, \eta) = \beta M^{-1}(\alpha \beta^{-1}) \xi N^{-1}(\eta \xi^{-1}) \leq \beta \xi [M(M^{-1}(\alpha \beta^{-1})) + N(N^{-1}(\eta \xi^{-1}))] = \alpha \xi + \beta \eta$. Из доказанного неравенства

следует, что

$$\Psi(\xi, \eta) \leq \inf_{\alpha, \beta > 0} \frac{\alpha\xi + \beta\eta}{\varphi(\alpha, \beta)}, \quad (\xi, \eta) \in \mathbb{R}_+^2. \quad (7.2)$$

Докажем, что в (7.2) имеет место равенство. Если $\xi = 0$ или $\eta = 0$, то это тривиально (фиксируем один из аргументов α или β , а другой устремляем к $+\infty$). Пусть $\xi, \eta > 0$. Положим $u = N^{-1}(\eta\xi^{-1})$. Существует $x > 0$, такой что $M(x) = ux - N(u)$ (см. Красносельский и Рутцкий [1], стр. 24). Положим $\beta = 1$, $\alpha = M(x)$. Тогда $\eta = \xi N(u)$, следовательно,

$$\frac{\alpha\xi + \beta\eta}{\varphi(\alpha, \beta)} = \frac{\alpha\xi + \eta}{\varphi(\alpha, 1)} = \frac{[ux - N(u)]\xi + \xi N(u)}{M^{-1}(\alpha)} = \frac{ux\xi}{x} = u\xi = \Psi(\xi, \eta).$$

Лемма доказана.

Доказательство предложения 2.1.5. Из леммы 2.7.1 прямо следует (а). Докажем (б). Единственность требуемой N -функции очевидна. Так как $\varphi(\xi, 1)$ строго возрастает на $[0, +\infty)$ и $\lim_{\xi \rightarrow +\infty} \varphi(\xi, 1) = +\infty$, то она имеет однозначную обратную функцию на $[0, +\infty)$. Пусть $M(\xi)$ есть чётное продолжение на $(-\infty, +\infty)$ упомянутой обратной функции. Очевидно, что $M(\xi)$ непрерывна и выпукла на $(-\infty, +\infty)$, строго возрастает на $[0, +\infty)$, $M(0) = 0$, $\lim_{\xi \rightarrow +\infty} M(\xi) = +\infty$.

Кроме того, $\lim_{\xi \rightarrow +\infty} \frac{M(\xi)}{\xi} = \lim_{\eta \rightarrow +\infty} \frac{\eta}{\varphi(\eta, 1)} = \lim_{\eta \rightarrow +\infty} \frac{1}{\varphi(1, \eta^{-1})} = +\infty$,

$\lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{M(\xi)}{\xi} = \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{\eta}{\varphi(\eta, 1)} = \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{1}{\varphi(1, \eta^{-1})} = 0$. Таким образом, $M(\xi)$ есть N -функция. Остаётся заметить, что при всех $\xi, \eta > 0$

$$\eta M^{-1}(\xi\eta^{-1}) = \eta \varphi(\xi\eta^{-1}, 1) = \varphi(\xi, \eta).$$

Наконец, предложение 2.1.4 есть очевидное следствие леммы 2.7.1 и предложения 2.1.5.

2. Доказательство предложения 2.1.8.

Положим для краткости $X = \varphi(X_0, X_1)$. Ясно, что из $x \in X$, $y \in W, |y| \leq |x|$ следует, что $y \in X$ и $\|y\|_X \leq \|x\|_X$. Пусть теперь $y_1, y_2 \in X$. Покажем, что

$$y_1 + y_2 \in X \quad \text{и} \quad \|y_1 + y_2\|_X \leq \|y_1\|_X + \|y_2\|_X. \quad (7.3)$$

Пусть $\|y_i\|_X = \lambda_i$ ($i=1,2$). Возьмём произвольное $\varepsilon > 0$. Тогда $|y_i| \leq (\lambda_i + \varepsilon)\varphi(x_0^i, x_1^i)$ для подходящих $x_0^i \in X_0, x_1^i \in X_1$ с $\|x_0^i\|_{X_0} \leq 1, \|x_1^i\|_{X_1} \leq 1$ ($i=1,2$). В силу вогнутости φ имеем

$$\begin{aligned} |y_1 + y_2| &\leq (\lambda_1 + \varepsilon)\varphi(x_0^1, x_1^1) + (\lambda_2 + \varepsilon)\varphi(x_0^2, x_1^2) = (\lambda_1 + \lambda_2 + 2\varepsilon) \left[\frac{\lambda_1 + \varepsilon}{\lambda_1 + \lambda_2 + 2\varepsilon} \cdot \varphi(x_0^1, x_1^1) + \right. \\ &+ \left. \frac{\lambda_2 + \varepsilon}{\lambda_1 + \lambda_2 + 2\varepsilon} \cdot \varphi(x_0^2, x_1^2) \right] \leq (\lambda_1 + \lambda_2 + 2\varepsilon) \varphi \left(\frac{\lambda_1 + \varepsilon}{\lambda_1 + \lambda_2 + 2\varepsilon} \cdot x_0^1 + \right. \\ &+ \left. \frac{\lambda_2 + \varepsilon}{\lambda_1 + \lambda_2 + 2\varepsilon} \cdot x_0^2, \frac{\lambda_1 + \varepsilon}{\lambda_1 + \lambda_2 + 2\varepsilon} \cdot x_1^1 + \frac{\lambda_2 + \varepsilon}{\lambda_1 + \lambda_2 + 2\varepsilon} \cdot x_1^2 \right). \end{aligned}$$

Отсюда легко следует (7.3). Положительная однородность функционала $\|\cdot\|_X$ — очевидна. Таким образом, уже установлено, что X есть идеал в W и $\|\cdot\|_X$ есть монотонная полунорма на X . Пусть теперь $x \in X_+$ и $\|x\|_X = 0$. Покажем, что $x = 0$. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ найдём $x_i^n \in (x_i)_+$ с $\|x_i^n\|_{X_i} \leq 1$ ($i=0,1$), такие что $x \leq n^{-1}\varphi(x_0^n, x_1^n)$. Но $n^{-1}\varphi(x_0^n, x_1^n) \leq \varphi(n^{-1}x_0^n, n^{-1}x_1^n)$ в силу вогнутости φ , а $\varphi(n^{-1}x_0^n, n^{-1}x_1^n) \xrightarrow{(0)} 0$ по теореме об (0)-непрерывности функций (Канторович, Вулих, Плискер [1], стр. 148), поэтому $x = 0$. Осталось проверить полноту X по норме. Напомним (Абрамович [1]), что KW —пространство

Y полно по норме, если из того, что $y_n \in Y_+$ ($n \in \mathbb{N}$) попарно дизъюнктивны и $\sum_{n=1}^{\infty} \|y_n\|_Y < +\infty$, следует, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$

(0) - сходится в Y . Пусть $x_n \in X_+$ ($n \in \mathbb{N}$) попарно дизъюнктивны и $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|_X < +\infty$, покажем, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ (0) - сходит-

ся в X . Положим $\|x_n\|_X = \lambda_n$. Можно считать, что $\lambda_n < \frac{1}{2}$ при всех n . Имеем $x_n \leq 2\lambda_n \varphi(x_0^n, x_1^n)$ для подходящих $x_i^n \in (X_i)_+$ с $\|x_i^n\|_{X_i} \leq 1$ ($i=0,1$). Можно, очевидно, считать, что $\varphi(x_n^0) = \varphi(x_0^n) = \varphi(x_1^n)$ ($n \in \mathbb{N}$). Положим $x_i^i = \sum_{n=1}^{\infty} 2\lambda_n x_i^n$ ($i=0,1$), где

сумма ряда понимается по отношению к сходимости по норме. Тогда при всех $k \in \mathbb{N}$ имеем $\sum_{n=1}^k x_n \leq \sum_{n=1}^k 2\lambda_n \varphi(x_0^n, x_1^n) \leq \leq \sum_{n=1}^k \varphi(2\lambda_n x_0^n, 2\lambda_n x_1^n) = \varphi(\sum_{n=1}^k 2\lambda_n x_0^n, \sum_{n=1}^k 2\lambda_n x_1^n) \leq \varphi(x^0, x^1)$, поэтому существует $\sup_k \sum_{n=1}^k x_n \in X$.

Предложение 2.1.8 доказано.

3. Л е м м а 2.7.2. Пусть \mathcal{U} есть совокупность всех \mathbb{K}^N -пространств ограниченных элементов, являющихся фундаментами в S и пусть $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{O}_2$ таковы, что для любых $x_0, x_1 \in \mathcal{U}$ справедливо равенство

$$\varphi_1(x_0, x_1) = \varphi_2(x_0, x_1) \quad (7.4)$$

по запасу элементов. Тогда φ_1 и φ_2 эквивалентны (см. определение 2.1.10).

Д о к а з а т е л ь с т в о . Нужно доказать существование констант $c_1, c_2 > 0$, таких что справедливо (1.12) на § I. Достаточно, очевидно, доказать существование c_1 . Допустим противное. Найдутся последовательности $\lambda_n > 0, \mu_n > 0$ ($n \in \mathbb{N}$), такие, что $n\varphi_1(\lambda_n, \mu_n) \not\leq \varphi_2(\lambda_n, \mu_n)$. Обозначим $\lambda = \{\lambda_n\}$,

$\mu = \{ \mu_n \}$. Примем $X_0 = S_\lambda, X_1 = S_\mu$. Тогда $\varphi_i(X_0, X_1) = S_{\varphi_i(\lambda, \mu)}$ ($i=0,1$). Остаётся заметить, что $\varphi_2(\lambda, \mu) \in \varphi_2(X_0, X_1)$, но $\varphi_2(\lambda, \mu) \notin \varphi(X_0, X_1)$. Противоречие.

Доказательство предложения 2.1.9.

(а) Пусть $\xi > 0, \eta > 0$ - любые. Примем $W = X_0 = X_1 = \mathbb{R}^1$ по запасу элементов, $\mathbb{1}(W) = 1, \|x\|_{X_0} = \frac{|x|}{\xi}, \|x\|_{X_1} = \frac{|x|}{\eta}$. Тогда

$$\|x\|_{\varphi_1(X_0, X_1)} = \frac{|x|}{\varphi_1(\xi, \eta)}, \|x\|_{\varphi_2(X_0, X_1)} = \frac{|x|}{\varphi_2(\xi, \eta)}, \text{ откуда } \varphi_1(\xi, \eta) = \varphi_2(\xi, \eta).$$

Следовательно, $\varphi_1 = \varphi_2$. Докажем (б). Если (1.11) имеет место

по запасу элементов при всевозможных $W, \mathbb{1}(W), X_0, X_1$, то

φ_1 и φ_2 эквивалентны в силу леммы 2.7.2. Пусть теперь

$c_1, c_2 > 0$ таковы, что выполнено (1.12) из § I). Тогда для

$x \in W, x_0 \in X_0, x_1 \in X_1$ из $|x| \leq \lambda \varphi_1(|x_0|, |x_1|)$ следует

$|x| \leq (\lambda c_2) \varphi_2(|x_0|, |x_1|)$, а из $|x| \leq \lambda \varphi_2(|x_0|, |x_1|)$ следует

$|x| \leq \left(\frac{\lambda}{c_1}\right) \varphi_1(|x_0|, |x_1|)$. Поэтому при всевозможных $W, \mathbb{1}(W), X_0, X_1$

справедливо (1.11) по запасу элементов и выполнено неравенство

(1.13). Предложение 2.1.9 доказано.

4. Л е м м а 2.7.3. Пусть вещественная функция g на $(0, +\infty)$ удовлетворяет следующим условиям:

(а) g абсолютно непрерывна в любом конечном промежутке;

(б) $g(t) > 0$ при всех $t \in (0, +\infty), g(1) = 1$;

(в) для любых $0 < \alpha < 1, 0 < \beta < 1, 0 < x < +\infty, 0 < y < +\infty$

справедливо

$$\frac{\beta g(\alpha x)}{g(\beta x)} + \frac{(1-\beta)g[(1-\alpha)y]}{g[(1-\beta)y]} \leq 1. \quad (7.5)$$

Тогда существует $\rho \in [0, 1]$ такое, что $q(t) = t^\rho$ при всех $t \in (0, +\infty)$.

Доказательство. Пусть Γ - множество всех $t \in (0, +\infty)$, в которых существует обыкновенная конечная производная $q'(t)$. Зафиксируем $t_1, t_2 \in \Gamma, t_1 \neq t_2$. Положим $f(t) = \frac{q(2tt_1)}{2q(t_1)} + \frac{q[2(1-t)t_2]}{2q(t_2)}$ ($0 < t < 1$). Взяв в (7.5) $\alpha = t, \beta = \frac{1}{2}, x = 2t_1, y = 2t_2$, видим, что $f(t) \leq 1$ при всех $t \in (0, 1)$. С другой стороны, $f(\frac{1}{2}) = 1$. Следовательно, $f'(\frac{1}{2}) = 0$, то есть $\frac{t_1 q'(t_1)}{q(t_1)} - \frac{t_2 q'(t_2)}{q(t_2)} = 0$. Таким образом, функция $\frac{t q'(t)}{q(t)}$ постоянна на Γ . Пусть $\frac{t q'(t)}{q(t)} = \rho$ при всех $t \in \Gamma$. В силу абсолютной непрерывности функции q отсюда следует, что $q(t) = ct^\rho$, где $c = \text{const}$. Так как $q(1) = 1$, то $c = 1$. Наконец, из (B) имеем $\alpha^p \beta^{1-p} + (1-\alpha)^p (1-\beta)^{1-p} \leq 1$ при всех $\alpha, \beta \in (0, 1)$, откуда $\rho \in [0, 1]$.

Лемма доказана. Заметим, что функция $q(t) = t^\rho$ ($0 \leq \rho \leq 1$) удовлетворяет условиям леммы.

Лемма 2.7.4. Пусть $M(\xi)$ и $N(\xi)$ суть пара дополнительных друг к другу N -функций, удовлетворяющих Δ_ρ -условию при всех $\xi \geq 0$, и пусть φ из (1.4). Тогда существует число $b > 2$, такое что

$$\varphi(\xi, \eta) \leq \varphi\left(\frac{1}{b}\xi, \frac{1}{b}\eta\right), \varphi(\xi, \eta) \leq \varphi\left(\frac{1}{b}\xi, \frac{1}{b}\eta\right) \text{ при } \xi, \eta \geq 0. \quad (7.6)$$

Доказательство. По условию существуют константы $k > 2, l > 1$, такие что $M(2\xi) \leq kM(\xi), M(\xi) \leq \frac{1}{l}M(l\xi)$ при всех $\xi \geq 0$ (см. Красносельский и Рутцкий [1], стр. 38, 39). Положим $b = \max\{k, 2l\}$. Так как $M(2\xi) \leq kM(\xi)$, то

$2M^{-1}(\xi) \leq M^{-1}(k\xi)$, а так как $M(\xi) \leq \frac{1}{2l}M(l\xi)$, то $M^{-1}(2l\xi) \leq lM^{-1}(\xi)$. Если $\xi = 0$ или $\eta = 0$, то $\varphi(\xi, \eta) = 0$ и требования неравенства выполнены. Пусть $\xi, \eta > 0$. Тогда

$$\varphi\left(\frac{1}{2}l\xi, \frac{1}{2}\eta\right) \geq \varphi\left(\frac{1}{2}k\xi, \frac{1}{2}\eta\right) = \frac{1}{2}\eta M^{-1}(k\xi\eta^{-1}) \geq \eta M^{-1}(\xi\eta^{-1}) = \varphi(\xi, \eta)$$

$$\varphi\left(\frac{1}{2}\xi, \frac{1}{2}l\eta\right) \geq \varphi\left(\frac{1}{2}\xi, l\eta\right) = l\eta M^{-1}\left(\frac{1}{2}\xi l^{-1}\eta^{-1}\right) \geq \eta M^{-1}(\xi\eta^{-1}) = \varphi(\xi, \eta)$$

Лемма доказана.

Л е м м а 2.7.5. Пусть $M(\xi)$ и $N(\xi)$ суть пара дополнительных друг к другу N -функций и пусть функция φ вычислена по формуле (1.4). Тогда для любых $u, v \in W_+$ справедливы равенства

$$\varphi(u, v) = vM^{-1}(uv^{-1}), \hat{\varphi}(u, v) = uN^{-1}(vu^{-1}). \quad (7.7)$$

Напомним, что u^{-1} есть элемент из W , такой что $e_u = e_{u^{-1}} = uu^{-1}$, где e_u есть след элемента u , то есть e_u есть проекция $\Pi(w)$ на главную компоненту в W , порождённую u . Напомним также, что $M^{-1}(\xi)$ есть функция, обратная к $M(\xi)$, рассматриваемой при неотрицательных значениях аргумента.

Справедливость леммы 2.7.5 прямо следует из определения функции от элементов K -пространства (см. определение I.1.1).

Л е м м а 2.7.6. Пусть $M(\xi) - N$ -функция и пусть φ вычислена по формуле (1.4). Пусть $u, v, w \in W_+$, причём $w \leq \varphi(u, v)$. Положим $u' = vM(wv^{-1})$. Тогда $u' \leq u$ и $w = \varphi(u', v)$.

Доказательство. Имеем $u' = vM(wv^{-1}) \leq vM(\varphi(u, v)v^{-1}) = vM(vM^{-1}(uv^{-1})v^{-1}) = u$, $\varphi(u', v) = vM^{-1}(vM(wv^{-1})v^{-1}) = w$. Лемма доказана.

7. Л е м м а 2.7.7. Пусть $M(\xi)$ и $N(\xi)$ суть пара дополнительных друг к другу N -функций и пусть функция ψ вычислена по формуле (1.4). Через $M'(\xi)$ обозначаем правую производную от $M(\xi)$. Пусть $u, v \in W_+$, причём $e_u = e_v$. Положим

$$w = M'(\bar{M}^{-1}(uv^{-1})), \quad x = w^{-1}, \quad y = N(w)w^{-1}. \quad (7.8)$$

Тогда

$$\varphi(u, v) = xu + yv, \quad \hat{\varphi}(x, y) = e_u. \quad (7.9)$$

Здесь e_u есть след элемента u .

Доказательство. Имеем (см. Красносельский и Рунтцкий [1], стр. 24)

$$\xi M'(\xi) = M(\xi) + N(M'(\xi)) \quad \text{при всех } \xi \geq 0. \quad (7.10)$$

Теперь, используя лемму 2.7.5 и замечание 1.1.5, находим

$$\begin{aligned} \varphi(u, v) &= v\bar{M}^{-1}(uv^{-1}) = vw^{-1}w\bar{M}^{-1}(uv^{-1}) = vw^{-1}M'(\bar{M}^{-1}(uv^{-1}))\bar{M}^{-1}(uv^{-1}) = \\ &= vw^{-1}[M(\bar{M}^{-1}(uv^{-1})) + N(M'(\bar{M}^{-1}(uv^{-1})))] = vw^{-1}[uv^{-1} + N(w)] = \\ &= w^{-1}u + N(w)w^{-1}v = xu + yv \end{aligned}$$

$$\hat{\varphi}(x, y) = \hat{\varphi}(w^{-1}, N(w)w^{-1}) = w^{-1}N^{-1}(N(w)w^{-1}w) = w^{-1}w = e_w = e_u. \quad \text{Аналогично.}$$

Лемма доказана.

8. Л е м м а 2.7.8. Пусть Y — KN -пространство, Y_1 — его фундамент, плотный в Y по норме. Тогда для любого $x \in Y_+$ существует последовательность $x_n \in Y_1$, такая что $0 \leq x_n \perp x$ и $\|x - x_n\|_Y \rightarrow 0$.

Доказательство. Пусть $y_n \in Y_1$ ($n \in \mathbb{N}$), $0 \leq y_n \perp x$, $\|x - y_n\|_Y \rightarrow 0$. Тогда найдутся $y'_n, y''_n \in (Y_1)_+$ ($n \in \mathbb{N}$), такие

что $\psi_n' \wedge \psi_n'' = 0$, $\psi_n' + \psi_n'' = \psi_n$, $0\psi_n' \circ \psi_n \leq \frac{1}{2} 0\psi_n' \circ x$, $0\psi_n'' \circ \psi_n \geq \frac{1}{2} 0\psi_n'' \circ x$.

Положим $x_n'' = 0\psi_n'' \circ x$. Так как $x_n'' \leq 2\psi_n$, то $x_n'' \in Y_1$. Из $0 \leq x - x_n'' \leq 2(x - \psi_n)$ следует, что $\|x - x_n''\|_y \rightarrow 0$. Остаётся положить $x_n = x_1'' \vee x_2'' \vee \dots \vee x_n'' (n \in \mathbb{N})$. Лемма доказана.

9. Л е м м а 2.7.9. Пусть $M(\xi)$ и $N(\xi)$ суть пара дополнительных друг к другу N -функций, удовлетворяющих Δ_2 -условию при всех значениях аргумента и пусть φ из (1.4). Пусть Y_i есть замкнутый по норме идеал в X_i , причём $\|\cdot\|_{Y_i}$ есть сужение нормы $\|\cdot\|_{X_i}$ на Y_i ($i=0,1$). Положим $X = \varphi(X_0, X_1)$, $Y = \varphi(Y_0, Y_1)$. Тогда

$$\|\psi\|_Y = \|\psi\|_X \quad \text{при всех } \psi \in Y, \quad (7.11)$$

где $\|\cdot\|_Y = \|\cdot\|_{\varphi(Y_0, Y_1)}$, $\|\cdot\|_X = \|\cdot\|_{\varphi(X_0, X_1)}$.

Доказательство. Фиксируем $\psi \in \varphi(Y_0, Y_1)$. Пусть $\|\psi\|_X = \lambda$. Ясно, что $\|\psi\|_Y \geq \lambda$. Нужно доказать, что $\|\psi\|_Y \leq \lambda$. Возьмём произвольное $\varepsilon > 0$. Так как $\psi \in Y$, то существуют $\psi_i \in (Y_i)_+$ ($i=0,1$), такие что

$$|\psi| \leq (\lambda + \varepsilon)\varphi(\psi_0, \psi_1). \quad (7.12)$$

Так как $\|\psi\|_X = \lambda < \lambda + \varepsilon$, то существует $x_i \in (X_i)_+$, такие что $\|x_i\|_{X_i} \leq 1$ ($i=0,1$) и

$$|\psi| \leq (\lambda + \varepsilon)\varphi(x_0, x_1). \quad (7.13)$$

Возьмём произвольное $m \in \mathbb{N}$ и применим лемму 2.7.4 к (7.12), получим

$$|\psi| \leq (\lambda + \varepsilon)\varphi\left(\frac{\psi_0}{2^m}, \left(\frac{\delta}{2}\right)^m \cdot \psi_1\right), \quad (7.14)$$

$$|\psi| \leq (\lambda + \varepsilon) \varphi\left(\left(\frac{\delta}{2}\right)^m \cdot y_0, \frac{y_1}{2^m}\right). \quad (7.15)$$

Из (7.13) и (7.14) следует

$$|\psi| \leq (\lambda + \varepsilon) \varphi\left(x_0 \vee \frac{y_0}{2^m}, x_1 \wedge \left(\frac{\delta}{2}\right)^m \cdot y_1\right). \quad (7.16)$$

Теперь из (7.16) и (7.15) следует, что

$$|\psi| \leq (\lambda + \varepsilon) \varphi\left(\left(x_0 \vee \frac{y_0}{2^m}\right) \wedge \left(\frac{\delta}{2}\right)^m \cdot y_0, \left(x_1 \wedge \left(\frac{\delta}{2}\right)^m \cdot y_1\right) \vee \frac{y_1}{2^m}\right). \quad (7.17)$$

Положим $z_0 = \left(x_0 \vee \frac{y_0}{2^m}\right) \wedge \left(\frac{\delta}{2}\right)^m \cdot y_0$, $z_1 = \left(x_1 \wedge \left(\frac{\delta}{2}\right)^m \cdot y_1\right) \vee \frac{y_1}{2^m}$.

Ясно, что $z_0 \in Y_0$, $z_1 \in Y_1$, причём $\|z_0\|_{Y_0} \leq \|x_0\|_{X_0} + \left\|\frac{y_0}{2^m}\right\|_{Y_0} \leq 1 + \frac{1}{2^m} \|y_0\|_{Y_0}$, $\|z_1\|_{Y_1} \leq \|x_1\|_{X_1} + \left\|\frac{y_1}{2^m}\right\|_{Y_1} \leq 1 + \frac{1}{2^m} \|y_1\|_{Y_1}$.

Отсюда видно, что, взяв достаточно большое m , будем иметь

$$\|z_i\|_{Y_i} \leq 1 + \varepsilon \quad (i = 0, 1). \quad \text{Поэтому } \|\psi\|_Y \leq (\lambda + \varepsilon)(1 + \varepsilon).$$

Тем самым $\|\psi\|_Y \leq \lambda$ в силу произвольности $\varepsilon > 0$.

Лемма доказана.

§ 8. Некоторые леммы о пространствах непрерывных функций

Всёду в этом параграфе K означает произвольный бикомпакт, то есть бикомпактное хаусдорфово пространство, $\mathcal{C}sa(K)$ — пространство всех вещественных регулярных счётно аддитивных функций множества, определённых на σ -алгебре всех борелевских множеств из K (см. Данфорд и Шварц [1], стр. 262). Полагаем $\mathcal{C}sa^+(K) = \{\mu \in \mathcal{C}sa(K) : \mu \geq 0\}$, то есть $\mathcal{C}sa^+(K)$ есть пространство всех регулярных борелевских мер на K .

Для $\mu \in \mathcal{LCA}^+(K)$ через $L^1(\mu)$ обозначается пространство всех (классов) функций на K , суммируемых по мере μ . Напомним классическую теорему Рисса об общем виде линейного функционала (см. Данфорд и Шварц [1], стр. 288): между $C(K)^*$ и $\mathcal{LCA}(K)$ существует изометрический изоморфизм, сохраняющий отношение порядка, при котором соответственные элементы $f \in C(K)^*$ и $\mu \in \mathcal{LCA}(K)$ связаны соотношением

$$f(x) = \int_K x d\mu, \quad x \in C(K). \quad (8.1)$$

Если $\mu \in \mathcal{LCA}(K)$, то через f_μ мы будем обозначать соответствующий функционал, если же $f \in C(K)^*$, то через μ_f обозначаем соответствующий элемент из $\mathcal{LCA}(K)$.

Л е м м а 2.8.1. (См., например, Бурбаки [2], гл. V, § 5, теорема 2).

Пусть $f \in C(K)_+^*$ и пусть $C^1(K)^*$ есть главная компонента в $C(K)^*$, порождённая f . Для любого $g \in C(K)^*$ следующие утверждения эквивалентны:

- (а) $g \in C^1(K)^*$;
- (б) существует $\rho \in L^1(\mu_f)$, такая что $g(x) = \int_K x \rho d\mu_f$, $x \in C(K)$.

2. В этом пункте пусть $\varphi \in \mathcal{U}_f^0$ и пусть $f, g \in C(K)_+^*$. Рассмотрим $\varphi(f, g) \in C(K)^*$, то есть значение функции $\varphi(\xi, \eta)$ на элементах f и g K -пространства $C(K)^*$. В следующей лемме даётся описание $\varphi(f, g)$ как функционала на $C(K)$.

Л е м м а 2.8.2. Пусть $\mu \in \mathcal{LCA}^+(K)$ и $\rho, q \in L^1(\mu)$, таковы, что

x) Указанные μ, ρ, q всегда существуют, например, можно принять

$$\mu = \frac{d\mu_f}{d\mu} \quad \rho = \frac{d\mu_g}{d\mu}.$$

$$f(x) = \int_K x p d\mu, g(x) = \int_K x q d\mu, x \in C(K). \quad (8.2)$$

Тогда

$$\varphi(f, g)(x) = \int_K x \varphi(p, q) d\mu, x \in C(K). \quad (8.3)$$

Доказательство. Пусть U есть главная компонента в $\mathcal{L}C(K)$, порождённая μ . Составив каждому элементу из U соответствующий функционал на $C(K)$, мы получим изоморфизм K -пространства U на некоторую главную компоненту в $C(K)^*$, содержащую f и g . Теперь остаётся только применить замечание I.1.3 и (Канторович, Вулих, Пинскер [1], стр. 148).

3. До конца этого параграфа фиксируем $\varphi \in \mathcal{K}_2^0$ и число $s \in (0, 1)$.

Л е м м а 2.8.3. Пусть $f, g \in C(K)_+^*$, $u, v \in C(K)_+$. Тогда

$$\varphi(f, g)(\hat{\varphi}(u, v)) \leq f(u) + g(v), \quad (8.4)$$

$$f^{1-s} g^s (u^{1-s} v^s) \leq (f(u))^{1-s} (g(v))^s. \quad (8.5)$$

Здесь $\varphi(f, g)$ есть значение функции $\varphi(\xi, \eta)$ на элементах f, g K -пространства $C(K)^*$, $f^{1-s} g^s$ есть значение функции $\xi^{1-s} \eta^s$ на этих же элементах, аналогичный смысл имеют $\hat{\varphi}(u, v)$ и $u^{1-s} v^s$.

Доказательство. Пусть $\mu \in \mathcal{L}C(K)$ и $p, q \in L^1(\mu)$ таковы, что справедливо (8.2). Тогда $\varphi(f, g)(\hat{\varphi}(u, v)) = \int_K \hat{\varphi}(u, v) \varphi(p, q) d\mu \leq \int_K (u p + v q) d\mu = f(u) + g(v)$. Аналогично.

^{х)} Напомним, что (см. определение 2.1.3) $\varphi(\alpha, \beta) \hat{\varphi}(\xi, \eta) \leq \alpha \xi + \beta \eta$ при всех $\alpha, \beta, \xi, \eta \geq 0$.

с помощью неравенства Гёльдера получаем $f^{1-s} g^s (u^{1-s} v^s) =$
 $= \int_K u^{1-s} v^s p^{1-s} q^s d\mu = \int_K (up)^{1-s} (vq)^s d\mu \leq (\int_K up d\mu)^{1-s} (\int_K vq d\mu)^s = (f(u))^{1-s} (g(v))^s.$

Л е м м а 2.8.4. Пусть $f, g, h \in C(K)_+^*$ таковы, что

$$h(u^{1-s} v^s) \leq (1-s)f(u) + sq(v) \text{ для всех } u, v \in C(K)_+. \quad (8.6)$$

Тогда $h \leq f^{1-s} g^s.$

Д о к а з а т е л ь с т в о . Пусть $\mu \in \mathcal{C}\mathcal{C}^+(K)$ и $p, q, z \in L^1(\mu)_+$ таковы, что

$$f(x) = \int_K xp d\mu, g(x) = \int_K xq d\mu, h(x) = \int_K xz d\mu, x \in C(K). \quad (8.7)$$

Тогда

$$\int_K u^{1-s} v^s z d\mu \leq (1-s) \int_K up d\mu + s \int_K vq d\mu \quad (8.8)$$

при всех $u, v \in C(K)$. Возьмём произвольный $x \in C(K)_+$ и заменим u на ux , v на vx в (8.8). Получим $\int_K [u^{1-s} v^s z - (1-s)up - svq] x d\mu \leq 0$. В силу произвольности $x \in C(K)_+^*$ отсюда следует, что

$$u^{1-s} v^s z - (1-s)up - svq \leq 0 \quad \mu\text{-почти всюду} \quad (8.9)$$

для любых $u, v \in C(K)_+$. Итак,

$$u^{1-s} v^s z \leq (1-s)up + svq \quad \mu\text{-почти всюду} \quad (8.10)$$

для любых $u, v \in C(K)_+$. Ясно, что тогда (8.10) справедливо и для любых $u, v \in L^1(\mu)_+$. Возьмём произвольное $\varepsilon > 0$ и в (8.10) положим $u = \left(\frac{q+\varepsilon}{p+\varepsilon}\right)^s$, $v = \left(\frac{p+\varepsilon}{q+\varepsilon}\right)^{1-s}$, получим $z \leq (p+\varepsilon)^{1-s} (q+\varepsilon)^s$ μ -почти всюду. В силу произвольности

$\varepsilon > 0$ имеем $z \leq \rho^{1-\varepsilon} q^\varepsilon$ μ - почти всюду, то есть $h \leq \rho^{1-\varepsilon} q^\varepsilon$.

Л е м м а 2.8.5. Пусть $f, g, h \in C(K)_+^*$ таковы, что

$$h(\hat{\varphi}(u, v)) \leq f(u) + g(v) \quad \text{для всех } u, v \in C(K)_+. \quad (8.11)$$

Тогда $h \leq \varphi(f, g)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Пусть $\mu \in \mathcal{Z}sa^+(K)$ и $z, \rho, q \in L^1(\mu)_+$ таковы, что справедливо (8.7). Как и при доказательстве предыдущей леммы получаем, что

$$\hat{\varphi}(u, v)z \leq u\rho + vq \quad \mu - \text{почти всюду} \quad (8.12)$$

для любых $u, v \in C(K)_+$. Напомним (предл. 2.1.4), что

$$\varphi(\xi, \eta) = \inf_{\alpha, \beta > 0} \frac{\alpha\xi + \beta\eta}{\varphi(\alpha, \beta)} \quad \text{при всех } \xi, \eta \geq 0.$$

Отсюда легко следует, что $z \leq \varphi(\rho, q)$ μ - почти всюду, то есть $h \leq \varphi(f, g)$.

Л е м м а 2.8.6. Пусть $f_0, f_1 \in C(K)_+^*$, $z \in C(K)_+$, $a \in (0, +\infty)$.

Пусть

$$(u_0, u_1 \in C(K)_+, \varphi(u_0, u_1) \geq z) \Rightarrow (f_0(u_0) + f_1(u_1) \geq a). \quad (8.13)$$

Тогда $\hat{\varphi}(f_0, f_1)(z) \geq a$.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Пусть $\mu \in \mathcal{Z}sa^+(K)$ и пусть $\rho_i \geq 0$ суть борелевские функции на K , такие что $f_i(x) = \int_K x \rho_i d\mu, x \in C(K)$ ($i=0, 1$). Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$ и положим $q_0 = \rho_0 + \varepsilon \rho_1 + \varepsilon \chi_K, q_1 = \rho_1 + \varepsilon \rho_0 + \varepsilon \chi_K$. В силу леммы 2.7.7 найдутся борелевские функции z_0, z_1 и числа $c_1, c_2 \in (0, +\infty)$, такие что $\varphi(z_0, z_1) = \chi_K, \varphi(q_0, q_1) = z_0 q_0 + z_1 q_1, c_1 \chi_K \leq z_0 \leq c_2 \chi_K, c_1 \chi_K \leq z_1 \leq c_2 \chi_K$. Пусть $M(\xi)$ есть N -функции из (1.4). Тогда из равенства

$\varphi(z_0, z_1) = \chi_K$ следует, что $z_0 = z_1 M(\varphi_1^{-1} \chi_K)$. Построим последовательность $y_n \in C(K)$, такую что $c_1 \chi_K \leq y_n \leq c_2 \chi_K$ и $y_n \rightarrow z_1$ μ -почти всюду.

Положим $x_n = y_n M(\varphi_n^{-1} \chi_K)$. Заметим, что $\varphi(x_n, y_n) = \chi_K$. Ясно, что $x_n \rightarrow z_0$ μ -почти всюду и что $c_1' \chi_K \leq x_n \leq c_2' \chi_K$ для некоторых $c_1', c_2' \in (0, +\infty)$. Положим $u_0^{(n)} = x_n z$, $u_1^{(n)} = y_n z$. Имеем $\varphi(u_0^{(n)}, u_1^{(n)}) = \varphi(x_n z, y_n z) = \varphi(x_n, y_n) \cdot z = z$.

Поэтому по условию $f_0(u_0^{(n)}) + f_1(u_1^{(n)}) \geq a$. Тем самым

$\int_K (u_0^{(n)} \rho_0 + u_1^{(n)} \rho_1) d\mu \geq a$, то есть $\int_K z(x_n \rho_0 + y_n \rho_1) d\mu \geq a$. Следовательно, $\int_K z(z_0 \rho_0 + z_1 \rho_1) d\mu \geq a$, откуда и по-прежнему $\int_K z(z_0 \rho_0 + z_1 \rho_1) d\mu \geq a$.

То есть $\int_K z \hat{\varphi}(\rho_0, \rho_1) d\mu \geq a$. Перейдя в последнем неравенстве к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$, получим $\int_K z \hat{\varphi}(\rho_0, \rho_1) d\mu \geq a$.

то есть $\hat{\varphi}(f_0, f_1)(z) \geq a$.

Л е м м а 2.8.7. Пусть $f_0, f_1 \in C(K)_+$, $\gamma \in [0, +\infty)$ и пусть

$$(1-s)f_0(z^s) + s f_1(z^{s-1}) \geq \gamma \quad (8.14)$$

для любой $z \in C(K)_+$ такой что $\min\{z(t) : t \in K\} > 0$. Тогда

$$\int_0^{1-s} f_1^s(\chi_K) \geq \gamma. \quad (8.15)$$

Доказательство. Пусть $\mu \in \mathcal{M}_c^+(K)$ и пусть $\rho_i \geq 0$ суть борелевские функции на K , такие что $f_i(x) = \int_K x \rho_i d\mu$, $x \in C(K)$ ($i=0,1$). По условию

$$(1-s) \int_K z^s \rho_0 d\mu + s \int_K z^{s-1} \rho_1 d\mu \geq \gamma \quad (8.16)$$

для любой $z \in C(K)_+$ такой что $\min\{z(t) : t \in K\} > 0$. С помощью предельного перехода убеждаемся, что (8.16) верно и тогда, когда z есть произвольная борелевская функция на K , та-

ная что $\inf\{z(t): t \in K\} > 0, \sup\{z(t): t \in K\} < +\infty$. Возьмём произвольное $\varepsilon > 0$ и положим $q_0 = \rho_0 + \varepsilon(\rho_1 + \chi_K), q_1 = \rho_1 + \varepsilon(\rho_0 + \chi_K)$,

$z = q_1 q_0^{-1}$. Тогда имеем $\int_K q_0^{1-s} q_1^s d\mu = (1-s) \int_K q_0^{1-s} q_1^s d\mu + s \int_K q_0^{1-s} q_1^s d\mu \geq$
 $\geq (1-s) \int_K z^s \rho_0 d\mu + s \int_K z^{s-1} \rho_1 d\mu \geq \gamma$. Итак, $\int_K q_0^{1-s} q_1^s d\mu \geq \gamma$. Отсюда
 $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_K q_0^{1-s} q_1^s d\mu \geq \gamma$, то есть $\int_K \rho_0^{1-s} \rho_1^s d\mu \geq \gamma$, то есть справедливо (8.16). Лемма доказана.

4. Л е м м а 2.8.8. Для $f, g \in C(K)_+^*$ справедливо

$$\varphi(f, g) = \inf \left\{ \frac{\alpha f + \beta g}{\hat{\varphi}(\alpha, \beta)} : \alpha, \beta \in (0, +\infty) \right\}. \quad (8.17)$$

Эта лемма есть очевидное следствие того, что $\varphi = \hat{\varphi}$.

Л е м м а 2.8.9. Для $f, g \in C(K)_+^*$, $z \in C(K)_+$ и $\alpha \in [0, +\infty)$ следующие утверждения эквивалентны:

(а) $\varphi(f, g)(z) \geq \alpha$;

(б) для любого $n \in \mathbb{N}$, любых $\alpha_k, \beta_k \in (0, +\infty)$ ($k=1, \dots, n$), любых $z_k \in C(K)_+$ ($k=1, \dots, n$), таких что $z_1 + \dots + z_n = z$, справедливо неравенство $\sum_{k=1}^n \frac{\alpha_k f(z_k) + \beta_k g(z_k)}{\hat{\varphi}(\alpha_k, \beta_k)} \geq \alpha$.

Действительно, в силу леммы 2.8.8 и формулы для вычисления нижней грани функционалов (Вулик [6], стр. 230) имеем

$$\varphi(f, g)(z) = \inf_f \sum_{k=1}^n \frac{\alpha_k f(z_k) + \beta_k g(z_k)}{\hat{\varphi}(\alpha_k, \beta_k)},$$

где инфимум берётся по всем $n, \{\alpha_k\}, \{\beta_k\}, \{z_k\}$, удовлетворяющим условиям пункта (б) леммы.

5. В этом пункте полагаем $E = C(K) \times C(K)$ (декартово произведение), причём считаем, что $E^* = C(K)^* \times C(K)^*$ естественным образом.

Л е м м а 2.8.10. Пусть $z \in C(K)_+$, $\alpha \in [0, +\infty)$. Множество

$$H_z = \{(\ell, q) \in E_+^* : \varphi(\ell, q)(z) \geq \alpha\} \quad (8.18)$$

выпукло и замкнуто в топологии $\mathcal{B}(E^*, E)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. По каждому $n \in \mathbb{N}$, $\{\alpha_k\}, \{\beta_k\}, \{z_k\}$ из пункта (б) леммы 2.8.9 образуем множество

$$\{(\ell, q) \in E_+^* : \sum_{k=1}^n \frac{\alpha_k \ell(z_k) + \beta_k q(z_k)}{\varphi(\alpha_k, \beta_k)} \geq \alpha\}, \quad (8.19)$$

которое, очевидно, выпукло и замкнуто в топологии $\mathcal{B}(E^*, E)$. Остаётся заметить, что H_z совпадает с пересечением всех таких множеств.

Л е м м а 2.8.11. Пусть $h \in C(K)_+^*$. Множество

$$H = \{(\ell, q) \in E_+^* : \varphi(\ell, q) \geq h\} \quad (8.20)$$

непусто, выпукло и замкнуто в топологии $\mathcal{B}(E^*, E)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Ясно, что $(\alpha h, \alpha h) \in H$ при $\alpha = \frac{1}{\varphi(1, 1)}$, поэтому $H \neq \emptyset$. Так как $H = \bigcap_{z \in C(K)_+} \{(\ell, q) \in E_+^* : \varphi(\ell, q)(z) \geq h(z)\}$, то остальные утверждения леммы прямо следуют из леммы 2.8.10.

§ 9. Доказательства предложения 2.2.1 и утверждения, сформулированного в замечании 2.2.3

1. Л е м м а 2.9.1. Пусть \mathcal{Y} - архимедов K -линеал, \mathcal{Y}_1 - его идеал, $\varphi \in \mathcal{K}_2^0$ и $\ell, q \in \mathcal{Y}_+$. Тогда $\varphi(\ell, q)|_{\mathcal{Y}_1} = \varphi(\ell|_{\mathcal{Y}_1}, q|_{\mathcal{Y}_1})$.

Действительно, отображение $\tilde{Y} \ni f \rightarrow f|_{Y_1} \in \tilde{Y}_1$ есть структурный гомоморфизм, остаётся применить теорему I.1.23 к указанному отображению и функции $\varphi(|\xi|, |\eta|)$.

Л е м м а 2.3.2. Пусть Y — идеал в W , $u \in Y_+$, $f, g \in \tilde{Y}_+$, $\varphi \in \mathcal{K}_2^0$. Тогда $\varphi(f, g)_{(u)} = \varphi(f(u), g(u))$.

Напомним, что $f(u)$ — функционал на M , действующий по формуле $f(u)(x) = f(xu)$, $x \in M$.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Отображение $\tilde{Y} \ni f \rightarrow f(u) \in \tilde{M}$ есть структурный гомоморфизм (см. лемму 1.2.5), остаётся применить теорему I.1.23 к указанному отображению и функции $\varphi(|\xi|, |\eta|)$.

2. В этом пункте будет доказано предложение 2.2.1. Предварительно докажем некоторые леммы.

Л е м м а 2.3.3. Пусть $u_0, u_1 \in (X_0)_+$, $v \in (X_1)_+$, $f \in (X_0)_+^*$, $g \in (X_1)_+^*$.

Тогда

$$\begin{aligned} (a) \quad & f(u_0 \vee u_1) = f(u_0) \vee f(u_1), \quad f(u_0 \wedge u_1) = f(u_0) \wedge f(u_1); \\ (б) \quad & (f(u_0 \vee u_1))^{1-s} (g(v))^s = (f(u_0))^{1-s} (g(v))^s \vee (f(u_1))^{1-s} (g(v))^s, \\ & (f(u_0 \wedge u_1))^{1-s} (g(v))^s = (f(u_0))^{1-s} (g(v))^s \wedge (f(u_1))^{1-s} (g(v))^s. \end{aligned}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о . Пусть $x \in M_+$. Тогда

$$\begin{aligned} (f(u_0) \vee f(u_1))(x) &= \sup\{f(u_0 x_0 + u_1 x_1) : x_0, x_1 \geq 0, x_0 + x_1 = x\} = f(u_0 \vee u_1)(x) = \\ &= f(u_0 \vee u_1)(x). \end{aligned}$$

Аналогично доказывается второе равенство в (а). Наконец, (б) есть очевидное следствие из (а).

С л е д с т в и е 2.3.4. Пусть $f \in (X_0)_+^*$, $g \in (X_1)_+^*$, $u_1, u_2 \in (X_0)_+$, $v \in (X_1)_+$, причём $u_1 \wedge u_2 = 0$. Тогда

$$\begin{aligned} (f(u_1))^{1-s} (g(v))^s \wedge (f(u_2))^{1-s} (g(v))^s = 0 \quad \text{кроме того,} \quad (f(u_1 + u_2))^{1-s} (g(v))^s = \\ = (f(u_1))^{1-s} (g(v))^s + (f(u_2))^{1-s} (g(v))^s. \end{aligned}$$

Л е м м а 2.9.5. Пусть $f \in (X_0)_+^*$, $g \in (X_1)_+^*$, $u \in (X_0)_+$, $v \in (X_1)_+$, причём $u \wedge v = 0$. Тогда $(f(u) \wedge g(v))^s = 0$. То есть $(f(u))^{1-s} (g(v))^s = 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Для любого $x \in M_+$ имеем

$(f(u) \wedge g(v))(x) = \inf \{ f(uy) + g(vz) : 0 \leq y, z, y + z = x \}$. Положим $y_0 = v \vee x$, $z_0 = x - y_0$. Тогда $(f(u) \wedge g(v))(x) \leq f(uy_0) + g(vz_0) = 0$.

Л е м м а 2.9.6. Пусть $f \in (X_0)_+^*$, $g \in (X_1)_+^*$, $u \in (X_0)_+$, $v \in (X_1)_+$, $x \in M_+$, причём $x \wedge u^{1-s} v^s = 0$. Тогда $(f(u))^{1-s} (g(v))^s(x) = 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о . В силу следствия 2.9.4 и леммы 2.9.5 можно считать, что $e_u = e_v$. Тогда $x \wedge u = 0$, $x \wedge v = 0$, поэтому $(f(u))^{1-s} (g(v))^s(x) \leq (f(u)(x))^{1-s} (g(v)(x))^s = (f(xu))^{1-s} (g(xv))^s = 0$. см. лемму 2.8.3.

Д о к а з а т е л ь с т в о предложения 2.2.1. Докажем сначала единственность функционала h . Допустим, что $h, h' \in (X_S)_+^*$ оба удовлетворяют требуемому условию. Тогда $(h - h')_{(u^{1-s} v^s)} = 0$ для всех $u \in (X_0)_+$, $v \in (X_1)_+$. Заметим, что $\{u^{1-s} v^s : u \in (X_0)_+, v \in (X_1)_+\} = (X_S)_+$, поэтому $h - h' = 0$ в силу леммы 1.2.9.

Дадим теперь фактический способ построения функционала h , это построение неоднократно будет использовано далее.

Пусть $x \in X_S$ - произвольный. Найдём $u \in (X_0)_+$, $v \in (X_1)_+$ такие что $|x| \leq \lambda u^{1-s} v^s$ для некоторого $\lambda \in (0, +\infty)$. Обозначим $w = u^{1-s} v^s$, $F = (f(u))^{1-s} (g(v))^s$, где $(f(u))^{1-s} (g(v))^s$ есть значение функции $\xi^{1-s} \eta^s$ на элементах $f(u), g(v)$ K -пространства \tilde{M} . Теперь полагаем

$$h(x) = F(w^{-1}x). \quad (9.1)$$

Прежде всего убедимся, что число $h(x)$ не зависит от выбора u и v . Действительно, пусть $u_1 \in (X_0)_+$, $v_1 \in (X_1)_+$ таковы, что $|x| \leq \lambda_1 u_1^{1-s} v_1^s$ для некоторого $\lambda_1 \in (0, +\infty)$. Положим $u_2 = u v u_1, v_2 = v v v_1$. Теперь для $i=1,2$ обозначим $w_i = u_i^{1-s} v_i^s$, $F_i = (f(u_i))^{1-s} (g(v_i))^s$. Нужно показать, что $F(w^{-1}x) = F_2(w_2^{-1}x)$, $F_1(w_1^{-1}x) = F_2(w_2^{-1}x)$. Докажем первое из этих равенств, второе устанавливается совершенно аналогично. Обозначим $y = w_2^{-1}u$, $z = v_2^{-1}v$. Ясно, что $y, z \in M$ и

$$f(u)(t) = f(u_2)(yt), \quad g(v)(t) = g(v_2)(zt), \quad t \in M.$$

Поэтому имеем

$$F(t) = F_2(y^{1-s} z^s t), \quad t \in M.$$

$$\begin{aligned} \text{Отсюда } F_2(w_2^{-1}x) &= F_2((u_2^{1-s} v_2^s)^{-1}x) = F_2((u_2^{-1}u)^{1-s} (v_2^{-1}v)^s (u^{1-s} v^s)^{-1}x) = \\ &= F_2(y^{1-s} z^s w^{-1}x) = F(w^{-1}x). \end{aligned}$$

Теперь ясно, что $h \in (X_S)_+^*$. Проверим (2.1). Пусть $u \in (X_0)_+, v \in (X_1)_+, w = u^{1-s} v^s, F = (f(u))^{1-s} (g(v))^s$. Тогда для любого $x \in M_+$ имеем $h_{(w)}(x) = h(wx) = F(w^{-1}wx) = F(0w \vee x) = F(x) - F(x')$, где $x' = x - 0w \vee x$. Так как $x' \wedge w = 0$, то $F(x') = 0$ в силу леммы 2.9.6. Итак, $h_{(w)}(x) = F(x)$. Предложение 2.2.1 доказано.

3. Доказательство утверждения, сформулированного в замечании 2.2.3.

Покажем прежде всего, что $X_0 \cap X_1$ плотно по норме в X_S . Фиксируем произвольный $x \in X_S$ и убедимся, что существует последовательность $z_n \in X_0 \cap X_1$ ($n \in \mathbb{N}$), такая что $|x - z_n|_{X_S} \rightarrow 0$

при $n \rightarrow \infty$. Не умаляя общности, можно считать, что $\kappa \geq 0$.
 Найдутся $x_i \in X_i$, такие что $x_i \geq 0$, $x = x_0^{1-s} x_1^s$, $(x \in D = \{x_i \in D$
 ($i = 0, 1$)). В силу леммы 2.7.8 найдутся последовательности
 $u_n \in X_0, v_n \in X_1 (n \in \mathbb{N})$, такие что $0 \leq u_n \perp x_0, 0 \leq v_n \perp x_1, \|x_0 - u_n\|_{X_0} \rightarrow 0,$
 $\|x_1 - v_n\|_{X_1} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Положим $z_n = u_n^{1-s} v_n^s$

и убедимся, что $z_n (n \in \mathbb{N})$ - требуемая последовательность. Име-
 ем $0 \leq x - z_n = x_0^{1-s} x_1^s - u_n^{1-s} v_n^s = (x_0^{1-s} x_1^s - x_0^{1-s} v_n^s) + (x_0^{1-s} v_n^s - u_n^{1-s} v_n^s) =$
 $= x_0^{1-s} (x_1 - v_n)^s + (x_0 - u_n)^{1-s} v_n^s \leq x_0^{1-s} (x_1 - v_n)^s + (x_0 - u_n)^{1-s} x_1^s.$

Остаётся заметить, что из $\|x_0 - u_n\|_{X_0} \rightarrow 0, \|x_1 - v_n\|_{X_1} \rightarrow 0$ следует,
 что $\|x_0^{1-s} (x_1 - v_n)^s\|_{X_s} \rightarrow 0, \|(x_0 - u_n)^{1-s} x_1^s\|_{X_s} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Пусть теперь $f \in (X_0)_+^*, g \in (X_1)_+^*$ - произвольные и пусть
 $h = f^{1-s} g^s$ в смысле определения 2.2.2. Обозначим через f', g', h'
 сужения функционалов f, g, h на $X_0 \cap X_1$. Нужно дока-
 зать, что $h' = (f')^{1-s} (g')^s$, где справа написано значение функ-
 ции $\xi^{1-s} \eta^s$ от элементов f', g' K -пространства $(X_0 \cap X_1)^*$.
 Обозначим $\ell = h' - (f')^{1-s} (g')^s$. В силу леммы 1.2.9 достаточно
 убедиться, что $\ell(u) = 0$ для любого $u \in (X_0 \cap X_1)_+$. Фиксируем
 произвольный $u \in (X_0 \cap X_1)_+$. Ясно, что $(h')_{(u)} = h_{(u)}, (f')_{(u)} = f_{(u)},$
 $(g')_{(u)} = g_{(u)}$. Далее, в силу леммы 2.3.2 имеем $((f')^{1-s} (g')^s)_{(u)} =$
 $= ((f')_{(u)})^{1-s} ((g')_{(u)})^s = (f_{(u)})^{1-s} (g_{(u)})^s$. Следовательно, $\ell(u) = h_{(u)} - (f_{(u)})^{1-s} (g_{(u)})^s = 0$
 по самому определению 2.2.2.

4. В этом пункте рассматриваются свойства конструкции,
 введённой в определении 2.2.2.

Л е м м а 2.9.7. Пусть $f \in (X_0)_+^*, g \in (X_1)_+^*, u \in (X_0)_+, v \in (X_1)_+$.
 Тогда $f^{1-s} g^s (u^{1-s} v^s) \leq (f(u))^{1-s} (g(v))^s,$

где $f^{1-s}q^s$ понимается в смысле определения 2.2.2.

Доказательство. Обозначим для краткости $\mathbb{1}(W)$ через $\mathbb{1}$. Тогда, используя лемму 2.8.3, получаем

$$f^{1-s}q^s(u^{1-s}v^s) = (f^{1-s}q^s)(u^{1-s}v^s)(\mathbb{1}) = ((f(u))^{1-s}(q(v))^s)(\mathbb{1}) \leq (f(u)(\mathbb{1}))^{1-s}(q(v)(\mathbb{1}))^s = (f(u))^{1-s}(q(v))^s.$$

Лемма 2.8.8. Пусть $f \in (X_0)_+^*$, $g \in (X_1)_+^*$, $h \in (X_s)_+^*$ таковы, что $h(u^{1-s}v^s) \leq (1-s)f(u) + sq(v)$ для всех $u \in (X_0)_+$, $v \in (X_1)_+$. Тогда $h \leq f^{1-s}q^s$, где $f^{1-s}q^s$ понимается в смысле определения 2.2.2.

Доказательство. Фиксируем произвольные $u \in (X_0)_+$, $v \in (X_1)_+$. Тогда для любых $x, y \in M_+$ имеем по условию $h((xu)^{1-s}(yv)^s) \leq (1-s)f(xu) + sq(yv)$, то есть $h_{(u^{1-s}v^s)}(x^{1-s}y^s) \leq (1-s)f_{(u)}(x) + sq_{(v)}(y)$. В силу леммы 2.8.4 отсюда следует, что $h_{(u^{1-s}v^s)} \leq (f_{(u)})^{1-s}(q_{(v)})^s$, то есть $h_{(u^{1-s}v^s)} \leq (f^{1-s}q^s)_{(u^{1-s}v^s)}$. Итак, $h_{(w)} \leq (f^{1-s}q^s)_{(w)}$ при всех $w \in (X_s)_+$. Следовательно, $h \leq f^{1-s}q^s$.

Лемма 2.9.9. Пусть $f_0 \in (X_0)_+^*$, $f_1 \in (X_1)_+^*$, $v_0 \in (X_0)_+$, $v_1 \in (X_1)_+$, $\gamma \in (0, +\infty)$ и пусть

$$(1-s)f_0(z^s v_0) + s f_1(z^{s-1} v_1) \geq \gamma \quad (9.2)$$

для любого $z \in M_+$ такого что $z^{-1} \in M_+$ и $z z^{-1} = \mathbb{1}(W)$. Тогда $(f_0^{1-s} f_1^s)(v_0^{1-s} v_1^s) \geq \gamma$.

Доказательство. Положим $h_0 = (f_0)_{(v_0)}$, $h_1 = (f_1)_{(v_1)}$. Тогда $(1-s)h_0(z^s) + s h_1(z^{s-1}) \geq \gamma$ для любого $z \in M_+$ такого что $z^{-1} \in M_+$ и $z z^{-1} = \mathbb{1}(W)$. В силу леммы 2.8.7 имеем $h_0^{1-s} h_1^s(\mathbb{1}(W)) \geq \gamma$, то есть $(f_0^{1-s} f_1^s)_{(v_0^{1-s} v_1^s)}(\mathbb{1}(W)) \geq \gamma$, то есть $f_0^{1-s} f_1^s(v_0^{1-s} v_1^s) \geq \gamma$. Лемма доказана.

Л е м м а 2.9.10. Пусть для $i=0,1$ $f_i \in (X_i)_+^*$, $z_i \in M_+$.

Положим

$$g_i(x) = f_i(z_i x), \quad x \in X_i.$$

Тогда

$$g_0^{1-s} g_1^s(x) = f_0^{1-s} f_1^s(z_0^{1-s} z_1^s x), \quad x \in X_s. \quad (9.3)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о . Обозначим

$$h(x) = f_0^{1-s} f_1^s(z_0^{1-s} z_1^s x), \quad x \in X_s.$$

Взяв произвольные $u \in (X_0)_+$, $v \in (X_1)_+$, найдем $h(u^{1-s} v^s) =$

$$\begin{aligned} &= (f_0^{1-s} f_1^s)((u z_0)^{1-s} (v z_1)^s) = ((f_0)(u z_0))^{1-s} ((f_1)(v z_1))^s (g_0^{1-s} g_1^s)(u^{1-s} v^s) = \\ &= ((g_0)(u))^{1-s} ((g_1)(v))^s = ((f_0)(u z_0))^{1-s} ((f_1)(v z_1))^s. \end{aligned}$$

Таким образом, $h(w) = (g_0^{1-s} g_1^s)(w)$ для любого $w \in (X_s)_+$. Остаётся применить лемму 1.2.9.

Л е м м а 2.9.11. Пусть $f \in (X_0)_+^*$, $g \in (X_1)_+^*$, $a, b \in [0, +\infty)$.

Тогда

$$(af)^{1-s} (bg)^s = a^{1-s} b^s f^{1-s} g^s.$$

Прямо следует из определения 2.2.2.

Л е м м а 2.9.12. Пусть $E \subset (X_0)_+^*$, $g \in (X_1)_+^*$. Пусть существует

$\sup E = f_1 \in (X_0)_+^*$. Тогда

$$\sup \{ f^{1-s} g^s : f \in E \} = f_1^{1-s} g^s, \quad (9.4)$$

$$\inf \{ f^{1-s} g^s : f \in E \} = f_0^{1-s} g^s, \quad (9.5)$$

где

$$f_0 = \inf E.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о . Обозначим $F = \sup \{ f^{1-s} g^s : f \in E \}$.

Фиксируем произвольный $w \in (X_s)_+$. Найдутся $u \in (X_0)_+$,

$v \in (X_1)_+$, такие что $w = u^{1-s} v^s$. В силу леммы 1.2.5 имеем

$F_{(w)} = \sup\{(\ell^{1-s} q^s)_{(w)} : \ell \in E\}$. то есть $F_{(w)} = \sup\{(\ell(u))^{1-s} (q(v))^s : \ell \in E\}$. Но $\sup\{\ell_{(w)} : \ell \in E\} = (\ell_1)_{(w)}$ по той же лемме 1.2.5. Поэтому $F_{(w)} = ((\ell_1)_{(w)})^{1-s} (q(v))^s$. то есть $F_{(w)} = (\ell_1^{1-s} q^s)_{(w)}$. Следовательно, (лемма 1.2.9) $F = \ell_1^{1-s} q^s$. Аналогично доказывается (9.5).

С л е д с т в и е 2.9.13. Пусть $\ell_1, \ell_2 \in (X_0)_+^*$, $q \in (X_1)_+^*$, причём $\ell_1 \wedge \ell_2 = 0$. Тогда $\ell_1^{1-s} q^s \wedge \ell_2^{1-s} q^s = 0$, $(\ell_1 + \ell_2)^{1-s} q^s = \ell_1^{1-s} q^s + \ell_2^{1-s} q^s$.

Л е м м а 2.9.14. Пусть $\ell \in (X_0)_+^*$, $q \in (X_1)_+^*$, $h = \ell^{1-s} q^s$. Пусть K_ℓ, K_q, K_h суть компоненты в \tilde{M} , порождённые множествами $\{\ell_{(u)} : u \in (X_0)_+\}$, $\{q_{(v)} : v \in (X_1)_+\}$, $\{h_{(w)} : w \in (X_S)_+\}$, соответственно. Тогда $K_h = K_\ell \cap K_q$.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Возьмём произвольные $u \in (X_0)_+$, $v \in (X_1)_+$ и положим $w = u^{1-s} v^s$. Тогда $h_{(w)} = (\ell_{(u)})^{1-s} (q_{(v)})^s$. поэтому главная компонента в \tilde{M} , порождённая $h_{(w)}$, совпадает с пересечением главных компонент в \tilde{M} , порождённых $\ell_{(u)}$ и $q_{(v)}$, соответственно. Из сказанного немедленно вытекает требуемое.

§ 10. Доказательства предложений 2.2.6 и 2.2.7

I. Предварительно докажем следующие три леммы.

Л е м м а 2.10.1. Пусть $\{x_\alpha : \alpha \in A\}$ - направление в $(X_0)_+$, слабо сходящееся к нулю в X_0 , а $\{y_\alpha : \alpha \in A\}$ - направление в $(X_1)_+$, слабо сходящееся к нулю в X_1 . Тогда направление $\{z_\alpha : \alpha \in A\}$, где $z_\alpha = x_\alpha^{1-s} y_\alpha^s$, слабо сходится к нулю в X_S .

Доказательство. Допустим противное. Тогда найдётся такой $f \in (X_S)_+^*$, что $F(z_\alpha) \geq 1$ для всех $\alpha \in A_1$, где A_1 - конформная часть A . Так как направление $\{(x_\alpha, y_\alpha) : \alpha \in A_1\}$ слабо сходится к нулю в декартовом произведении $X_0 \times X_1$, а выпуклые замыкания множества в слабой и нормированной топологиях совпадают, то найдётся такая последовательность выпуклых комбинаций

$$z_i = \left(\sum_{k=1}^{n_i} t_{ki} x_{\alpha_{ki}}, \sum_{k=1}^{n_i} t_{ki} y_{\alpha_{ki}} \right), \quad i \in \mathbb{N}, \alpha_{ki} \in A_1,$$

что $\left\| \sum_{k=1}^{n_i} t_{ki} x_{\alpha_{ki}} \right\|_{X_0} \xrightarrow{i \rightarrow \infty} 0, \left\| \sum_{k=1}^{n_i} t_{ki} y_{\alpha_{ki}} \right\|_{X_1} \xrightarrow{i \rightarrow \infty} 0.$

Положим $z_i = \sum_{k=1}^{n_i} t_{ki} z_{\alpha_{ki}}, i \in \mathbb{N}$. Имеем $F(z_i) = \sum_{k=1}^{n_i} t_{ki} F(z_{\alpha_{ki}}) \geq \sum_{k=1}^{n_i} t_{ki} = 1 (i \in \mathbb{N})$. С другой стороны, в силу неравенства Гельдера $z_i = \sum_{k=1}^{n_i} t_{ki} x_{\alpha_{ki}}^{1-s} y_{\alpha_{ki}}^s \leq \left(\sum_{k=1}^{n_i} t_{ki} x_{\alpha_{ki}} \right)^{1-s} \left(\sum_{k=1}^{n_i} t_{ki} y_{\alpha_{ki}} \right)^s$, откуда $\|z_i\|_{X_S} \xrightarrow{i \rightarrow \infty} 0$. Это противоречит тому, что $F(z_i) > 1 (i \in \mathbb{N})$.

Лемма 2.10.2. Для любого $f \in (X_S)_+^*$ найдутся $f_0 \in (X_0)_+^*, f_1 \in (X_1)_+^*$, такие что $(x_0 \in (X_0)_+, x_1 \in (X_1)_+, f_0(x_0) \leq 1, f_1(x_1) \leq 1) \implies (F(x_0^{1-s} x_1^s) \leq 1)$.

Доказательство. Рассмотрим конуса $(X_0)_+, (X_1)_+, (X_S)_+$, снабжённые соответствующими слабыми топологиями. Введём отображение Γ декартова произведения $(X_0)_+ \times (X_1)_+$ на $(X_S)_+$, действующее по формуле

$$\Gamma((x_0, x_1)) = x_0^{1-s} x_1^s, (x_0, x_1) \in (X_0)_+ \times (X_1)_+.$$

Из леммы 2.10.1 следует, что T непрерывно в точке $(0,0)$. Так как множество $\{z \in (X_S)_+ : F(z) \leq 1\}$ есть окрестность нуля в $(X_S)_+$, то найдутся $q_1, \dots, q_m \in (X_0)^*$ и $h_1, \dots, h_n \in (X_1)^*$ такие что $(x_0 \in (X_0)_+, x_1 \in (X_1)_+, q_i(x_0) \leq 1 (i=1, \dots, m), h_j(x_1) \leq 1 (j=1, \dots, n)) \implies (F(x_0^{1-s} x_1^s) \leq 1)$. Остается положить

$$f_0 = \sum_{i=1}^m |q_i|, \quad f_1 = \sum_{j=1}^n |h_j|.$$

Лемма 2.10.3. Для любого $F \in (X_S)_+^*$ найдутся $f_0 \in (X_0)_+^*, f_1 \in (X_1)_+^*$ такие что $F \leq f_0^{1-s} f_1^s$.

Доказательство. Покажем, что f_0 и f_1 из леммы 2.10.2 суть требуемые. Возьмём произвольные $y_i \in (X_i)_+$ и $\varepsilon > 0$, и положим $x_i = \frac{y_i}{f_i(y_i) + \varepsilon}$ ($i=0,1$). Тогда $f_i(x_i) \leq 1$ ($i=0,1$), поэтому $F(x_0^{1-s} x_1^s) \leq 1$, то есть $F(y_0^{1-s} y_1^s) \leq [f_0(y_0) + \varepsilon]^{1-s} [f_1(y_1) + \varepsilon]^s$. В силу произвольности $\varepsilon > 0$ отсюда следует, что $F(y_0^{1-s} y_1^s) \leq [f_0(y_0)]^{1-s} [f_1(y_1)]^s$. Итак,

$$F(y_0^{1-s} y_1^s) \leq [f_0(y_0)]^{1-s} [f_1(y_1)]^s \text{ для любых } y_i \in (X_i)_+ (i=0,1). \quad (10.1)$$

Так как $\alpha^{1-s} \beta^s \leq (1-s)\alpha + s\beta$ для любых $\alpha, \beta \in [0, +\infty)$, то из (10.1) и леммы 2.9.8 следует, что $F \leq f_0^{1-s} f_1^s$.

2. Доказательство предложения 2.2.6.

Итак, пусть единицы Π_0 и Π_1 выбраны произвольно. Рассмотрим множество $H = \{e_0^{1-s} e_1^s : e_0 \in E_0, e_1 \in E_1\}$, где $e_0^{1-s} e_1^s$ понимается в смысле определения 2.2.2. Покажем, что $H^d = \{0\}$, где H^d есть дизъюнктивное дополнение множества H в $(X_S)^*$. Для $i=0,1$ обозначим через G_i совокупность всех $f \in (X_i)^*$, представимых в виде $f = \sum_{k=1}^n \alpha_k q_k$, где $n \in \mathbb{N}, \alpha_k \in (0, +\infty)$,

$q_k \in E_i$ ($k=1, \dots, n$), причём $q_k \wedge q_j = 0$ при $k \neq j$. Из следствия 2.9.13 вытекает, что $f_0^{1-s} f_1^s \in H^{dd}$ для любых $f_0 \in G_0, f_1 \in G_1$.

Возьмём теперь произвольный $F \in H^{dd}, F \geq 0$. В силу леммы 2.10.3 существуют $f_0 \in (x_0)_+^*, f_1 \in (x_1)_+^*$, такие что $F \leq f_0^{1-s} f_1^s$. Но

$$f_i = \sup\{f \in G_i : f \leq f_i\} \quad (i=0,1),$$

следовательно, $f_0^{1-s} f_1^s \in H^{dd}$ по лемме 2.9.12. Тем самым

$F \in H^{dd}$. Поэтому $F = 0$. Итак, $H^{dd} = \{0\}$. Отсюда прямо

следует единственность единицы $\mathbb{1}_S$, подчинённой единицам

$\mathbb{1}_0, \mathbb{1}_1$. Из следствия 2.9.13 вытекает, что инфимум любых двух

элементов из H является остолком каждого из них. Поэтому

существует $\sup H \in \mathcal{M}((x_s)^*)$. Ясно, что $\mathbb{1}_S = \sup H$ есть

единица, подчинённая единицам $\mathbb{1}_0, \mathbb{1}_1$. Предложение 2.2.6 доказано.

3. Доказательство предложения 2.2.7.

Итак, пусть единицы $\mathbb{1}_0$ и $\mathbb{1}_1$ выбраны произвольно, а единица

$\mathbb{1}_S$ подчинена им. Пусть сначала $f \in E_0, q \in E_1$. Тогда $R_0(f), R_1(q), R_S(f^{1-s} q^s)$ суть единичные элементы пространства $\mathcal{M}(\tilde{M})$,

причём в силу леммы 2.9.14 и теоремы 1.2.22 имеем $R_S(f^{1-s} q^s) = R_0(f) \wedge R_1(q)$, или, что то же самое, $R_S(f^{1-s} q^s) = [R_0(f)]^{1-s} [R_1(q)]^s$.

Пусть теперь $f = \sum_{i=1}^m \alpha_i \rho_i, q = \sum_{j=1}^n \beta_j q_j$, где $\rho_i \in E_0$ попарно дизъюнкты, $q_j \in E_1$ попарно дизъюнкты, и числа $\alpha_i, \beta_j > 0$.

Тогда в силу леммы 2.9.11 и следствия 2.9.13 имеем $f^{1-s} q^s = \sum_{i,j} \alpha_i^{1-s} \beta_j^s \rho_i^{1-s} q_j^s$, откуда $R_S(f^{1-s} q^s) = \sum_{i,j} \alpha_i^{1-s} \beta_j^s R_S(\rho_i^{1-s} q_j^s)$.

$= \sum_{i,j} \alpha_i^{1-s} \beta_j^s [R_0(\rho_i)]^{1-s} [R_1(q_j)]^s = [R_0(f)]^{1-s} [R_1(q)]^s$.

Общий случай. Пусть G_i ($i=0,1$) означает то же, что и в предыдущем пункте. Тогда, пользуясь уже доказанным и леммой 2.9.12, получаем $R_S(\{f^{1-s}q^s\}) = \sup\{R_S(\{f_1^{1-s}q_1^s\}) : f_1 \leq f, q_1 \leq q, f_1 \in G_0, q_1 \in G_1\} = \sup\{[R_0(f_1)]^{1-s}[R_1(q_1)]^s : f_1 \leq f, q_1 \leq q, f_1 \in G_0, q_1 \in G_1\} = [R_0(f)]^{1-s}[R_1(q)]^s$.

Предложение 2.2.7 доказано.

§ II. Доказательство теоремы 2.2.8

Итак, единицы $\mathbb{I}_0, \mathbb{I}_1$ выбраны произвольно, а единица \mathbb{I}_S подчинена им. Пространства $(X_0)^*, (X_1)^*, (X_S)^*$ отождествляем с их образами $R_0((X_0)^*), R_1((X_1)^*), R_S((X_S)^*)$ при канонических реализациях.

I. Заметим сначала, что равенство (2.5) имеет место по запасу элементов. Действительно, из предложения 2.2.7 следует, что $((X_0)^*)^{1-s}((X_1)^*)^s \subset (X_S)^*$. После чего из леммы 2.10.3 следует равенство $((X_0)^*)^{1-s}((X_1)^*)^s = (X_S)^*$ по запасу элементов. Остаётся доказать, что

$$\| \cdot \|_{(X_S)^*} = \| \cdot \|_{((X_0)^*)^{1-s}((X_1)^*)^s} \quad (II.1)$$

Напомним, что

$$\|F\|_{(X_S)^*} = \sup\{|F(x)| : x \in X_S, \|x\|_{X_S} \leq 1\}, F \in (X_S)^*, \quad (II.2)$$

$$\|F\|_{((X_0)^*)^{1-s}((X_1)^*)^s} = \inf\{\lambda > 0 : |F| \leq \lambda \{f_0^{1-s}f_1^s\} \text{ для некоторых } f_i \in (X_i)^*, \|f_i\|_{(X_i)^*} \leq 1 \ (i=0,1)\}, F \in (X_S)^*. \quad (II.3)$$

2. Докажем, что

$$\|\cdot\|_{(X_S)^*} \leq \|\cdot\|_{((X_0)^*)^{1-s}((X_1)^*)^s} \quad (II.4)$$

Пусть $F \in (X_S)_+^*$, $\|F\|_{((X_0)^*)^{1-s}((X_1)^*)^s} = 1$. Возьмём произвольное $\varepsilon > 0$ и произвольный $z \in (X_S)_+$, $\|z\|_{X_S} \leq 1$. Найдутся $f_i \in (X_i)_+^*$, $x_i \in (X_i)_+$ такие что $\|f_i\|_{X_i^*} \leq 1$, $\|x_i\|_{X_i} \leq 1$ ($i=0,1$) и $F \leq (1+\varepsilon) f_0^{1-s} f_1^s$, $z \leq (1+\varepsilon) x_0^{1-s} x_1^s$. Тогда $F(z) \leq (1+\varepsilon)^2 f_0^{1-s} f_1^s (x_0^{1-s} x_1^s) \leq (1+\varepsilon)^2 (f_0(x_0))^{1-s} (f_1(x_1))^s \leq (1+\varepsilon)^2$ в силу леммы 2.9.7. Отсюда ясно, что $\|F\|_{(X_S)^*} \leq 1$. Итак, неравенство (II.4) доказано. Осталось доказать, что

$$\|\cdot\|_{(X_S)^*} \geq \|\cdot\|_{((X_0)^*)^{1-s}((X_1)^*)^s} \quad (II.5)$$

3. Положим далее $E = X_0 \times X_1$, причём

$$\|(x_0, x_1)\|_E = \max \left\{ \frac{\|x_0\|_{X_0}}{1-s}, \frac{\|x_1\|_{X_1}}{s} \right\}, (x_0, x_1) \in E.$$

Тогда естественным образом $E^* = (X_0)^* \times (X_1)^*$, причём

$$\|(f_0, f_1)\|_{E^*} = (1-s)\|f_0\|_{(X_0)^*} + s\|f_1\|_{(X_1)^*}, (f_0, f_1) \in E^*.$$

Л е м м а 2.11.1. Пусть $F \in (X_S)_+^*$. Тогда множество

$$H = \{(f_0, f_1) \in E_+^* : f_0^{1-s} f_1^s \geq F\} \quad (II.6)$$

непусто, выпукло и слабо* замкнуто, то есть замкнуто в топологии $\sigma(E^*, E)$.

Доказательство. $H \neq \emptyset$ в силу леммы 2.10.3. Пусть $(f_0, f_1), (g_0, g_1) \in H$, $\lambda \in (0,1)$. Тогда $[\lambda f_0 + (1-\lambda)g_0]^{1-s} [\lambda f_1 + (1-\lambda)g_1]^s \geq \lambda f_0^{1-s} f_1^s + (1-\lambda)g_0^{1-s} g_1^s \geq F$ в силу выпуклости функции $f^{1-s} g^s$,

тем самым, H - выпукло. Пусть $\{(\beta_0^\alpha, \beta_1^\alpha) : \alpha \in A\}$ - направление в H , которое слабо* сходится к некоторому (β_0, β_1) . Дока-

жем, что $(\beta_0, \beta_1) \in H$. Возьмём произвольные $u_0 \in (X_0)_+$, $u_1 \in (X_1)_+$.

Тогда очевидно $(\beta_0^\alpha)_{(u_0)} \rightarrow (\beta_0)_{(u_0)}$, $(\beta_1^\alpha)_{(u_1)} \rightarrow (\beta_1)_{(u_1)}$ в топологии

$b(\tilde{M}, M)$. Но $((\beta_0^\alpha)_{(u_0)})^{1-s} ((\beta_1^\alpha)_{(u_1)})^s = ((\beta_0^\alpha)^{1-s} (\beta_1^\alpha)^s)_{(u_0^{1-s} u_1^s)} \geq F_{(u_0^{1-s} u_1^s)}$

при всех $\alpha \in A$. В силу леммы 2.3.II поэтому будет

$$((\beta_0^\alpha)_{(u_0)})^{1-s} ((\beta_1^\alpha)_{(u_1)})^s \geq F_{(u_0^{1-s} u_1^s)}, \text{ то есть } (\beta_0^\alpha)^{1-s} (\beta_1^\alpha)^s \geq F_{(u_0^{1-s} u_1^s)}.$$

Отсюда следует, что $(\beta_0, \beta_1) \geq F$, то есть $(\beta_0, \beta_1) \in H$. Лемма

доказана.

Л е м м а 2.II.2. В условиях леммы 2.II.1 пусть

$\|F\|_{((X_0)^*)^{1-s} ((X_1)^*)^s} = 1$. Тогда для любого $(\beta_0, \beta_1) \in H$ справед-

ливо $\|(\beta_0, \beta_1)\|_{E^*} \geq 1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Так как

$$F \leq \|\beta_0\|_{(X_0)^*}^{1-s} \cdot \|\beta_1\|_{(X_1)^*}^s \cdot \left(\frac{\beta_0}{\|\beta_0\|_{(X_0)^*}} \right)^{1-s} \left(\frac{\beta_1}{\|\beta_1\|_{(X_1)^*}} \right)^s,$$

то $\|\beta_0\|_{(X_0)^*}^{1-s} \cdot \|\beta_1\|_{(X_1)^*}^s \geq 1$, следовательно, $(1-s)\|\beta_0\|_{(X_0)^*} + s\|\beta_1\|_{(X_1)^*} \geq 1$,

ибо $\xi^{1-s} \eta^s \leq (1-s)\xi + s\eta$ для любых $\xi, \eta \in [0, +\infty)$. Лемма доказана.

4. Фиксируем произвольный $F \in (X_S)_+^*$ такой что

$$\|F\|_{((X_0)^*)^{1-s} ((X_1)^*)^s} = 1, \text{ и покажем, что}$$

$$\|F\|_{(X_S)^*} \geq 1. \tag{II.7}$$

Тогда неравенство (II.5), а с ним и теорема 2.2.8 будут доказа-

ны. Фиксируем произвольное $\gamma \in (0, 1)$ и обозначим $V_\gamma =$

$$= \{(\beta_0, \beta_1) \in E^* : \|(\beta_0, \beta_1)\|_{E^*} \leq \gamma\}, \text{ то есть } V_\gamma \text{ есть замкну-$$

тый шар радиуса γ с центром в нуле в E^* . Пусть H есть

множество из леммы 2.II.1, см. (II.5). Тогда $H \cap V_\gamma = \emptyset$ в силу леммы 2.II.2. Так как H слабо* замкнуто, V_γ слабо* компактно, то они отделены слабо* замкнутой гиперплоскостью. Итак, найдётся $(x_0, x_1) \in E$, такой что $\|(x_0, x_1)\|_E = 1$ и $\inf \{ f_0(x_0) + f_1(x_1) : (f_0, f_1) \in H \} \geq \gamma$. Положим $u_0 = |x_0|$, $u_1 = |x_1|$. Теперь имеем

$$(f_0 \in (x_0)_+^*, f_1 \in (x_1)_+^*, f_0^{1-s} f_1^s \geq F) \implies (f_0(u_0) + f_1(u_1) \geq \gamma). \quad (II.8)$$

Обозначим $v_0 = \frac{u_0}{1-s}$, $v_1 = \frac{u_1}{s}$. Тогда

$$\|v_0\|_{X_0} \leq 1, \|v_1\|_{X_1} \leq 1, \quad (II.9)$$

$$(f_0 \in (x_0)_+^*, f_1 \in (x_1)_+^*, f_0^{1-s} f_1^s \geq F) \implies ((1-s)f_0(v_0) + s f_1(v_1) \geq \gamma). \quad (II.10)$$

Фиксируем $f_0 \in (x_0)_+^*, f_1 \in (x_1)_+^*$ такие что $f_0^{1-s} f_1^s = F$.

Возьмём произвольный $z \in M_+$, такой что $\bar{z} \in M_+$ и $z\bar{z}^{-1} = \Pi(w)$.

Положим

$$g_0(x) = f_0(z^s x), \quad x \in X_0,$$

$$g_1(x) = f_1(z^{s-1} x), \quad x \in X_1.$$

Ясно, что $g_0^{1-s} g_1^s = f_0^{1-s} f_1^s$, ибо $(z^s)^{1-s} (z^{s-1})^s = \Pi(w)$.

Поэтому $(1-s)g_0(v_0) + s g_1(v_1) \geq \gamma$, то есть $(1-s)f_0(z^s v_0) + s f_1(z^{s-1} v_1) \geq \gamma$. Теперь из леммы 2.9.9 следует, что

$F(v_0^{1-s} v_1^s) \geq \gamma$. Но $\|v_0^{1-s} v_1^s\|_{X_S} \leq 1$, поэтому $\|F\|_{(X_S)^*} \geq \gamma$.

Тем самым, в силу произвольности $\gamma \in (0, 1)$ неравенство

(II.7) доказано. Теорема 2.2.8 доказана.

§ 12. Доказательства предложения 2.2.9 и теорем 2.2.11 и 2.2.12

1. Доказательство предложения 2.2.9.

Напомним, что в банаховом K_N -пространстве Y выполнено условие (A) тогда и только тогда, когда $Y_{\text{ant}}^* = \{0\}$. Из теоремы 2.2.8 и предложения 1.2.26 и 1.2.27 следует, что

$$\{F: F \in (X_S)^*_{\text{ant}}, F \geq 0\} = \{f_0^{1-S} f_1: f_i \in (X_i)^*_{\text{ant}}, f_i \geq 0 \ (i=0,1)\},$$

либо, если $f_0 \in \bar{X}_0, f_1 \in (X_1)^*_{\text{ant}}$, то $f_0 D f_1$. Остаётся заметить, что для любых $f_i \in (X_i)^*_+$ ($i=0,1$) справедливо $(f_0^{1-S} f_1^S = 0) \iff (f_0 D f_1)$. Предложение 2.2.9 доказано.

2. В этом пункте будет доказана теорема 2.2.12. Считаем, что в $\mathcal{M}(\tilde{M})$ фиксирована какая-нибудь единица $\Pi(\mathcal{M}(\tilde{M}))$. Единицы Π_0 и Π_1 в $\mathcal{M}((X_0)^*)$ и $\mathcal{M}((X_1)^*)$ выбраны произвольно, а единица Π_S в $\mathcal{M}((X_S)^*)$ подчинена Π_0 и Π_1 . Пространства $(X_i)^*$ ($i=0,1,S$) отождествляем с их образами в $\mathcal{M}(\tilde{M})$ при соответствующих канонических реализациях. Пространства \bar{X}_i ($i=0,1,S$) тем самым оказываются идеалами в $\mathcal{M}(\tilde{M})$. Нормы на \bar{X}_i считаем индуцированными из $(X_i)^*$ ($i=0,1,S$). Теперь можно образовать пространство $(\bar{X}_0)^{1-S}(\bar{X}_1)^S$ являющееся идеалом в $\mathcal{M}(\tilde{M})$.

Л е м м а 2.12.1. Равенство

$$\bar{X}_S = (\bar{X}_0)^{1-S}(\bar{X}_1)^S$$

имеет место как по запасу элементов, так и по норме.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Естественным образом считаем, что $\mathcal{M}(\bar{M})$ есть компонента в $\mathcal{M}(\tilde{M})$, порождённая

множеством \bar{M} . В силу предложения 1.2.26 имеем $\bar{X}_i = (X_i)^* \cap \pi(\bar{M})$.
Теперь из теоремы 2.2.8 немедленно вытекает требуемое. Лемма доказана.

Для $i = 0, 1, S$ обозначим через θ_i естественный изоморфизм пространства \bar{X}_i на X_i' .

Л е м м а 2.13.2. Для любых $f_0 \in (\bar{X}_0)_+$, $f_1 \in (\bar{X}_1)_+$ справедливо

$$\theta_S(f_0^{1-S} f_1^S) = [\theta_0(f_0)]^{1-S} [\theta_1(f_1)]^S. \quad (12.1)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим $\theta_i(f_i) = y_i$ ($i=0,1$).

Тогда

$$f_i(x) = J(x y_i), \quad x \in X_i \quad (i=0,1). \quad (12.2)$$

Положим

$$F(x) = J(x y_0^{1-S} y_1^S), \quad x \in X_S.$$

Ясно, что $F \in \bar{X}_S$. Заметим, что (12.1) равносильно тому, что $f_0^{1-S} f_1^S = F$, а это, в свою очередь, равносильно тому, что $(f_0^{1-S} f_1^S)(w) = F(w)$ для всех $w \in (X_S)_+$. Итак, достаточно показать, что

$$((f_0)_{(u_0)})^{1-S} ((f_1)_{(u_1)})^S = F_{(u_0^{1-S} u_1^S)} \text{ при всех } u_i \in (X_i)_+ \quad (i=0,1). \quad (12.3)$$

Ясно, что

$$F_{(u_0^{1-S} u_1^S)}(x) = J(x u_0^{1-S} u_1^S y_0^{1-S} y_1^S), \quad x \in M. \quad (12.4)$$

С другой стороны,

$$(f_i)_{(u_i)}(x) = J(x u_i y_i), \quad x \in M \quad (i=0,1), \quad (12.5)$$

откуда^{х)}

$$\left(\left(\frac{f_0}{u_0}\right)\right)^{1-s} \left(\left(\frac{f_1}{u_1}\right)\right)^s (x) = J(x u_0^{1-s} y_0^{1-s} u_1^s y_1^s), \quad (12.6)$$

$x \in M$.

Из (12.4) и (12.6) следует (12.3). Лемма доказана.

Доказательство теоремы 2.2.12. Положим для краткости

$$(Y, \|\cdot\|_Y) = \left(\left((X_0)' \right)^{1-s} \left((X_1)' \right)^s, \|\cdot\|_{\left((X_0)' \right)^{1-s} \left((X_1)' \right)^s} \right).$$

$$\begin{aligned} \text{Имеем } (X_s)'_+ &= \{ \theta_s(F) : F \in (\overline{X_s})_+ \} = \{ \theta_s \left(\frac{f_0}{u_0} \frac{f_1}{u_1} \right) : \frac{f_i}{u_i} \in (\overline{X_i})_+ \ (i=0,1) \} = \\ &= \{ [\theta_0 \left(\frac{f_0}{u_0} \right)]^{1-s} [\theta_1 \left(\frac{f_1}{u_1} \right)]^s : \frac{f_i}{u_i} \in (\overline{X_i})_+ \ (i=0,1) \} = \{ y_0^{1-s} y_1^s : y_i \in (X_i)'_+ \ (i=0,1) \} = Y_+. \end{aligned}$$

Тем самым $(X_s)' = Y$ по запасу элементов. Аналогично убеждаемся, что $\{ z \in (X_s)' : \|z\|_{(X_s)'} < 1 \} = \{ y \in Y_+ : \|y\|_Y < 1 \}$. Тем самым $\|\cdot\|_{(X_s)'} = \|\cdot\|_Y$. Теорема 2.2.12 доказана.

3. Доказательство теоремы 2.2.11. Не умаляя общности, можно считать, что X_0 и X_1 суть фундаменты в W (в противном случае, вместо W мы стали бы рассматривать его компоненту V , порождённую множеством $X_0 \cap X_1$, а вместо X_0 и X_1 стали бы рассматривать $Y_0 = X_0 \cap V$, $Y_1 = X_1 \cap V$, ибо $y_0^{1-s} y_1^s = X_0^{1-s} X_1^s$, но Y_0 и Y_1 уже суть фундаменты в V). Так как в W имеется фундамент, являющийся КВ-пространством, то в W имеется и фундамент, являющийся КВ-пространством с аддитивной нормой. Поэтому имеет смысл говорить о пространствах $(X_i)'$, дуальных к X_i ($i=0,1,s$), причём для простоты записи мы будем отождествлять $(X_i)'$ с $\overline{X_i}$.

х) Здесь используется также следующее очевидное утверждение: пусть θ есть естественный изоморфизм \overline{M} на $M' = L$. Тогда для любых $q_0, q_1 \in \overline{M}_+$ справедливо $\theta(q_0^{1-s} q_1^s) = [\theta(q_0)]^{1-s} \times [\theta(q_1)]^s$.

Используя следствие 2.2.10, получаем $(X_S)^* = \overline{X}_S = (\overline{X}_0)^{1-s} (\overline{X}_1)^s$.
 Ещё раз применив следствие 2.2.10, получим $(X_S)^{**} = (\overline{X}_S)^* = \overline{\overline{X}_S} =$
 $= (\overline{\overline{X}_0})^{1-s} (\overline{\overline{X}_1})^s$. Пусть X_0 - КВ-пространство. Тогда
 $\overline{\overline{X}_0} = X_0$ и, следовательно, $(\overline{\overline{X}_0})^{1-s} (\overline{\overline{X}_1})^s = (X_0)^{1-s} (\overline{\overline{X}_1})^s$ удовлет-
 воряет условию (A), поэтому можно ещё раз применить следст-
 вие 2.2.10. Получим $(X_S)^{***} = \overline{X_S^{**}} = (\overline{X_0})^{1-s} (\overline{\overline{\overline{X}_1}})^s = (\overline{X_0})^{1-s} (\overline{\overline{\overline{X}_1}})^s =$
 $(\overline{X_0})^{1-s} (\overline{X_1})^s = (X_S)^*$. Следовательно, пространство $(X_S)^*$ (б) -ре-
 флексивно. Но тогда (б) -рефлексивно и X_S . Теорема дока-
 зана.

§ 13. Доказательства теоремы 2.3.4 и утверждения,
 сформулированного в замечании 2.3.3

1. Доказательство утверждения, содер-
 жащегося в замечании 2.3.3. Пусть в пространстве $\mathcal{M}(X)$
 кроме единицы $\mathbb{1} = \mathbb{1}(\mathcal{M}(X))$; фиксирована ещё какая-нибудь еди-
 ница $\mathbb{1}^*$. Пусть F есть вещественная функция вещественной
 переменной, задаваемая формулой $F(\xi) = \xi^p, \xi \in [0, +\infty)$. Тогда в
 обозначениях гл. I § I имеем

$$X_p = \{x \in \mathcal{M}(X) : F_{\mathbb{1}}(|x|) \in X\},$$

$$\|x\|_{X_p} = (\|F_{\mathbb{1}}(|x|)\|_X)^{\frac{1}{p}} \text{ для } x \in X_p.$$

Положим

$$V = \{x \in \mathcal{M}(X) : F_{\mathbb{1}^*}(|x|) \in X\},$$

$$\|x\|_V = (\|F_{\mathbb{1}^*}(|x|)\|_X)^{\frac{1}{p}} \text{ для } x \in V.$$

Нужно показать, что пространства $(X_p, \|\cdot\|_{X_p})$ и $(V, \|\cdot\|_V)$
 алгебраически и порядково изоморфны и изометричны.

Ясно, что существует такая единица $\mathbb{1}^{**}$ в $\mathcal{M}(X)$, что $F_{\mathbb{1}}(x) = F_{\mathbb{1}^{**}}(\mathbb{1}^{**}x)$ для любого $x \in \mathcal{M}(X)_+$, где произведение $\mathbb{1}^{**}x$ понимается по отношению к единице $\mathbb{1}$. Отображение

$$X_p \ni x \longrightarrow \mathbb{1}^{**}x \in V$$

и есть, очевидно, искомый оператор.

2. Д о к а з а т е л ь с т в о Теоремы 2.3.4. Напомним, что $X_p = X^{1-s}Y^s$, где Y есть соответствующее $\mathbb{K}N$ -пространство ограниченных элементов (см. предложение 2.3.2). Выберем произвольно единицы $\mathbb{1}_1$ и $\mathbb{1}_2$ в пространствах $\mathcal{M}(X^*)$ и $\mathcal{M}(Y^*)$, а единицу в $\mathcal{M}((X_p)^*)$ выберем так, чтобы она была подчинена единицам $\mathbb{1}_1$ и $\mathbb{1}_2$. Тогда, отождествляя пространства X^* и $(X_p)^*$ с их образами в $\mathcal{M}(Y^*)$ при канонических реализациях, в силу теоремы 2.2.8 имеем

$$(X_p)^* = (X^*)^{1-s}(Y^*)^s.$$

Так как Y^* есть $\mathbb{K}N$ -пространство, то по следствию 2.2.10 в $(X_p)^*$ выполнено условие (A), поэтому $(X_p)^*$ есть $\mathbb{K}N$ -пространство. Утверждение (a) доказано. Пусть теперь Z есть $\mathbb{K}N$ -пространство ограниченных элементов в $\mathcal{M}(Y^*)$, порождённое единицей $\mathbb{1}_2$. Выберем произвольно единицы в пространствах $\mathcal{M}(X^{**})$, $\mathcal{M}(Y^{**})$, $\mathcal{M}(Z^*)$, а единицу в $\mathcal{M}((X_p)^{**})$ выберем так, чтобы она была подчинена единицам пространств $\mathcal{M}(X^{**})$ и $\mathcal{M}(Y^{**})$. Отождествив пространства X^{**} , Y^{**} , $(X_p)^{**}$ с их образами в $\mathcal{M}(Z^*)$ при канонических реализациях, получим $(X_p)^{**} = (X^{**})^{1-s}(Y^{**})^s$, то есть $(X_p)^{**} = (X^{**})^{1-s}(\overline{Y^*})^s$, ибо $Y^{**} = \overline{Y^*}$. Пусть N есть компонен-

та в $\mathcal{M}(Z^*)$, порождённая $\overline{Y^*}$. В силу предложения 1.2.29 $X^{**} \cap N = \overline{X^*}$ и $\overline{X^*}$ есть фундамент в N . Поэтому $(X^{**})^{1-s}(\overline{Y^*})^s = (\overline{X^*})^{1-s}(\overline{Y^*})^s$, то есть $(X_\rho)^{**} = (\overline{X^*})^{1-s}(\overline{Y^*})^s$. Применяя предложение 2.3.2, видим, что $(\overline{X^*})^{1-s}(\overline{Y^*})^s$ алгебраически и порядково изоморфно и изометрично пространству $(\overline{X^*})_\rho$, ибо $\overline{Y^*}$ есть $\mathbb{K}N$ -пространство ограниченных элементов и компоненты в $\mathcal{M}(Z^*)$, порождённые $\overline{X^*}$ и $\overline{Y^*}$, совпадают. Утверждение (в) доказано. Докажем (б). Так как $(X_\rho)^*$ есть $\mathbb{K}B$ -пространство, то X_ρ (б)-рефлексивно тогда и только тогда, когда X_ρ есть $\mathbb{K}B$ -пространство (теорема Огасавара, Вулих [6], стр. 294). Остаётся проверить, что X является $\mathbb{K}B$ -пространством тогда и только тогда, когда X_ρ есть $\mathbb{K}B$ -пространство. Это вытекает из следующих двух очевидных фактов: 1) непрерывность нормы в X эквивалентна непрерывности нормы в X_ρ ; 2) монотонная полнота нормы в X эквивалентна монотонной полноте нормы в X_ρ .

Теорема 2.3.4 доказана.

§ 14. Доказательство теоремы 2.4.1

На протяжении всего параграфа полагаем $Z = X_0 \cap X_1$ и считаем, что Z плотно в X_0 и X_1 по соответствующим нормам. Напомним, что Z и $X_0 + X_1$ суть банаховы $\mathbb{K}N$ -пространства, если нормы на них задать формулами (1.6) и (1.7).

Заметим, что Z плотно по норме в $X_0 + X_1$. Действительно, пусть $x \in X_0 + X_1$ — произвольный. Тогда существуют $x_0 \in X_0, x_1 \in X_1$ такие, что $x = x_0 + x_1$. Для $i=0,1$ найдут-

ся последовательности $\{z_n^{(i)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ в Z , такие что $\|x_i - z_n^{(i)}\|_{X_i} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Положим $z_n = z_n^{(0)} + z_n^{(1)}$. Тогда

$$\|x - z_n\|_{X_0 + X_1} \leq \|x_0 - z_n^{(0)}\|_{X_0} + \|x_1 - z_n^{(1)}\|_{X_1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

На протяжении всего параграфа фиксируем $\varphi \in \mathcal{N}_2^0$ и полагаем $x = \varphi(x_0, x_1)$.

1. Обозначим (только в этом пункте) через $\mathcal{N}, \mathcal{N}_0, \mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2$ операторы сужения:

$$\mathcal{N}F = F|_Z, \quad F \in X_{\min}^*$$

$$\mathcal{N}_i f = f|_Z, \quad f \in X_i^* \quad (i=0,1),$$

$$\mathcal{N}_2 f = f|_Z, \quad f \in (X_0 + X_1)^*$$

Ясно, что $\mathcal{N}, \mathcal{N}_0, \mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2$ суть изоморфизмы пространств $X_{\min}^*, X_0^*, X_1^*, (X_0 + X_1)^*$ на соответствующие идеалы в Z^* .

Лемма 2.14.1. Пусть $f_i \in (X_i)_+^*$ ($i=0,1$), $H = \hat{\varphi}(\mathcal{N}_0 f_0, \mathcal{N}_1 f_1)$. Тогда $H \in \mathcal{N}(X_{\min}^*)$ и для $F = \mathcal{N}^{-1}H$ справедливо

$$\|F\|_{X^*} \leq \|f_0\|_{X_0^*} + \|f_1\|_{X_1^*}. \quad (14.1)$$

Кроме того,

$$F(\varphi(u_0, u_1)) \leq f_0(u_0) + f_1(u_1) \quad \text{при всех } u_i \in (X_i)_+ \quad (i=0,1). \quad (14.2)$$

Доказательство. Возьмем произвольные $z \in Z_+$, $u_i \in (X_i)_+$ ($i=0,1$), такие что $0 < z \leq \varphi(u_0, u_1)$. Положим $w_i = z \vee u_i$ ($i=0,1$). До конца параграфа будем (для удобства) считать, что $W = C_\infty(Q)$, $\mathbb{1}(W) = \chi_Q$, где $Q = Q(W)$ — соответствующий экстремальный бисомпакт. Найдутся $\mu \in \text{csa}^+(Q)$, $\ell_i \in L^1(\mu)_+$, такие что

$$f_i(x) = \int_Q (x w_i^{-1}) l_i d\mu, \quad x \in W_{w_i} \quad (i=0,1). \quad (14.3)$$

Здесь $x w_i^{-1}$ есть произведение в смысле умножения элементов K -пространства W , а $(x w_i^{-1}) l_i$ есть уже обычное произведение функции $x w_i^{-1} \in L^\infty(\mu)$ на функцию $l_i \in L^1(\mu)$. Из (14.3) следует, что

$$f_i(x) = \int_Q (x z^{-1})(z w_i^{-1}) l_i d\mu, \quad x \in Z_z \quad (i=0,1). \quad (14.4)$$

В силу леммы 2.9.1 имеем

$$H|_{Z_z} = \hat{\varphi}(\pi_0 f_0|_{Z_z}, \pi_1 f_1|_{Z_z}), \quad \text{то есть } H|_{Z_z} = \hat{\varphi}(f_0|_{Z_z}, f_1|_{Z_z}), \quad \text{откуда}$$

$$H(x) = \int_Q (x z^{-1}) \hat{\varphi}((z w_0^{-1}) l_0, (z w_1^{-1}) l_1) d\mu, \quad x \in Z_z. \quad (14.5)$$

Из (14.5) находим

$$H(z) = \int_{Q_z} \hat{\varphi}(z w_0^{-1}) l_0, (z w_1^{-1}) l_1) d\mu. \quad (14.6)$$

Далее нам удобно считать, что l_0 и l_1 суть не классы (попарно эквивалентных) функции, а представители этих классов, определённые на всём Q . Положим $m = \hat{\varphi}((z w_0^{-1}) l_0, (z w_1^{-1}) l_1)$, то есть $m(t) = \hat{\varphi}((z w_0^{-1})(t) \cdot l_0(t), (z w_1^{-1})(t) \cdot l_1(t))$ при $t \in Q$. Положим также $G = \{s \in Q_z : 0 < z(s) \leq w_i(s) < +\infty \quad (i=0,1)\}$.

Ясно, что G открыто и плотно в Q_z . Фиксируем произвольную точку $t \in Q_z$ и полагаем

$$m_t(s) = \hat{\varphi}((z w_0^{-1})(s) \cdot l_0(t), (z w_1^{-1})(s) \cdot l_1(t)), \quad s \in G. \quad (14.7)$$

Так как $(z w_i^{-1})(s) = \frac{z(s)}{w_i(s)} \leq \frac{\varphi(u_0(s), u_1(s))}{w_i(s)}$, то $m_\varepsilon(s) \leq$
 $\leq \varphi(u_0(s), u_1(s)) \hat{\varphi}\left(\frac{l_0(t)}{w_0(s)}, \frac{l_1(t)}{w_1(s)}\right) \leq \frac{u_0(s)l_0(t)}{w_0(s)} + \frac{u_1(s)l_1(t)}{w_1(s)}$ при $s \in G$.

Следовательно, $m(t) = \lim_{\substack{s \rightarrow t \\ s \in G}} m_\varepsilon(s) \leq (u_0 w_0^{-1})(t) \cdot l_0(t) + (u_1 w_1^{-1})(t) \cdot l_1(t)$.

Теперь из (14.6) получаем $H(z) = \int_{Q_z} m d\mu \leq \int_{Q_z} (u_0 w_0^{-1}) l_0 d\mu +$
 $+ \int_{Q_z} (u_1 w_1^{-1}) l_1 d\mu$, то есть $H(z) \leq f_0(u_0) + f_1(u_1)$ (см. (14.3)).
 Итак, для любых $u_i \in (X_i)_+$ ($i=0,1$) имеем

$$\sup \{H(z) : z \in Z, 0 \leq z \leq \varphi(u_0, u_1)\} \leq f_0(u_0) + f_1(u_1). \quad (14.8)$$

Из (14.8) немедленно следует, что $H \in \mathfrak{F}(X_{\min}^*)$ и справедливо (14.2). Возьмём теперь произвольный $x \in X_+$, $\|x\|_X < 1$.
 Найдутся $u_i \in (X_i)_+$ ($i=0,1$) , такие что $\|u_i\|_{X_i} \leq 1$ и $x \leq \varphi(u_0, u_1)$. Имеем $F(x) \leq F(\varphi(u_0, u_1)) \leq f_0(u_0) + f_1(u_1) \leq$
 $\leq \|f_0\|_{X_0^*} + \|f_1\|_{X_1^*}$. Лемма доказана.

О п р е д е л е н и е 2.14.2. Для любых $f_i \in (X_i)_+^*$ ($i=0,1$) полагаем

$$\hat{\varphi}(f_0, f_1) \stackrel{\text{def}}{=} \mathfrak{A}^{-1} \hat{\varphi}(\mathfrak{A}_0 f_0, \mathfrak{A}_1 f_1).$$

Л е м м а 2.14.3. Для любых $f_i \in (X_i)_+^*$ ($i=0,1$) найдётся последовательность $F_n \in X_{\min}^*$, такая что $0 \leq F_n \leq \hat{\varphi}(f_0, f_1)$, причём $\mathfrak{A} F_n \in \mathfrak{A}_2((X_0 + X_1)^*)$ для всех n (то есть каждый F_n допускает линейное положительное распространение на $X_0 + X_1$).

Д о к а з а т е л ь с т в о . Положим $q = \mathfrak{A}_0 f_0 \wedge \mathfrak{A}_1 f_1$. Покажем, что q допускает линейное положительное распростра-

нение на $X_0 + X_1$. Действительно, пусть $y = x_0 + x_1$, где $x_i \in (X_i)_+$ ($i=0,1$). Тогда $\sup\{q(z) : z \in Z, 0 \leq z \leq y\} = \sup\{q(x'_0) + q(x'_1) : x'_i \in Z, 0 \leq x'_i \leq x_i (i=0,1)\} \leq f_0(x_0) + f_1(x_1) < +\infty$. Тем самым $q \in \mathfrak{A}_2((X_0 + X_1)^*)$ и полагая $q \in \mathfrak{A}(X_{\min}^*)$. Положим $h = \mathfrak{A}^{-1}(q)$.

$$F_n = \hat{\Psi}(f_0, f_1) \wedge n h \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Заметим, что $F_n \leq n h$, поэтому $\mathfrak{A} F_n \leq n \mathfrak{A} h = n q$. Откуда $\mathfrak{A} F_n \in \mathfrak{A}_2((X_0 + X_1)^*)$. Заметим, что $\mathfrak{A} F_n =$

$= \mathfrak{A} \hat{\Psi}(f_0, f_1) \wedge \mathfrak{A} n h = (\hat{\Psi}(\mathfrak{A}_0 f_0, \mathfrak{A}_1 f_1) \wedge n q) \uparrow \hat{\Psi}(\mathfrak{A}_0 f_0, \mathfrak{A}_1 f_1) = \mathfrak{A} \hat{\Psi}(f_0, f_1)$. Ибо след $\hat{\Psi}(\mathfrak{A}_0 f_0, \mathfrak{A}_1 f_1)$ очевидно, равен инфимуму следов $\mathfrak{A}_0 f_0$ и $\mathfrak{A}_1 f_1$, а указанный инфимум совпадает со следом q . Остаётся заметить, что из $\mathfrak{A} F_n \uparrow \mathfrak{A} \hat{\Psi}(f_0, f_1)$ следует, что $F_n \uparrow \hat{\Psi}(f_0, f_1)$, ибо \mathfrak{A} есть изоморфизм X_{\min}^* на некоторый идеал в Z^* . Лемма доказана.

Л е м м а 2.14.4. Пусть $f_i \in (X_i)_+^* (i=0,1), z \in Z_+, \alpha \in (0, +\infty)$.

Пусть

$$(u_i \in (X_i)_+ (i=0,1), \Psi(u_0, u_1) \geq z) \Rightarrow (f_0(u_0) + f_1(u_1) \geq \alpha). \quad (14.9)$$

Тогда

$$\hat{\Psi}(f_0, f_1)(z) \geq \alpha.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о . Положим $q_i = f_i|_{Z_z} (i=0,1)$.

Тогда из (14.9), очевидно, следует, что

$$(u_0, u_1 \in (Z_z)_+, \Psi(u_0, u_1) \geq z) \Rightarrow (q_0(u_0) + q_1(u_1) \geq \alpha). \quad (14.10)$$

Из (14.10) и леммы 2.8.6 вытекает, что $\hat{\Psi}(q_0, q_1)(z) \geq \alpha$. Но

$\hat{\Psi}(q_0, q_1) = \hat{\Psi}(\mathfrak{A}_0 f_0, \mathfrak{A}_1 f_1)|_{Z_z}$ в силу леммы 2.9.1. Тем самым $\hat{\Psi}(\mathfrak{A}_0 f_0, \mathfrak{A}_1 f_1)(z) \geq \alpha$, то есть $\hat{\Psi}(f_0, f_1)(z) \geq \alpha$. Лемма доказана.

2. Далее будем отождествлять пространства $X_{min}^*, X_0^*, X_1^*, (X_0 + X_1)^*$ с их образами $\mathcal{N}(X_{min}^*), \mathcal{N}_0(X_0^*), \mathcal{N}_1(X_1^*), \mathcal{N}_2((X_0 + X_1)^*)$, соответственно. Изольвим, что пространство $\hat{\mathcal{F}}(X_0^*, X_1^*)$ состоит из всех $F \in \mathcal{Z}^*$, таких что

$$|F| \leq \lambda \hat{\mathcal{F}}(\mathcal{f}_0, \mathcal{f}_1) \quad (14.11)$$

для некоторого $\lambda \in [0, +\infty)$ и каких-нибудь $\mathcal{f}_i \in (X_i)_+^*$ с $\|\mathcal{f}_i\|_{X_i^*} \leq 1$ ($i=0,1$). При этом $\|F\|_{\hat{\mathcal{F}}(X_0^*, X_1^*)}$ есть инфимум всех возможных λ в (14.11). Уже установлено (лемма 2.14.1), что $\hat{\mathcal{F}}(X_0^*, X_1^*) \subset X_{min}^*$.

Л е м м а 2.14.5. Для любого $F \in \hat{\mathcal{F}}(X_0^*, X_1^*)$ справедливо

$$\|F\|_{X^*} \leq 2 \|F\|_{\hat{\mathcal{F}}(X_0^*, X_1^*)}. \quad (14.12)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о . Пусть $\|F\|_{\hat{\mathcal{F}}(X_0^*, X_1^*)} = \lambda$. Для любого $\varepsilon > 0$ найдутся $\mathcal{f}_i \in (X_i)_+^*, \|\mathcal{f}_i\|_{X_i^*} \leq 1$ ($i=0,1$), такие что $|F| \leq (\lambda + \varepsilon) \hat{\mathcal{F}}(\mathcal{f}_0, \mathcal{f}_1)$. Теперь в силу леммы 2.14.1 имеем $\|F\|_{X^*} \leq (\lambda + \varepsilon) \|\hat{\mathcal{F}}(\mathcal{f}_0, \mathcal{f}_1)\|_{X^*} \leq (\lambda + \varepsilon)(\|\mathcal{f}_0\|_{X_0^*} + \|\mathcal{f}_1\|_{X_1^*}) \leq 2(\lambda + \varepsilon)$. Итак, $\|F\|_{X^*} \leq 2\lambda$. Лемма доказана.

3. До конца параграфа полагаем $E = X_0 \times X_1$, причём

$$\|(x_0, x_1)\|_E = \|x_0\|_{X_0} + \|x_1\|_{X_1}, (x_0, x_1) \in E.$$

Тогда естественным образом $E^* = X_0^* \times X_1^*$, причём

$$\|(\mathcal{f}_0, \mathcal{f}_1)\|_{E^*} = \max\{\|\mathcal{f}_0\|_{X_0^*}, \|\mathcal{f}_1\|_{X_1^*}\}, (\mathcal{f}_0, \mathcal{f}_1) \in E^*.$$

Так как $Z \subset X_0, Z \subset X_1$, то, естественным образом, $Z \times Z \subset E$. Положим $\mathcal{C} = \mathcal{C}(E^*, Z \times Z)$. Заметим, что топология \mathcal{C} слабее

слабой * топологии $\hat{b}(E^*, E)$, тем не менее, она тоже хаусдорфова, ибо Z плотно по норме в X_0 и X_1 .

Л е м м а 2.14.6. Пусть $F \in \hat{\Phi}(X_0^*, X_1^*)_+$. Тогда множество

$$H = \{(\rho_0, \rho_1) \in E_+^* : \hat{\Psi}(\rho_0, \rho_1) \geq F\} \quad (14.13)$$

непусто, выпукло и \mathcal{C} - замкнуто.

Доказательство. То что $H \neq \emptyset$ - очевидно. Пусть $(\rho_0, \rho_1), (\rho'_0, \rho'_1) \in H, \lambda \in (0, 1)$. Тогда $\hat{\Psi}(\lambda \rho_0 + (1-\lambda)\rho'_0, \lambda \rho_1 + (1-\lambda)\rho'_1) \geq \lambda \hat{\Psi}(\rho_0, \rho_1) + (1-\lambda)\hat{\Psi}(\rho'_0, \rho'_1) \geq F$ в силу выпуклости функции $\hat{\Psi}$. тем самым, H - выпукло. Пусть $\{(\rho_0^\alpha, \rho_1^\alpha) : \alpha \in A\}$ - направление в H , которое \mathcal{C} - сходится к некоторому (ρ_0, ρ_1) . Докажем, что $(\rho_0, \rho_1) \in H$. Для этого достаточно установить, что

$$\hat{\Psi}(\rho_0, \rho_1)(z) \geq F(z) \text{ при всех } z \in Z_+ \quad (14.14)$$

Фиксируем произвольный $z \in Z_+$. Положим $q_i^\alpha = \rho_i^\alpha|_{Z_z}, q_i = \rho_i|_{Z_z}$. $q = F|_{Z_z}$ ($i=0,1$). Тогда $\hat{\Psi}(q_0^\alpha, q_1^\alpha) = \hat{\Psi}(\rho_0^\alpha, \rho_1^\alpha)|_{Z_z}, \hat{\Psi}(q_0, q_1) = \hat{\Psi}(\rho_0, \rho_1)|_{Z_z}$ в силу леммы 2.9.1. Ясно, что $\hat{\Psi}(q_0^\alpha, q_1^\alpha) \geq q$ при всех $\alpha \in A$ и что $q_i^\alpha \rightarrow q_i$ ($i=0,1$) в топологии $\hat{b}(Z_z^*, Z_z)$. Поэтому $\hat{\Psi}(q_0, q_1) \geq q$ в силу леммы 2.8.II. Отсюда $\hat{\Psi}(\rho_0, \rho_1)(z) \geq F(z)$ то есть $\hat{\Psi}(\rho_0, \rho_1)(z) \geq F(z)$. Лемма доказана.

Л е м м а 2.14.7. Норма $\|\cdot\|_{\hat{\Psi}(X_0^*, X_1^*)}$ на пространстве $\hat{\Psi}(X_0^*, X_1^*)$ универсально полунепрерывна и универсально монотонно полна.

Доказательство. Пусть направление $\{F_\alpha : \alpha \in A\}$ в $\hat{\Phi}(x_0^*, x_1^*)$ таково, что $0 \leq F_\alpha \uparrow$ и $\sup_{\alpha \in A} \|F_\alpha\|_{\hat{\Phi}(x_0^*, x_1^*)} = \alpha < +\infty$. Нужно показать, что существует $F \in \hat{\Phi}(x_0^*, x_1^*)$ такой что

$F_\alpha \uparrow F$ и $\|F\|_{\hat{\Phi}(x_0^*, x_1^*)} = \alpha$. Возьмём произвольное $\varepsilon > 0$ и для любого $\alpha \in A$ положим $N_\alpha = \{(\beta_0, \beta_1) \in E_+^* : F_\alpha \leq (\alpha + \varepsilon)\hat{\Phi}(\beta_0, \beta_1) \text{ и } \|\beta_i\|_{x_i^*} \leq 1 \ (i = 0, 1)\}$. Из леммы 2.14.6 следует, что N_α

\mathcal{T} -компактно (как пересечение \mathcal{T} -замкнутой и \mathcal{T} -компактного множества). Очевидно, что $N_\alpha \neq \emptyset$ и что $(\alpha_1 \leq \alpha_2, \text{ где } \alpha_1, \alpha_2 \in A) \Rightarrow (N_{\alpha_1} \supset N_{\alpha_2})$. Итак, система множеств $\{N_\alpha : \alpha \in A\}$ -

центрирована и состоит из \mathcal{T} -компактных множеств. Поэтому $\bigcap_{\alpha \in A} N_\alpha \neq \emptyset$. Пусть $(\beta_0, \beta_1) \in \bigcap_{\alpha \in A} N_\alpha$. Тогда $F_\alpha \leq (\alpha + \varepsilon)\hat{\Phi}(\beta_0, \beta_1)$ при всех $\alpha \in A$. Поэтому существует $\sup_{\alpha \in A} F_\alpha = F \in \hat{\Phi}(x_0^*, x_1^*)$ причём $\|F\|_{\hat{\Phi}(x_0^*, x_1^*)} \leq \alpha + \varepsilon$. Остается заметить, что $\varepsilon > 0$ - произвольно. Лемма доказана.

Л е м м а 2.14.8. Пусть $F \in \hat{\Phi}(x_0^*, x_1^*)_+$, $\|F\|_{\hat{\Phi}(x_0^*, x_1^*)} = 1$ и пусть $\alpha \in (0, 1)$. Тогда найдутся $z_0, z_1 \in Z_+$ такие что $\|z_0\|_{x_0^*} + \|z_1\|_{x_1^*} = 1$ и $(\beta_0 \in (x_0)_+^*, \beta_1 \in (x_1)_+^*, \hat{\Phi}(\beta_0, \beta_1) \geq F) \Rightarrow (\beta_0(z_0) + \beta_1(z_1) \geq \alpha)$. (14.15)

Доказательство. Пусть $N = \{(\beta_0, \beta_1) \in E_+^* : \hat{\Phi}(\beta_0, \beta_1) \geq F\}$, $V_\alpha = \{(\beta_0, \beta_1) \in E_+^* : \|(\beta_0, \beta_1)\|_{E_+^*} \leq \alpha\}$. Возьмём произвольный $(\beta_0, \beta_1) \in N$. Тогда, очевидно, $\|(\beta_0, \beta_1)\|_{E_+^*} = \max\{\|\beta_0\|_{x_0^*}, \|\beta_1\|_{x_1^*}\} \geq 1$. Тем самым $N \cap V_\alpha = \emptyset$. Так как N \mathcal{T} -замкнуто (лемма 2.14.6), V_α \mathcal{T} -компактно и эти множества не пересекаются, то они отделены \mathcal{T} -замкнутой гиперплоскостью. Таким образом, существуют $x_0, x_1 \in Z$,

также что $\inf_{(f_0, f_1) \in H} \{f_0(x_0) + f_1(x_1)\} \geq \sup_{(f_0, f_1) \in V_0} \{f_0(x_0) + f_1(x_1)\} = 0$.
 Остаётся положить $z_i = |x_i|$ ($i = 0, 1$). Лемма доказана.

4. Л е м м а 2.14.9. Для любого $F \in \hat{\Phi}(x_0^*, x_1^*)$ справедливо

$$\|F\|_{\hat{\Phi}(x_0^*, x_1^*)} \leq \|F\|_{X^*}. \quad (14.16)$$

Доказательство. Можно считать, что $F \geq 0$ и (в силу лемм 2.14.7 и 2.14.3), что F допускает линейное положительное распространение на $X_0 + X_1$, которое будет обозначаться той же буквой F . Наконец, можно считать, что

$\|F\|_{\hat{\Phi}(x_0^*, x_1^*)} = 1$. Фиксируем произвольные $\alpha, \varepsilon \in (0, 1)$.
 Найдём $z_0, z_1 \in Z_+$, такие что справедливо (14.15) и $\|z_0\|_{X_0} + \|z_1\|_{X_1} = 1$. Положим $u = z_0 + \varepsilon z_1, v = z_1 + \varepsilon z_0$. Заметим, что $(u) = (v)$. Пусть N -функции $M(\xi)$ и $N(\xi)$ из (1.4) и (1.5). Применим лемму 2.7.7, положив

$$z = M'(M^{-1}(uv^{-1})), h = z^{-1}, k = N(z)z^{-1}. \quad (14.17)$$

Тогда $\varphi(u, v) = hu + kv, \hat{\varphi}(h, k) = \chi_{Q_u}$, где Q_u - открыто-замкнутый носитель элемента u . Заметим, что $Q_u = Q_v = Q_h = Q_k = Q_z$. Так как, очевидно, $\varepsilon \chi_{Q_u} \leq uv^{-1} \leq \frac{1}{\varepsilon} \chi_{Q_u}$, то существуют $c_1, c_2 \in (0, +\infty)$, такие что

$$c_1 \chi_{Q_u} \leq h \leq c_2 \chi_{Q_u}, c_1 \chi_{Q_u} \leq k \leq c_2 \chi_{Q_u}. \quad (14.18)$$

Положим теперь для $x \in X_0 + X_1$

$$f_0(x) = F(hx) + F(wx),$$

$$f_1(x) = F(kx) + F(wx),$$

где $\omega = \frac{\chi_Q - \chi_{Q_u}}{\hat{\varphi}(1,1)}$. Покажем, что $\hat{\varphi}(f_0, f_1) = F$, то есть что $\hat{\varphi}(f_0, f_1)(z) = F(z)$ при всех $z \in Z$. Фиксируем произвольное $z \in Z_+$. Пусть $\mu \in \mathcal{C}A^+(Q)$ такова, что $F(x) = \int_Q x z^{-1} d\mu$ при $x \in Z_z$. Тогда

$$\begin{cases} f_0(x) = \int_Q x z^{-1} (h+\omega) d\mu \\ f_1(x) = \int_Q x z^{-1} (k+\omega) d\mu \end{cases} \text{ при } x \in Z_z.$$

Отсюда $\hat{\varphi}(f_0, f_1)(x) = \int_Q x z^{-1} \hat{\varphi}(h+\omega, k+\omega) d\mu$ при $x \in Z_z$. Но $h\omega = k\omega = 0$, следовательно, $\hat{\varphi}(h+\omega, k+\omega) = \hat{\varphi}(h, k) + \hat{\varphi}(\omega, \omega) = \chi_{Q_u} + \hat{\varphi}(1,1)\omega = \chi_{Q_u} + (\chi_Q - \chi_{Q_u}) = \chi_Q$. Тем самым $\hat{\varphi}(f_0, f_1)(x) = \int_Q x z^{-1} d\mu$ при $x \in Z_z$, поэтому $\hat{\varphi}(f_0, f_1)(z) = \int_Q d\mu = F(z)$. Итак, $\hat{\varphi}(f_0, f_1) = F$. Теперь в силу (14.15) имеем $f_0(z_0) + f_1(z_1) \geq \alpha$. Тогда и полагая $f_0(u) + f_1(v) \geq \alpha$, то есть $F(hu + kv) \geq \alpha$ (ибо $\omega u = \omega v = 0$), то есть $F(\varphi(u, v)) \geq \alpha$.

Обозначим $\delta = \max\{\|z_0\|_{x_1}, \|z_1\|_{x_0}\}$. Тогда $\|u\|_{x_0} \leq \|z_0\|_{x_0} + \varepsilon \|z_1\|_{x_0} \leq 1 + \varepsilon\delta$, $\|v\|_{x_1} \leq \|z_1\|_{x_1} + \varepsilon \|z_0\|_{x_1} \leq 1 + \varepsilon\delta$. Следовательно, $\|\varphi(u, v)\|_{x_0} \leq 1 + \varepsilon\delta$, откуда $\|F\|_{x^*} \geq \frac{\alpha}{1 + \varepsilon\delta}$. Так как δ не зависит от взятого ε , то имеем $\|F\|_{x^*} \geq \alpha$. Тогда в силу произвольности $\alpha \in (0, 1)$ получаем $\|F\|_{x^*} \geq 1$, то есть $\|F\|_{x^*} \geq \|F\|_{\hat{\varphi}(x_0^*, x_1^*)}$. Лемма доказана.

Л е м м а 2.14.10. Пространство $\hat{\varphi}(x_0^*, x_1^*)$ есть компонента в X_{\min}^* , причём

$$\|F\|_{\hat{\varphi}(x_0^*, x_1^*)} \leq \|F\|_{x^*} \leq 2 \|F\|_{\hat{\varphi}(x_0^*, x_1^*)} \text{ для всех } F \in \hat{\varphi}(x_0^*, x_1^*). \quad (14.19)$$

Доказательство. Утверждение (14.19) уже установлено, см. лемма 2.14.5 и 2.14.9. Уже установлено (лемма 2.14.1), что $\hat{\Phi}(x_0^*, x_1^*)$ есть идеал в X_{\min}^* . Пусть направление $\{F_\alpha : \alpha \in A\}$ в $\hat{\Phi}(x_0^*, x_1^*)$ таково, что $0 \in F_\alpha \uparrow F \in X_{\min}^*$. Покажем, что $F \in \hat{\Phi}(x_0^*, x_1^*)$. Из (14.19) следует, что $\sup_{\alpha \in A} \|F_\alpha\|_{\hat{\Phi}(x_0^*, x_1^*)} \leq \|F\|_{X^*} < +\infty$. Поэтому в силу леммы 2.14.7 существует $\sup_{\alpha \in A} F_\alpha \in \hat{\Phi}(x_0^*, x_1^*)$. Это и значит, что $F \in \hat{\Phi}(x_0^*, x_1^*)$. Лемма доказана.

5. Л е м м а 2.14.11. $\hat{\Phi}(x_0^*, x_1^*) = X_{\min}^*$ по запасу элементов.

Доказательство. Допустим противное. Тогда найдутся $q \in (x_{\min}^*)_+$ и $z \in Z_+$, такие что $q(z) > 1$ и $q \notin \hat{\Phi}(x_0^*, x_1^*)$. Пусть A есть множество всех $\alpha = (n, f)$, где $n \in \mathbb{N}$ и $f \in \hat{\Phi}(x_0^*, x_1^*)_+$. Для $\alpha_1 = (n_1, f_1), \alpha_2 = (n_2, f_2) \in A$ полагаем $(\alpha_1 \preceq \alpha_2) \iff (n_1 \leq n_2 \text{ и } f_1 \leq f_2)$. По каждому $\alpha = (n, f) \in A$ найдутся $y_\alpha, z_\alpha \in Z_+$, такие что $y_\alpha + z_\alpha = z, q(y_\alpha) + f(z_\alpha) < \min\{q(z) - 1, \frac{1}{n}\}$. Указанные y_α, z_α существуют в силу того, что $f \wedge q = 0$. Тогда $f(z_\alpha) < \frac{1}{n}, q(z_\alpha) = q(z) - q(y_\alpha) \geq q(z) - (q(z) - 1) = 1$. Таким образом, направление $\{z_\alpha : \alpha \in A\}$ удовлетворяет следующим условиям:

$$f(z_\alpha) \rightarrow 0 \text{ для любого } f \in \hat{\Phi}(x_0^*, x_1^*), \quad (14.20)$$

$$q(z_\alpha) \geq 1 \text{ для любого } \alpha \in A. \quad (14.21)$$

Обозначим через B выпуклую оболочку множества $\{z_\alpha : \alpha \in A\}$ и положим $\delta = \inf\{\|z\|_X : z \in B\}$. Ясно, что $\delta > 0$, ибо $q(z) \geq 1$ для любого $z \in B$. Положим $H = \{(u_0, u_1) \in E_+ :$

существует $z \in B$, такой что $\varphi(u_0, u_1) \geq z$ } . Здесь E означает то же, что в начале пункта 3 этого параграфа. Множество H , очевидно, не пусто, покажем, что оно выпукло. Действительно, пусть $(u_0, u_1), (u'_0, u'_1) \in H, \varphi(u_0, u_1) \geq z \in B, \varphi(u'_0, u'_1) \geq z' \in B$. Тогда при любом $\lambda \in (0, 1)$ имеем $\varphi(\lambda u_0 + (1-\lambda)u'_0, \lambda u_1 + (1-\lambda)u'_1) \geq \lambda \varphi(u_0, u_1) + (1-\lambda)\varphi(u'_0, u'_1) \geq \lambda z + (1-\lambda)z' \in B$. Тем самым, H - выпукло. Заметим, что $\|(u_0, u_1)\|_E \geq \delta$ для любого $(u_0, u_1) \in H$. Действительно, если $(u_0, u_1) \in H$, то $\|\varphi(u_0, u_1)\|_X \geq \delta$. откуда $\|(u_0, u_1)\|_E = \|u_0\|_{X_0} + \|u_1\|_{X_1} \geq \max\{\|u_0\|_{X_0}, \|u_1\|_{X_1}\} \geq \delta$. Так как множество H выпукло и $\|(u_0, u_1)\|_E \geq \delta > 0$ при всех $(u_0, u_1) \in H$, то H строго отделимо от точки $(0, 0) \in E$ гиперплоскостью. Поэтому существуют $f_i \in (X_i)^*$ ($i=0, 1$) и $c \in (0, +\infty)$, такие что

$$((u_0, u_1) \in H) \implies (f_0(u_0) + f_1(u_1) \geq c).$$

Следовательно, для любого $\alpha \in A$ справедливо

$$(u_0 \in (X_0)_+, u_1 \in (X_1)_+, \varphi(u_0, u_1) \geq z_\alpha) \implies (f_0(u_0) + f_1(u_1) \geq c),$$

откуда и подалвно

$$(u_0, u_1 \in Z_+, \varphi(u_0, u_1) \geq z_\alpha) \implies (f_0(u_0) + f_1(u_1) \geq c),$$

откуда и подалвно

$$(u_0, u_1 \in (Z_{z_\alpha})_+, \varphi(u_0, u_1) \geq z_\alpha) \implies (f_0(u_0) + f_1(u_1) \geq c),$$

откуда $\hat{\varphi}(f_0, f_1)(z_\alpha) \geq c$ в силу леммы 2.8.6 и леммы 2.9.1.

Итак, $\hat{\varphi}(f_0, f_1)(z_\alpha) \geq c > 0$ при всех $\alpha \in A$. Это противоречит (14.20). Лемма доказана.

6. Из лемм 2.14.10 и 2.14.11 следует, что $\hat{\varphi}(x_0^*, x_1^*) = X_{\min}^*$ по запасу элементов и

$$\|F\|_{\hat{\varphi}(x_0^*, x_1^*)} \leq \|F\|_{X^*} \leq 2 \|F\|_{\hat{\varphi}(x_0^*, x_1^*)} \quad \text{при всех } F \in X_{\min}^*.$$

Осталось лишь доказать следующую лемму.

Лемма 2.14.12. Пусть N -функции $M(\xi)$ и $N(\xi)$ из (1.4) и (1.5) удовлетворяют Δ_2 -условию при всех значениях аргумента. Тогда $X_0 \cap X_1$ плотно по норме в X .

Доказательство. Пусть $z \in X$ - произвольный. Найдутся $x \in (X_0)_+$, $y \in (X_1)_+$ такие что $z = \varphi(x, y)$. В силу леммы 2.7.8 найдутся $x_n, y_n \in X_0 \cap X_1$ такие что $0 \leq x_n \uparrow x$, $0 \leq y_n \uparrow y$, $\|x - x_n\|_{X_0} \rightarrow 0$, $\|y - y_n\|_{X_1} \rightarrow 0$. Положим $z_n = \varphi(x_n, y_n)$. Ясно, что $z_n \in X_0 \cap X_1$, ибо $z_n \hat{\varphi}(1, 1) = \varphi(x_n, y_n) \hat{\varphi}(1, 1) \leq x_n + y_n$. Осталось показать, что $\|z - z_n\|_X \rightarrow 0$. В силу леммы 2.7.4 для любых $m, n \in \mathbb{N}$ имеем $0 \leq z - z_n = \varphi(x, y) - \varphi(x_n, y_n) = \varphi(x, y) -$

$$\begin{aligned} & - \varphi(x_n, y) + \varphi(x_n, y) - \varphi(x_n, y_n) = \varphi(x - x_n, y) + \varphi(x_n, y - y_n) \leq \varphi\left(\frac{\delta}{2}(x - x_n), \frac{1}{2}y\right) + \varphi\left(\frac{x_n}{2}, \frac{\delta}{2}(y - y_n)\right) \leq \varphi\left(\left(\frac{\delta}{2}\right)^m(x - x_n), \frac{y}{2^m}\right) + \\ & + \varphi\left(\frac{x_n}{2^m}, \left(\frac{\delta}{2}\right)^m(y - y_n)\right). \end{aligned}$$

Возьмём произвольное $\varepsilon > 0$. Подберём $m \in \mathbb{N}$ так, что

$$\|x\|_{X_0} \leq 2^{m-1}\varepsilon, \|y\|_{X_1} \leq 2^{m-1}\varepsilon. \quad \text{Тогда} \quad \left\|\frac{y}{2^m}\right\|_{X_1} \leq \frac{\varepsilon}{2}, \quad \left\|\frac{x_n}{2^m}\right\|_{X_0} \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Так как для достаточно больших n будет $\left\|\left(\frac{\delta}{2}\right)^m(x - x_n)\right\|_{X_0} \leq \frac{\varepsilon}{2}$,

$$\left\|\left(\frac{\delta}{2}\right)^m(y - y_n)\right\|_{X_1} \leq \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{то для этих } n \quad \text{будет} \quad \|z - z_n\|_X \leq \varepsilon.$$

Лемма доказана.

Теорема 2.4.1 доказана.

§ 15. Доказательство теоремы 2.4.2 и пример к замечанию 2.4.3

1. Прежде всего заметим, что при доказательстве теоремы 2.4.2. не умаляя общности, можно считать, что X_0 и X_1 не просто идеалы, но фундаменты в W . Действительно, пусть V есть компонента в W , порождённая $X_0 \cap X_1$. Пусть $Y_i = X_i \cap V$ с нормой, индуцированной из X_i ($i=0,1$). Ясно, что Y_i есть компонента в X_i , причём $\varphi(X_0, X_1) = \varphi(Y_0, Y_1)$, $\|\cdot\|_{\varphi(X_0, X_1)} = \|\cdot\|_{\varphi(Y_0, Y_1)}$. Остаётся заметить, что Y_0 и Y_1 суть фундаменты в V .

2. Итак, считаем, что X_0 и X_1 суть фундаменты в W . Напомним, что в теореме 2.4.2 не требуется, чтобы $X_0 \cap X_1$ было плотно в X_0 или X_1 . Полагаем $X = \varphi(X_0, X_1)$.

$$\|\cdot\|_X = \|\cdot\|_{\varphi(X_0, X_1)}.$$

Л е м м а 2.15.1.

$$(\varphi(X_0, X_1))' = \hat{\varphi}(X'_0, X'_1) \quad \text{по запасу элементов} \quad (15.1)$$

и

$$\|\cdot\|_{\hat{\varphi}(X'_0, X'_1)} \leq \|\cdot\|_{(\varphi(X_0, X_1))'} \leq 2 \|\cdot\|_{\hat{\varphi}(X'_0, X'_1)}. \quad (15.2)$$

Доказательство. Рассмотрим сначала частный случай, когда $Z = X_0 \cap X_1$ плотно в X_0 и X_1 по соответствующим нормам. Считаем, что X_{\min}^*, X_0^*, X_1^* вложены в Z^* так же как в теореме 2.4.1. Ясно, что $\bar{X} = X_{\min}^* \cap \bar{Z}$, $\bar{X}_0 = X_0^* \cap \bar{Z}$, $\bar{X}_1 = X_1^* \cap \bar{Z}$. Теперь (15.1) и (15.2) прямо следуют из теоремы 2.4.1. Общий случай. Обозначим через Y_i замыкание Z в X_i по норме, причём за $\|\cdot\|_{Y_i}$ примем сужение нормы $\|\cdot\|_{X_i}$ на Y_i ($i=0,1$). Так как $Y_0 \cap Y_1$ плотно по норме в Y_i ($i=0,1$).

то по уже доказанному имеем

$$(\varphi(y_0, y_1))' = \hat{\varphi}(y_0', y_1') \quad \text{по запасу элементов} \quad (15.3)$$

и

$$\|\cdot\|_{\hat{\varphi}(y_0', y_1')} \leq \|\cdot\|_{(\varphi(y_0, y_1))'} \leq 2\|\cdot\|_{\hat{\varphi}(y_0', y_1')} \quad (15.4)$$

Заметим, что $(y_i', \|\cdot\|_{y_i'}) = (x_i', \|\cdot\|_{x_i'})$ ($i=0,1$) в силу предложения 0.4.5. Так как $\varphi(\alpha, \beta)\hat{\varphi}(\xi, \eta) \leq \alpha\xi + \beta\eta$ при всех $\xi, \eta, \alpha, \beta \in [0, +\infty)$, то

$$\hat{\varphi}(x_0', x_1') \subset (\varphi(x_0, x_1))' \quad (15.5)$$

Далее, так как $\varphi(y_0, y_1) \subset \varphi(x_0, x_1)$, то $(\varphi(y_0, y_1))' \supset (\varphi(x_0, x_1))' \supset \hat{\varphi}(x_0', x_1') = \hat{\varphi}(y_0', y_1') = (\varphi(y_0, y_1))'$, откуда следует (15.1). Доказываем (15.2). Так как очевидно $\|\eta\|_{\varphi(y_0, y_1)} > \|\eta\|_{\varphi(x_0, x_1)}$ при всех $\eta \in \varphi(y_0, y_1)$, то $\|\cdot\|_{(\varphi(y_0, y_1))'} \leq \|\cdot\|_{(\varphi(x_0, x_1))'}$, откуда $\|\cdot\|_{\hat{\varphi}(y_0', y_1')} \leq \|\cdot\|_{(\varphi(x_0, x_1))'}$ в силу (15.4). Тем самым $\|\cdot\|_{\hat{\varphi}(x_0', x_1')} \leq \|\cdot\|_{(\varphi(x_0, x_1))'}$, то есть левое неравенство из (15.2) справедливо. Докажем правое. Пусть $\rho \in \hat{\varphi}(x_0', x_1')_+$, $\|\rho\|_{\hat{\varphi}(x_0', x_1')} = \lambda$. Возьмём произвольный $x \in \varphi(x_0, x_1)_+$, такой что $\|x\|_{\varphi(x_0, x_1)} \leq 1$. Найдутся $u_i \in (x_i)_+$, такие что $\|u_i\|_{x_i} \leq 1$ ($i=0,1$) и $x \in \varphi(u_0, u_1)$. Для любого $\varepsilon > 0$ найдутся $u_i' \in (x_i)_+$, такие что $\|u_i'\|_{x_i'} \leq 1$ ($i=0,1$) и $\rho \in (\lambda + \varepsilon)\hat{\varphi}(u_0', u_1')$. Теперь имеем $J(x\rho) \leq (\lambda + \varepsilon)J(\varphi(u_0, u_1)\hat{\varphi}(u_0', u_1')) \leq (\lambda + \varepsilon)J(u_0, u_0' + u_1, u_1') \leq 2(\lambda + \varepsilon)$. Тем самым $J(x\rho) \leq 2\lambda$ в силу произвольности $\varepsilon > 0$. Наконец, $\|\rho\|_{(\varphi(x_0, x_1))'} = \sup\{J(x\rho) : x \in \varphi(x_0, x_1)_+, \|x\|_{\varphi(x_0, x_1)} \leq 1\} \leq 2\lambda$. Лемма доказана.

Л е м м а 2.15.2. Норма $\|\cdot\|_{\hat{\varphi}(x'_0, x'_1)}$ универсально полунепрерывна и универсально монотонно полна.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Можно считать, что $X_0 \cap X_1$ плотно в X_0 и X_1 по соответствующим нормам, ибо, в противном случае, можно перейти от X_i к Y_i , где Y_i есть замыкание $X_0 \cap X_1$ в X_i , и воспользоваться тем, что $x'_i = y'_i$, $\|\cdot\|_{X'_i} = \|\cdot\|_{Y'_i}$ ($i=0,1$). Теперь требуемое прямо следует из леммы 2.14.7.

Л е м м а 2.15.3. Для любого $x' \in \hat{\varphi}(x'_0, x'_1)_+$ существуют $x'_i \in (X_i)'_+$ такие что $\|x'_i\|_{X'_i} \leq 1$ ($i=0,1$) и $x' \leq \lambda \hat{\varphi}(x'_0, x'_1)$, где $\lambda = \|x'\|_{\hat{\varphi}(x'_0, x'_1)}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Как и при доказательстве предыдущей леммы можно считать, что $Z = X_0 \cap X_1$ плотно в X_0 и X_1 по соответствующим нормам. Считаем, что x^*_{\min} , x^*_0, x^*_1 вложены в Z^* так же как в теореме 2.4.1. Пусть $E = X_0^* \times X_1^*$, как и в § 14 пункт 3. Положим

$$F(x) = J(x, x'), \quad x \in X.$$

Ясно, что $F \in \bar{X}$. Положим теперь

$$H = \{(\rho_0, \rho_1) \in E_+^* : \hat{\varphi}(\rho_0, \rho_1) \geq F\}.$$

В силу леммы 2.14.6 H непусто, выпукло и $\mathcal{B}(E^*, E)$ — замкнуто. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ найдётся $(\rho_0^{(n)}, \rho_1^{(n)}) \in H$, такой что $\|\rho_i^{(n)}\|_{X_i^*} \leq \lambda + n^{-1}$ ($i=0,1$). Пусть (ρ_0, ρ_1) есть обобщённая предельная точка последовательности $\{(\rho_0^{(n)}, \rho_1^{(n)})\}_{n \in \mathbb{N}}$ в топологии $\mathcal{B}(E^*, E)$ (определение обобщённой предельной точки см., например, Данфорд и Шварц [1], стр.41). Ясно, что

$\|f_i\|_{X_i^*} \leq \lambda \quad (i=0,1)$. Положим $f_i' = Pz_{\bar{x}_i} f_i$ и пусть $u_i' \in X_i'$ есть прообраз f_i' при естественном вложении X_i' в X_i^* ($i=0,1$).

Но $(f_0', f_1') \in H$ и $\text{вбон } \mathcal{B}(E^*, E)$ — замкнуто. Поэтому $\|u_i'\|_{X_i'} \leq \lambda \quad (i=0,1)$ и $\hat{\varphi}(u_0', u_1') \geq x'$. Остается принять $x_i' = \lambda^{-1} u_i'$ ($i=0,1$). Лемма доказана.

3. Докажем сначала утверждение (б) теоремы 2.4.2. Так как нормы $\|\cdot\|_{X_i}$ ($i=0,1$) универсально полунепрерывны и универсально монотонно полны, то (см. теорему 0.5.9) $X_i'' = X_i$, $\|\cdot\|_{X_i''} = \|\cdot\|_{X_i}$ ($i=0,1$). Напомним также, что $\hat{\varphi} = \varphi$. Заменив теперь в леммах 2.15.2 и 2.15.3 φ на $\hat{\varphi}$, $(X_i, \|\cdot\|_{X_i})$ на $(X_i', \|\cdot\|_{X_i'})$, получаем требуемое.

Докажем (а). Так как норма $\|\cdot\|_{X_i}$ ($i=0,1$) универсально монотонно полна, то она эквивалентна некоторой монотонной норме, которая одновременно универсально монотонно полна и универсально полунепрерывна (см. предложение 0.4.4). Остается применить уже доказанное утверждение (б) и воспользоваться тем, что если одна из двух эквивалентных монотонных норм на некотором K -линейном универсально монотонно полна, то этим же свойством обладает и вторая норма.

Докажем (в). Так как нормы $\|\cdot\|_{X_i}$ универсально полунепрерывны, то $\|x\|_{X_i} = \|x\|_{X_i''}$ при всех $x \in X_i$ ($i=0,1$), см. теорему 0.5.9. В силу леммы 2.7.9 норма $\|\cdot\|_{\varphi(x_0, x_1)}$ есть сужение нормы $\|\cdot\|_{\varphi(x_0'', x_1'')}$ на $\varphi(x_0, x_1)$. Остается заметить, что норма $\|\cdot\|_{\varphi(x_0'', x_1'')}$ универсально полунепрерывна и универсально монотонно полна в силу уже доказанного утверждения (б).

Теорема 2.4.2 доказана.

^{х)} Мы считаем, что $\lambda > 0$, ибо при $\lambda = 0$ утверждение леммы тривиально.

4. Для построения примера, существование которого утверждается в замечании 2.4.3, нам понадобится следующая лемма.

Л е м м а 2.15.4. Существует N -функция $M(\xi)$, удовлетворяющая следующим условиям:

$$(a) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{M(2^n)}{M(2^{n+1})} = 0 \quad ;$$

$$(б) \quad \frac{M\left(\left(1 + \frac{1}{m}\right)2^n\right)}{M(2^{n+1})} \geq \frac{1}{m} \quad \text{при } n=0,1,2,\dots; m=1,2,\dots$$

Д о к а з а т е л ь с т в о . Возьмём любую N -функцию $M(\xi)$, которая удовлетворяет условию (а) и линейна на каждом промежутке $[2^n, 2^{n+1}]$ ($n=0,1,2,\dots$). Покажем, что она удовлетворяет и условию (б). Действительно,

$$M\left(\left(1 + \frac{1}{m}\right)2^n\right) = M(2^n) + [M(2^{n+1}) - M(2^n)] \cdot \frac{\frac{1}{m} \cdot 2^n}{2^{n+1} - 2^n} = M(2^n) + \frac{M(2^{n+1}) - M(2^n)}{m} \geq \frac{M(2^{n+1})}{m},$$

откуда $\frac{M\left(\left(1 + \frac{1}{m}\right)2^n\right)}{M(2^{n+1})} \geq \frac{1}{m}$ при всех $n=0,1,2,\dots; m=1,2,\dots$. Лемма доказана.

П р и м е р 2.15.5. Возьмём $M(\xi)$ из леммы 2.15.4 и зададим Ψ по формуле (1.4). Примем $W = S$ (пространство всех последовательностей вещественных чисел). За X_0 примем пространство всех $x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots) \in W$, таких что

$$\|x\|_{X_0} = \sup_n \frac{|\xi_n|}{M(2^{n+1})} < +\infty$$

и
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\xi_n}{M(2^{n+1})} = 0.$$

Положим также $X_1 = \ell^\infty$ с обычной равномерной нормой. Пока-

т.е., что норма $\|\cdot\|_{\varphi(x_0, x_1)}$ не является полунепрерывной, хотя нормы $\|\cdot\|_{X_0}$ и $\|\cdot\|_{X_1}$ универсально полунепрерывны. Причина этого заключается в том, что функция $M(\xi)$ не удовлетворяет Δ_2 -условию.

Рассуждая как в замечании 2.1.11, видим, что $\varphi(x_0, x_1)$ состоит из всех $x = (\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ таких, что $\{M(\frac{|\xi_n|}{\lambda})\}_{n \in \mathbb{N}} \in X_0$ для некоторого $\lambda \in (0, +\infty)$ и, если это условие выполнено, то

$$\|x\|_{\varphi(x_0, x_1)} = \inf \left\{ \lambda > 0 : \left\| \left\{ M\left(\frac{|\xi_n|}{\lambda}\right) \right\}_{n \in \mathbb{N}} \right\|_{X_0} \leq 1 \right\}.$$

Положим $u = \{2^n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Ясно, что $u \in \varphi(x_0, x_1)$,

$\|u\|_{\varphi(x_0, x_1)} \leq 1$. Допустим, что $\|u\|_{\varphi(x_0, x_1)} < 1$. Тогда существует $m \in \mathbb{N}$, такое, что $\|u\|_{\varphi(x_0, x_1)} < \frac{m}{m+1}$. Следовательно,

$$\left\{ M\left(\left(1 + \frac{1}{m}\right)2^n\right) \right\}_{n \in \mathbb{N}} \in X_0, \text{ откуда } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{M\left(\left(1 + \frac{1}{m}\right)2^n\right)}{M(2^{n+1})} = 0.$$

что невозможно. Итак, $\|u\|_{\varphi(x_0, x_1)} = 1$. Положим теперь

$u_n = (2, 2^2, \dots, 2^n, 0, 0, \dots)$. Ясно, что $0 \leq u_n \uparrow u$, причём

$\|u_n\|_{\varphi(x_0, x_1)} \leq 0,5$ при всех n . Тем самым, норма $\|\cdot\|_{\varphi(x_0, x_1)}$ не является полунепрерывной, что и требовалось доказать.

§ 16. Доказательство теоремы 2.4.5

I. Справедливость утверждения (а) теоремы 2.4.5 прямо следует из теоремы 2.2.12. Доказываем утверждение (б). Пусть (φ_1, φ_2) — фиксированная согласованная пара.

До конца параграфа будет действовать следующее соглашение. В тех случаях, когда мы принимаем $W = \mathbb{R}^1$, мы счита-

ем, что $\mathbb{I}(W) = I$, $J(x) = x$ для $x \in \mathbb{R}^1$. В тех случаях, когда мы принимаем $W = \mathbb{R}^2$, мы считаем, что $\mathbb{I}(W) = (I, I)$, $J(x) = x_1 + x_2$ для $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.

Лемма 2.16.1. Для любых $\lambda, \mu \in (0, +\infty)$ справедливо

$$\varphi_1(\lambda, \mu) \cdot \varphi_2(\lambda^{-1}, \mu^{-1}) = 1.$$

Доказательство. Примем $W = \mathbb{R}^2$, $\|x\|_{x_0} = \frac{|x|}{\lambda}$, $\|x\|_{x_1} = \frac{|x|}{\mu}$. Тогда $\|x\|_{\varphi_1(x_0, x_1)} = \frac{|x|}{\varphi_1(\lambda, \mu)}$, $\|x\|_{(\varphi_1(x_0, x_1))'} = |x| \cdot \varphi_1(\lambda, \mu)$. С другой стороны, $\|x\|_{x_0'} = \lambda|x|$, $\|x\|_{x_1'} = \mu|x|$, $\|x\|_{\varphi_2(x_0', x_1')} = \frac{|x|}{\varphi_2(\lambda^{-1}, \mu^{-1})}$. Теперь из равенства $\| \cdot \|_{(\varphi_1(x_0, x_1))'} = \| \cdot \|_{\varphi_2(x_0', x_1')}$ получаем требуемое. Лемма доказана.

Определение 2.16.2. Для $\lambda, \mu \in (0, +\infty)$ через $p_{\lambda, \mu}, q_{\lambda, \mu}$ обозначаем нормы на \mathbb{R}^2 , задаваемые формулами

$$\left. \begin{aligned} p_{\lambda, \mu}(x) &= \max \{ \lambda^{-1} |x_1|, \mu^{-1} |x_2| \} \\ q_{\lambda, \mu}(x) &= \lambda |x_1| + \mu |x_2| \end{aligned} \right\} x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Следующие две леммы тривиальны, их доказательства мы опускаем.

Лемма 2.16.3. Для $\lambda, \mu \in (0, +\infty)$ имеем

$$(\mathbb{R}^2, p_{\lambda, \mu})' = (\mathbb{R}^2, q_{\lambda, \mu}), \quad (\mathbb{R}^2, q_{\lambda, \mu})' = (\mathbb{R}^2, p_{\lambda, \mu}).$$

Лемма 2.16.4. Пусть $W = \mathbb{R}^2$, $\lambda, \mu, \alpha, \beta \in (0, +\infty)$,

$$\| \cdot \|_{x_0} = p_{\lambda, \mu}, \quad \| \cdot \|_{x_1} = p_{\alpha, \beta}. \quad \text{Тогда } \| \cdot \|_{\varphi_1(x_0, x_1)} = p_{\varphi_1(\lambda, \alpha), \varphi_1(\mu, \beta)}.$$

Лемма 2.16.5. Функции φ_1, φ_2 положительно

однородны.

Доказательство. Фиксируем $\xi, \eta \in (0, +\infty)$.

Положим $\lambda = \frac{1}{2\xi}$, $\mu = \frac{1}{2\eta}$. Пусть $W = \mathbb{R}^2$, $\|\cdot\|_{x_0} = \varphi_{\lambda, \lambda}$, $\|\cdot\|_{x_1} = \varphi_{\mu, \mu}$. Тогда $\|\cdot\|_{x_0'} = \rho_{\lambda, \lambda}$, $\|\cdot\|_{x_1'} = \rho_{\mu, \mu}$. Следовательно, $\|\cdot\|_{\varphi_2(x_0', x_1')} = \rho_{\varphi_2(\lambda, \mu), \varphi_2(\lambda, \mu)}$. Отсюда $\|\cdot\|_{\varphi_1(x_0, x_1)} = \|\cdot\|_{(\varphi_2(x_0', x_1'))} = \varphi_{\varphi_2(\lambda, \mu), \varphi_2(\lambda, \mu)}$. Таким образом,

$$\|\cdot\|_{\varphi_1(x_0, x_1)} = \varphi_{\varphi_2(\lambda, \mu), \varphi_2(\lambda, \mu)}. \quad (16.1)$$

Пусть $x_0 = (1, 1) \in \mathbb{R}^2$. В силу (16.1) имеем

$$\|x_0\|_{\varphi_1(x_0, x_1)} = \varphi_{\varphi_2(\lambda, \mu), \varphi_2(\lambda, \mu)}(x_0) = 2\varphi_2(\lambda, \mu) = \frac{2}{\varphi_1(\lambda^{-1}, \mu^{-1})} = \frac{2}{\varphi_1(2\xi, 2\eta)}. \quad (16.2)$$

С другой стороны, по определению

$$\|x_0\|_{\varphi_1(x_0, x_1)} = \inf_{\lambda} \{z \geq 0 : 1 \leq z\varphi_1(b_1, c_1), 1 \leq z\varphi_1(b_2, c_2)\},$$

$$\text{где } b_1, c_1, b_2, c_2 \in [0, +\infty), \lambda(b_1 + b_2) \leq 1, \mu(c_1 + c_2) \leq 1\}. \quad (16.3)$$

Положим $z_0 = \|x_0\|_{\varphi_1(x_0, x_1)}$. Из соображений компактности ясно, что инфимум в (16.3) достигается. Пусть он реализуется на числах $b_1^0, c_1^0, b_2^0, c_2^0$. Так как $\varphi_1(\cdot, 0) = \varphi_1(0, \cdot) = 0$, то $b_1^0, c_1^0, b_2^0, c_2^0 > 0$. Покажем, что

$$1 = z_0 \varphi_1(b_1^0, c_1^0), \quad 1 = z_0 \varphi_1(b_2^0, c_2^0). \quad (16.4)$$

Допустим, например, что $1 < z_0 \varphi_1(b_1^0, c_1^0)$. Возьмём настолько малое $\delta > 0$, что $b_1' = b_1^0 - \delta > 0$ и $1 < z_0 \varphi_1(b_1', c_1^0)$. Положим $b_2' = b_2^0 + \delta$. Тогда $1 < z_0 \varphi_1(b_2', c_2^0)$. Итак,

$$\lambda(b_1' + b_2') \leq 1, \quad \mu(c_1^0 + c_2^0) \leq 1, \quad 1 < z_0 \varphi_1(b_1', c_1^0), \quad 1 < z_0 \varphi_1(b_2', c_2^0). \quad (16.5)$$

Из (16.5) следует, что $\|x_0\|_{\varphi_1(x_0, x_1)} < z_0$, что невозможно.

Итак, имеем (16.4). Кроме того, можно считать, что

$$\lambda(b_1^0 + b_2^0) = 1, \mu(c_1^0 + c_2^0) = 1. \quad (16.6)$$

В силу вогнутости функции φ_1 имеем

$$1 = z_0 \left[\frac{1}{2} \cdot \varphi_1(b_1^0, c_1^0) + \frac{1}{2} \cdot \varphi_1(b_2^0, c_2^0) \right] \leq z_0 \varphi_1(b^*, c^*), \quad (16.7)$$

где $b^* = \frac{1}{2} \cdot (b_1^0 + b_2^0)$, $c^* = \frac{1}{2} (c_1^0 + c_2^0)$. Так как $\lambda(b^* + c^*) = 1$, $\mu(c^* + c^*) = 1$, то в (16.7) не может быть строгого неравенства, ибо иначе $\|x_0\|_{\varphi_1(x_0, x_2)} < z_0$. Следовательно, $1 = z_0 \varphi_1(b^*, c^*) = z_0 \varphi_1\left(\frac{1}{2\lambda}, \frac{1}{2\mu}\right) = z_0 \varphi_1(\xi, \eta)$. Отсюда и из (16.2) находим, что $1 = \frac{2\varphi_1(\xi, \eta)}{\varphi_1(2\xi, 2\eta)}$. Итак,

$$\varphi_1(2\xi, 2\eta) = 2\varphi_1(\xi, \eta) \text{ при } \xi, \eta \in (0, +\infty). \quad (16.8)$$

Из (16.8) в силу вогнутости φ_1 получаем, что φ_1 - положительно однородна. Теперь из леммы 2.16.1 следует, что и φ_2 - положительно однородна. Лемма доказана.

Лемма 2.16.6. Пусть $u_1, u_2, v_1, v_2, a_1, a_2, b_1, b_2 \in (0, +\infty)$, причём $u_1 a_1 + u_2 a_2 = v_1 b_1 + v_2 b_2 = 1$. Тогда

$$\varphi_1(u_1, v_1) \varphi_2(a_1, b_1) + \varphi_1(u_2, v_2) \varphi_2(a_2, b_2) \leq 1. \quad (16.9)$$

Доказательство. Пусть $W = \mathbb{R}^2$, $\|\cdot\|_{x_0} = \rho_{a_1, a_2}$, $\|\cdot\|_{x_1} = \rho_{b_1, b_2}$. Тогда $\|\cdot\|_{x_0'} = \rho_{a_1, a_2}$, $\|\cdot\|_{x_1'} = \rho_{b_1, b_2}$. Следовательно, $\|(u_1, u_2)\|_{x_0} = \|(v_1, v_2)\|_{x_1} = \|(a_1, a_2)\|_{x_0'} = \|(b_1, b_2)\|_{x_1'} = 1$.

Поэтому $\|(\varphi_1(u_1, v_1), \varphi_1(u_2, v_2))\|_{\varphi_1(x_0, x_1)} \leq 1$, $\|(\varphi_2(a_1, b_1), \varphi_2(a_2, b_2))\|_{\varphi_2(x_0', x_1')} \leq 1$. Теперь по определению согласованной пары имеем (16.9). Лемма доказана.

2. Положим $A = \varphi_1(1, 1)$ и $q(t) = A^{-1} \varphi_1(t, 1)$, $t \in (0, +\infty)$.

Функция q удовлетворяет условиям леммы 2.7.3. Действительно, условия (а) и (б) выполнены тривиальным образом. Фиксируем

$\alpha, \beta \in (0, 1)$ и $x, y \in (0, +\infty)$. воспользуемся леммами 2.16.1, 2.16.5 и 2.16.6, приняв $u_1 = \alpha x, v_1 = 1, a_1 = x^{-1}, b_1 = \beta, u_2 = (1-\alpha)y,$

$$v_2 = 1, a_2 = y^{-1}, b_2 = 1 - \beta:$$

$$\begin{aligned} \frac{\beta q(\alpha x)}{q(\beta x)} + \frac{(1-\beta)q[(1-\alpha)y]}{q[(1-\beta)y]} &= \frac{\beta \varphi_1(\alpha x, 1)}{\varphi_2(\beta x, 1)} + \frac{(1-\beta)\varphi_1[(1-\alpha)y, 1]}{\varphi_1[(1-\beta)y, 1]} = \\ &= \frac{\varphi_1(\alpha x, 1)}{\varphi_1(x, \beta^{-1})} + \frac{\varphi_1[(1-\alpha)y, 1]}{\varphi_1[y, (1-\beta)^{-1}]} = \varphi_1(\alpha x, 1)\varphi_2(x^{-1}, \beta) + \varphi_1[(1-\alpha)y, 1]\varphi_2(y^{-1}, 1-\beta) = \\ &= \varphi_1(u_1, v_1)\varphi_2(a_1, b_1) + \varphi_1(u_2, v_2)\varphi_2(a_2, b_2) \leq 1. \end{aligned}$$

Итак, q удовлетворяет всем условиям леммы 2.7.3. Поэтому существует $\rho \in [0, 1]$ такое что $q(t) = t^\rho$ при $t \in (0, +\infty)$. Отсюда $\varphi_1(\xi, \eta) = \eta \varphi_1(\xi \eta^{-1}, 1) = \eta A q(\xi \eta^{-1}) = \eta A \xi^\rho \eta^{-\rho} = A \xi^\rho \eta^{1-\rho}$ при всех $\xi, \eta \in (0, +\infty)$, а значит, и при всех $\xi, \eta \in [0, +\infty)$. Положим $s = 1 - \rho$. Тогда $s \in [0, 1]$ и

$$\varphi_1(\xi, \eta) = A \xi^{1-s} \eta^s \text{ при } (\xi, \eta) \in \mathbb{R}_+^2.$$

Теперь, пользуясь леммой 2.16.1, находим

$$\varphi_2(\xi, \eta) = A \xi^{-1-s} \eta^s \text{ при } (\xi, \eta) \in \mathbb{R}_+^2.$$

Наконец, по самому определению класса \mathcal{U}_2 (см. определение 2.1.1, г)) видно, что $s \in (0, 1)$.

Теорема 2.4.5. доказана.

§ 17. Доказательство теоремы 2.4.6

1. Справедливость утверждения (а) теоремы 2.4.6 прямо следует из леммы 2.15.1. Доказываем утверждение (б). Пусть (φ_1, φ_2) - фиксированная слабо согласованная пара.

Л е м м а 2.17.1. Существуют $C_1, C_2 \in (0, +\infty)$, такие что

$$C_1 \cdot \|\varphi_2(x'_0, x'_1)\| \leq \|\varphi_1(x_0, x_1)\| \leq C_2 \cdot \|\varphi_2(x'_0, x'_1)\| \quad (17.1)$$

для любых $W, \mathbb{1}(W), L, X_0, X_1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Допустим противное. Тогда для каждого $n \in \mathbb{N}$ найдутся $W_n, \mathbb{1}(W_n), L(n), X_0^{(n)}, X_1^{(n)}$, $z^{(n)} \in (\varphi_1(x_0^{(n)}, x_1^{(n)}))', z^{(n)} > 0$, такие, что для

$$\alpha_n = \frac{\|z^{(n)}\|_{\varphi_2((x_0^{(n)}), (x_1^{(n)}))}}{\|z^{(n)}\|_{(\varphi_1(x_0^{(n)}), x_1^{(n)}))'}} \quad (17.2)$$

справедливо одно из следующих утверждений:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0 ; \quad (17.3)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \infty . \quad (17.4)$$

Пусть W состоит из всех $X = (x_1, \dots, x_n, \dots)$, где $x_n \in W_n (n \in \mathbb{N})$, причём упорядочение и алгебраические операции в W - координатные. Естественным образом считаем, что каждое W_n есть компонента в W . Положим $\mathbb{1}(W) = \sup \{ \mathbb{1}(W_n) : n \in \mathbb{N} \}$. Пусть L состоит из всех $X = (x_1, \dots, x_n, \dots)$, таких что $x_n \in L(n)$.

$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|_{L^{(n)}} < +\infty$. Для $i = 0, 1$ пусть X_i состоит из всех $x = (x_1, \dots, x_n, \dots)$, таких что $x_n \in X_i^{(n)}$ и $\|x\|_{X_i} = \sup \{ \|x_n\|_{X_i^{(n)}} : n \in \mathbb{N} \} < +\infty$. Заметим, что так как W_n мы отождествили с соответствующей компонентой в W , то элемент $z^{(n)} \in W_n$ отождествляется с элементом $(0, \dots, 0, z^{(n)}, 0, \dots) \in W$, где $z^{(n)}$ стоит на n -м месте строки. Так как $(\varphi_1(x_0, x_1))' = \varphi_2(x_0', x_1')$ по запасу элементов, то (см. теорему 0.3.1)

$$\alpha_1 \cdot \|\varphi_2(x_0', x_1')\| \leq \|(\varphi_1(x_0, x_1))'\| \leq \alpha_2 \cdot \|\varphi_2(x_0, x_1)\| \quad (I7.5)$$

для некоторых $\alpha_1, \alpha_2 \in (0, +\infty)$. Но очевидно $z^{(n)} \in (\varphi_1(x_0, x_1))'$, причём

$$\|z^{(n)}\|_{(\varphi_1(x_0, x_1))'} = \|z^{(n)}\|_{(\varphi_1(x_0^{(n)}, x_1^{(n)}))'}, \quad \|z^{(n)}\|_{\varphi_2(x_0', x_1')} = \|z^{(n)}\|_{\varphi_2(x_0^{(n)'}, x_1^{(n)'})'}$$

Отсюда следует, что $\alpha_2^{-1} \leq \alpha_n \leq \alpha_1^{-1}$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Это противоречит как (I7.3), так и (I7.4). Лемма доказана.

Лемма 2.I7.2. Для любых $\xi, \eta \in (0, +\infty)$ справедливо

$$c_1 \leq \varphi_1(\xi, \eta) \varphi_2(\xi^{-1}, \eta^{-1}) \leq c_2, \quad (I7.6)$$

где c_1, c_2 из леммы 2.I7.1.

Доказательство. Пусть $W = \mathbb{R}^1$, $\|x\|_{X_0} = \frac{|x|}{\xi}$, $\|x\|_{X_1} = \frac{|x|}{\eta}$. Тогда $\|x\|_{X_0'} = \xi|x|$, $\|x\|_{X_1'} = \eta|x|$
 $\|x\|_{\varphi_1(x_0, x_1)} = \frac{|x|}{\varphi_1(\xi, \eta)}$, $\|x\|_{(\varphi_1(x_0, x_1))'} = \varphi_1(\xi, \eta)|x|$, $\|x\|_{\varphi_2(x_0', x_1')} = \frac{|x|}{\varphi_2(\xi^{-1}, \eta^{-1})}$

В силу леммы 2.I7.1 имеем

$$c_1 \cdot \frac{1}{\varphi_2(\xi^{-1}, \eta^{-1})} \leq \varphi_1(\xi, \eta) \leq c_2 \cdot \frac{1}{\varphi_2(\xi^{-1}, \eta^{-1})},$$

откуда следует (17.6). Лемма доказана.

Л е м м а 2.17.3. Пусть числовые последовательности

$$a_n > 0, b_n > 0, \xi_n \geq 0, \eta_n \geq 0 (n \in \mathbb{N}) \quad \text{таковы, что}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n a_n^{-1} \leq 1, \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n b_n^{-1} \leq 1. \quad \text{Тогда} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_1(\xi_n, \eta_n)}{\varphi_1(a_n, b_n)} \leq \frac{C_2}{C_1}$$

где C_1, C_2 из леммы 2.17.1.

Доказательство. Пусть $W = S, L = \ell^1$,

$\mathbb{1}(W) = (1, \dots, 1, \dots)$. Пусть X_0 есть пространство всех

$$z = \{\zeta_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in W, \quad \text{таких что } \|z\|_{X_0} = \sum_{n=1}^{\infty} |\zeta_n| a_n^{-1} < +\infty \quad \text{и}$$

пусть X_1 есть пространство всех $z = \{\zeta_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in W$ таких что

$$\|z\|_{X_1} = \sum_{n=1}^{\infty} |\zeta_n| b_n^{-1} < +\infty. \quad \text{Положим } a = \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}, b = \{b_n\}_{n \in \mathbb{N}},$$

$$x = \{\xi_n\}_{n \in \mathbb{N}}, y = \{\eta_n\}_{n \in \mathbb{N}}. \quad \text{Ясно, что } \varphi_1(x, y) \in \varphi_1(x_0, x_1), \|\varphi_1(x, y)\|_{\varphi_1(x_0, x_1)} \leq 1,$$

$$\varphi_2(a^{-1}, b^{-1}) \in \varphi_2(x'_0, x'_1), \|\varphi_2(a^{-1}, b^{-1})\|_{\varphi_2(x'_0, x'_1)} \leq 1.$$

Из последнего неравенства и леммы 2.17.1 следует, что

$$\|\varphi_2(a^{-1}, b^{-1})\|_{(\varphi_1(x_0, x_1))'} \leq C_2, \quad \text{поэтому } \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_1(\xi_n, \eta_n) \varphi_2(a_n^{-1}, b_n^{-1}) \leq C_2.$$

Но $\frac{1}{\varphi_2(a_n, b_n)} \leq \frac{\varphi_2(a_n^{-1}, b_n^{-1})}{C_1}$ в силу леммы 2.17.2, следовательно,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_1(\xi_n, \eta_n)}{\varphi_2(a_n, b_n)} \leq \frac{C_2}{C_1}. \quad \text{Лемма доказана.}$$

Л е м м а 2.17.4. Для любых $\lambda, \alpha, \beta \in (0, +\infty)$ справедливу

$$\frac{\varphi_1(\lambda\alpha, \lambda\beta)}{\lambda \varphi_1(\alpha, \beta)} \leq \kappa, \quad (17.7)$$

где $\kappa = \frac{C_2}{C_1}$.

Доказательство. Фиксируем $\alpha, \beta \in (0, +\infty)$ и рассмотрим функцию

$$\theta(\lambda) = \frac{\varphi_1(\lambda\alpha, \lambda\beta)}{\lambda \varphi_1(\alpha, \beta)}, \quad \lambda \in (0, +\infty).$$

Из вогнутости φ_1 следует, что θ убывает на $(0, +\infty)$. По-
этому достаточно лишь доказать, что (17.7) справедливо при
 $\lambda = n^{-1} (n \in \mathbb{N})$. Применим лемму 2.17.3, взяв

$$a_i = \alpha, b_i = \beta, \xi_i = n^{-1}\alpha, \eta_i = n^{-1}\beta \quad \text{при } i = 1, \dots, n,$$

$$a_i = b_i = 1, \quad \xi_i = \eta_i = 0 \quad \text{при } i = n+1, n+2, \dots$$

Получим (17.7). Лемма доказана.

2. Положим для $(\xi, \eta) \in \mathbb{R}_+^2$

$$\varphi(\xi, \eta) = \begin{cases} 0 & \text{при } \xi = \eta = 0 \\ (\xi + \eta) \varphi_1\left(\frac{\xi}{\xi + \eta}, \frac{\eta}{\xi + \eta}\right) & \text{при } \xi + \eta > 0. \end{cases}$$

Лемма 2.17.3. $\varphi \in \mathcal{X}_2^0$.

Доказательство. Ясно, что φ непрерывна
на \mathbb{R}_+^2 , положительно однородна, $\varphi(\xi, 0) = \varphi(0, \eta) = 0$ при
всех $\xi, \eta \geq 0$. Далее, для любых $(\xi_1, \eta_1), (\xi_2, \eta_2) \in \mathbb{R}_+^2$
имеем

$$\varphi\left(\frac{\xi_1 + \xi_2}{2}, \frac{\eta_1 + \eta_2}{2}\right) \geq \frac{1}{2} \varphi(\xi_1, \eta_1) + \frac{1}{2} \varphi(\xi_2, \eta_2). \quad (17.8)$$

Действительно, если $\xi_1 + \eta_1 = 0$ или $\xi_2 + \eta_2 = 0$, то (17.8)-
тривиально. Пусть теперь $z_i = \xi_i + \eta_i > 0$ ($i=0,1$). Тогда в силу
вогнутости φ_1 имеем

$$\begin{aligned} \varphi\left(\frac{\xi_1 + \xi_2}{2}, \frac{\eta_1 + \eta_2}{2}\right) &= \frac{z_1 + z_2}{2} \cdot \varphi_1\left(\frac{\xi_1 + \xi_2}{z_1 + z_2}, \frac{\eta_1 + \eta_2}{z_1 + z_2}\right) = \\ &= \frac{z_1 + z_2}{2} \cdot \varphi_1\left(\frac{z_1}{z_1 + z_2} \cdot \frac{\xi_1}{z_1} + \frac{z_2}{z_1 + z_2} \cdot \frac{\xi_2}{z_2}, \frac{z_1}{z_1 + z_2} \cdot \frac{\eta_1}{z_1} + \frac{z_2}{z_1 + z_2} \cdot \frac{\eta_2}{z_2}\right) \geq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\geq \frac{z_1+z_2}{2} \left[\frac{z_1}{z_1+z_2} \cdot \varphi_1\left(\frac{\xi_1}{z_1}, \frac{\eta_1}{z_1}\right) + \frac{z_2}{z_1+z_2} \cdot \varphi_1\left(\frac{\xi_2}{z_2}, \frac{\eta_2}{z_2}\right) \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[z_1 \varphi_1\left(\frac{\xi_1}{z_1}, \frac{\eta_1}{z_1}\right) + z_2 \varphi_1\left(\frac{\xi_2}{z_2}, \frac{\eta_2}{z_2}\right) \right] = \frac{1}{2} \left[\varphi(\xi_1, \eta_1) + \varphi(\xi_2, \eta_2) \right]. \end{aligned}$$

Итак, φ -вогнута. Положим теперь в (17.7) $\lambda = \xi + \eta, \alpha = \frac{\xi}{\xi + \eta}, \beta = \frac{\eta}{\xi + \eta}$. где $\xi, \eta \in [0, +\infty), \xi + \eta > 0$. Получим $\varphi_1(\xi, \eta) \leq \leq \kappa(\xi + \eta) \varphi_1\left(\frac{\xi}{\xi + \eta}, \frac{\eta}{\xi + \eta}\right)$ тем самым

$$\varphi(\xi, \eta) \geq \kappa^{-1} \varphi_1(\xi, \eta) \text{ при } (\xi, \eta) \in \mathbb{R}_+^2. \quad (17.9)$$

Из (17.9) следует, что φ удовлетворяет последнему условию из определения 2.1.1. Лемма доказана.

Л е м м а 2.17.6. φ эквивалентна φ_1 , а $\hat{\varphi}$ эквивалентна φ_2 .

Доказательство . Возьм в (17.7) $\alpha = \xi, \beta = \eta, \lambda = (\xi + \eta)^{-1}$, где $\xi, \eta \in [0, +\infty), \xi + \eta > 0$, получим $(\xi + \eta) \varphi_1\left(\frac{\xi}{\xi + \eta}, \frac{\eta}{\xi + \eta}\right) \leq \kappa \varphi_1(\xi, \eta)$ тем самым

$$\varphi(\xi, \eta) \leq \kappa \varphi_1(\xi, \eta) \text{ при } (\xi, \eta) \in \mathbb{R}_+^2. \quad (17.10)$$

Из (17.9) и (17.10) следует, что φ эквивалентна φ_1 . Заметим, что

$$\varphi(\xi, \eta) \hat{\varphi}(\xi^{-1}, \eta^{-1}) \leq \xi \xi^{-1} + \eta \eta^{-1} = 2 \text{ при } (\xi, \eta) \in \mathbb{R}_+^2. \quad (17.11)$$

Далее, так как $M^{-1}(v)N^{-1}(v) > v$ при $v \in (0, +\infty)$ для любых дополнительных друг к другу N -функций $M(\xi)$ и $N(\xi)$ (см. Красносельский и Рунтцкии [1], стр.25), то с помощью предложения 2.1.5 находим $\varphi(\xi, \eta) \hat{\varphi}(\xi^{-1}, \eta^{-1}) = \eta M^{-1}(\xi \eta^{-1}) \xi^{-1} N^{-1}(\eta^{-1} \xi) > \geq \eta \xi^{-1} \xi \eta^{-1} = 1$ при $\xi, \eta \in (0, +\infty)$. Итак,

$$1 \leq \varphi(\xi, \eta) \hat{\varphi}(\xi^{-1}, \eta^{-1}) \leq 2 \quad \text{при} \quad \xi, \eta \in (0, +\infty). \quad (17.12)$$

Используя лемму 2.17.2 и (17.9), (17.10), (17.12), получаем

$$\varphi_2(\xi, \eta) \leq \frac{c_1}{\varphi_1(\xi^{-1}, \eta^{-1})} \leq \frac{\kappa c_1}{\varphi(\xi^{-1}, \eta^{-1})} \leq \kappa c_2 \hat{\varphi}(\xi, \eta) = c_1^{-1} c_2^2 \hat{\varphi}(\xi, \eta),$$

$$\varphi_2(\xi, \eta) \geq \frac{c_1}{\varphi_1(\xi^{-1}, \eta^{-1})} \geq \frac{c_1}{\kappa \varphi(\xi^{-1}, \eta^{-1})} \geq \frac{c_1}{2\kappa} \cdot \hat{\varphi}(\xi, \eta) = \frac{1}{2} c_1^2 c_2^{-1} \hat{\varphi}(\xi, \eta)$$

при $\xi, \eta \in (0, +\infty)$. Итак,

$$\frac{1}{2} \cdot c_1^2 c_2^{-1} \hat{\varphi} \leq \varphi_2 \leq c_1^{-1} c_2^2 \hat{\varphi}.$$

Лемма доказана.

Таким образом, $\varphi \in \mathcal{A}_2^0$, φ эквивалентна φ_1 , $\hat{\varphi}$ эквивалентна φ_2 .

Теорема 2.4.6 доказана.

§ 18. Доказательства теорем 2.5.1, 2.5.2, 2.5.3, 2.5.5, 2.6.1 и 2.6.3

Л е м м а 2.18.1. Пусть Y есть произвольное банахово пространство, V — замкнутое по норме подпространство пространства Y^* , причём V — тотально на Y . Пусть норма $\|\cdot\|_V$ есть сужение нормы $\|\cdot\|_{Y^*}$ на V . Тогда, если V — (b) — рефлексивно, то и Y — (b) — рефлексивно (и $V = Y^*$).

Доказательство. Положим $B = \{f \in V : \|f\|_V \leq 1\}$. Множество B компактно в топологии $\sigma(V, V^*)$, а значит компактно и в более слабой топологии

$\mathcal{B}(Y^*, Y)$. Поэтому B замкнуто в $(Y^*, \mathcal{B}(Y^*, Y))$. Тогда (теорема Крейна-Шмульмана, см. Дэй [1], стр. 77) V замкнуто в $(Y^*, \mathcal{B}(Y^*, Y))$. Но V плотно в $(Y^*, \mathcal{B}(Y^*, Y))$, ибо V тотально на Y . Тем самым $V = Y^*$. Так как Y^* (b)-рефлексивно, то и Y (b)-рефлексивно. Лемма доказана.

С л е д с т в и е 2.18.2. Пусть Y есть банахово KN -пространство с тотальным \bar{Y} . Если \bar{Y} (b)-рефлексивно (норма на \bar{Y} индуцирована из \bar{Y}^*), то и само Y (b)-рефлексивно.

2. Доказательство теоремы 2.5.2. Положим $Y = X^{\frac{1}{2}}(X')^{\frac{1}{2}}$. Тогда по теореме 2.2.12 имеем

$$Y' = (X')^{\frac{1}{2}}(X'')^{\frac{1}{2}}, \quad Y'' = (X'')^{\frac{1}{2}}(X''')^{\frac{1}{2}} = (X'')^{\frac{1}{2}}(X')^{\frac{1}{2}} = Y', \quad (18.1)$$

причём в (18.1) равенства имеют место как по запасу элементов, так и по норме. Так как $Y' = Y''$, то $Y' \subset L_2$. Но тогда $Y'' \supset (L_2)'$, то есть $Y' \supset L_2$. Тем самым $Y' = L_2$ по запасу элементов. Покажем, что $\|\cdot\|_{Y'} = \|\cdot\|_{L_2}$. Возьмём произвольный $w \in Y_+$. Тогда в силу первого из равенств (18.1) и теоремы 2.4.2 найдутся $u' \in X_+$, $v'' \in X_+$, такие что $\|u'\|_{X'} \leq 1$, $\|v''\|_{X''} \leq 1$ и

$$w \leq \|w\|_{Y'} (u')^{\frac{1}{2}} (v'')^{\frac{1}{2}}. \quad (18.2)$$

Из (18.2) получаем $\|w\|_{L_2} \leq \|w\|_{Y'} \|(u')^{\frac{1}{2}} (v'')^{\frac{1}{2}}\|_{L_2} = \|w\|_{Y'} [J(u'v'')]^{\frac{1}{2}} \leq \|w\|_{Y'}$. Итак,

$$\|\cdot\|_{L_2} \leq \|\cdot\|_{Y'}. \quad (18.3)$$

Из (18.3) следует, что $\|\cdot\|_{(L_2)'} \geq \|\cdot\|_{Y''}$, то есть

$$\|\cdot\|_{L_2} \geq \|\cdot\|_{Y'}. \quad (18.4)$$

Из (18.3) и (18.4) следует, что $\|\cdot\|_{L_2} = \|\cdot\|_{Y'}$. Из следствия 2.18.2 вытекает, что Y есть KY -пространство, поэтому $Y = Y''$ по запасу элементов и по норме, то есть $Y = (L_2)' = L_2$ по запасу элементов и по норме.

Теорема 2.5.2 доказана.

3. Доказательство теоремы 2.5.1. Из теоремы 2.5.2 следует, что в $X^{\frac{1}{2}}(X')^{\frac{1}{2}}$ выполнено условие (A). Остаётся применить предложение 2.2.9.

Теорема 2.5.1 доказана.

4. Доказательство теоремы 2.5.3. Доказываем 1). Положим $\lambda = \|z\|_L$. Так как $|z|^{\frac{1}{2}} \in L_2$ и $\||z|^{\frac{1}{2}}\|_{L_2} = \lambda^{\frac{1}{2}}$, то по теореме 2.5.2 найдутся $u \in X_+$, $x' \in X'_+$ такие что $\|u\|_X \leq 1$, $\|x'\|_{X'} \leq 1$, $|z|^{\frac{1}{2}} \leq \lambda^{\frac{1}{2}}(1-\varepsilon)^{-\frac{1}{2}} u^{\frac{1}{2}}(x')^{\frac{1}{2}}$. Так как

$|z| \leq \lambda(1-\varepsilon)^{-1} u x'$, то $z = x x'$ для некоторого $x \in X$ такого что $|x| \leq \lambda(1-\varepsilon)^{-1} u$. Остаётся заметить, что $\|x\|_X \|x'\|_{X'} \leq \|x\|_X \leq \lambda(1-\varepsilon)^{-1} \|u\|_X \leq \lambda(1-\varepsilon)^{-1} = \frac{\|z\|_L}{1-\varepsilon}$, то есть

$\|z\|_L \geq (1-\varepsilon) \|x\|_X \|x'\|_{X'}$. Доказываем 2). По-прежнему $\lambda = \|z\|_L$.

В силу теорем 2.5.2 и 2.4.2 найдутся $u \in X_+$, $x' \in X'_+$ такие что $\|u\|_X \leq 1$, $\|x'\|_{X'} \leq 1$, $|z|^{\frac{1}{2}} \leq \lambda^{\frac{1}{2}} u^{\frac{1}{2}}(x')^{\frac{1}{2}}$. Так как $|z| \leq \lambda u x'$, то $z = x x'$ для некоторого $x \in X$ такого что $|x| \leq \lambda u$. Остаётся заметить, что $\|x\|_X \|x'\|_{X'} \leq \lambda = \|z\|_L$

и в то же время $\|z\|_L = \|x x'\|_L \leq \|x\|_X \|x'\|_{X'}$.

Теорема 2.5.3 доказана.

5. Доказательство теоремы 2.5.5. Так как $\Pi(W) \in L$, то в силу теоремы 2.5.3 найдутся $u \in X_+$, $y \in X'_+$, такие что $u y = \Pi(W)$. Ясно, что $X[y] \subset L$ и $\Pi(W) \in X[y]$. Тем самым $M \subset X[y] \subset L$.

Теорема 2.5.5 доказана.

6. Доказательства теорем 2.6.1 и 2.6.3. Пусть E - банахово пространство с безусловным базисом $\{e_k\}$, удовлетворяющим условию (\star) (см. определение 2.6.2). Вложим E и E^* в пространство S , отождествив каждый $x \in E$ с $\{f_k(x)\}_{k \in N} \in S$ и каждый $f \in E^*$ с $\{f(e_k)\}_{k \in N} \in S$. Тогда E и E^* суть банаховы KN -пространства, являющиеся фундаментами в S . При этом естественным образом E^* совпадает с пространством дуальным к E . Теперь ясно, что теоремы 2.6.1 и 2.6.3 суть следствия теоремы 2.5.3.

Теоремы 2.6.1 и 2.6.3 доказаны.

Глава III

О ЛИНЕЙНО-ТОПОЛОГИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ БАНАХОВЫХ СТРУКТУР

Всюду в этой главе термины "изоморфизм", "сепарабельность", "подпространство" используются исключительно в смысле теории линейных топологических пространств, а не теории полупорядоченных пространств. В частности, подпространством нормированного пространства называется его замкнутое линейное подмножество. Два нормированных пространства X и Y , которые могут быть и KN -линеалами, называются изоморфными (обозначение: $X \sim Y$), если существует линейное непрерывное взаимнооднозначное отображение T одного из них на другое, такое что T^{-1} тоже непрерывно. Через J обозначается естественное вложение нормированного пространства X в X^{**} . Через J в этой главе обозначается банахово пространство Р.Джеймса (см. Дэй [1], стр. 123), обладающее следующими свойствами: J — сепарабельно, линейно изометрично J^{**} и не является (δ) -рефлексивным.

Хорошо известно, что банахова топология KN -линеала полностью определяется имеющимся в нём частичным упорядочением. Точнее говоря (см. теорему 0.3.1), любые две монотонные банаховы нормы, заданные на одном и том же K -линеале, — эквивалентны, то есть определяемые ими топологии совпадают. На-

против, банахова топология KB-линеала несёт мало информации об его остальных свойствах. Дело в том, что если некоторое банахово пространство можно превратить в KB-линеал путём введения в нём частичного упорядочения и эквивалентной перенормировки^{х)}, то такое превращение обычно неединственно. Например, бесконечномерное сепарабельное гильбертово пространство можно превратить как в $L^2[0,1]$, так и в ℓ^2 .

Тем не менее, некоторые свойства частичного упорядочения в KB-линеале всё же полностью определяются его банаховой топологией. Классическим результатом в этом направлении является теорема Огасавара (см. теорему 0.3.8): KB-линеал является KB-пространством тогда и только тогда, когда он слабо секвенциально полон. Полученные нами в этом направлении результаты (теоремы 3.1.2, 3.1.8, 3.2.1, 3.3.1 и 3.4.12) относятся к числу главных результатов диссертации.

§ 1. Непрерывность нормы

1. Напомним, что последовательность $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ элементов банахова пространства X называется слабо фундаментальной, если для любого $f \in X^*$ существует конечный $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$.

О п р е д е л е н и е 3.1.1. (Пелчинский [1],

стр. 251). Банахово пространство X обладает свойством (U),

если для каждой слабо фундаментальной последовательности $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ в X существует такая последовательность $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ в X , что $\sum_{n=1}^{\infty} |f(y_n)| < +\infty$ для любого $f \in X^*$ и последовательность $x_n - \sum_{i=1}^n y_i$ слабо сходится к нулю.

х) Не всякое банахово пространство изоморфно KB-линеалу, то есть не всякое банахово пространство можно превратить в KB-

Т е о р е м а 3.1.2. ДЛЯ ЛЮБОГО БАНАХОВА K_6N -ПРОСТРАНСТВА X СЛЕДУЮЩИЕ УТВЕРЖДЕНИЯ ЭКВИВАЛЕНТНЫ:

(а) В X ВЫПОЛНЕНО УСЛОВИЕ (А), ТО ЕСТЬ НОРМА В X НЕПРЕРЫВНА;

(б) В X ВЫПОЛНЕНО УСЛОВИЕ (и) ;

(в) В X НЕТ ПОДПРОСТРАНСТВ, ИЗОМОРФНЫХ ПРОСТРАНСТВУ ℓ^∞ ;

(г) В X НЕТ ПОДПРОСТРАНСТВ, ИЗОМОРФНЫХ ПРОСТРАНСТВУ $C[0,1]$;

(д) В X НЕТ ПОДПРОСТРАНСТВ, ИЗОМОРФНЫХ ПРОСТРАНСТВУ J .

З а м е ч а н и е 3.1.3. Из теоремы 3.1.2 вытекает следующее. Пусть E — произвольное линейное множество, $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ — две эквивалентные банаховы нормы на E , K_1 и K_2 — два конуса в E , причём $X_1 = (E, K_1, \|\cdot\|_1)$ и $X_2 = (E, K_2, \|\cdot\|_2)$ — суть K_6N -пространства. Тогда, если в X_1 выполнено условие (А), то и в X_2 выполнено условие (А). Сказанное равносильно следующему: если X и Y — банаховы K_6N -пространства, $X \sim Y$ и в X выполнено условие (А), то в Y тоже выполнено условие (А). В этом смысле можно сказать, что условие (А) в банаховом K_6N -пространстве полностью определяется его банаховой топологией.

З а м е ч а н и е 3.1.4. Эквивалентность (а) \Leftrightarrow (в) утверждается в работе Т. Андо (см. Андо [2], теорема 4.1), однако приведённое там доказательство ошибочно (принципиальная ошибка допущена в доказательстве ключевой леммы 4.1). Заметим также, что, поскольку импликация (в) \Rightarrow (а) почти тривиальна,

упомянутая эквивалентность $(a) \Leftrightarrow (b)$ существенно слабее
 каждой из эквивалентностей $(a) \Leftrightarrow (c)$ и $(a) \Leftrightarrow (d)$, ибо ℓ^∞
 содержит подпространства, изоморфные $C[0,1]$ и J .

Доказательство теоремы 3.1.2. Имплика-
 ции $(d) \Rightarrow (c) \Rightarrow (b)$ - тривиальны. Импликация $(b) \Rightarrow (d)$

прямо вытекает из следующих двух результатов А. Пелчиньского:

1) если в X выполнено условие (U) , то в любом его подпро-
 странстве тоже выполнено условие (U) (см. Пелчиньский [1],

следствие 1); 2) в пространстве J условие (U) не выполне-
 но (см. Пелчиньский [1], предложение 3). Импликация $(b) \Rightarrow (a)$

почти тривиальна и хорошо известна (см., например, Андо [1],

доказательство теоремы 8). Осталось только доказать, что

$(a) \Rightarrow (b)$. Пусть в X выполнено условие (A) . Пусть

$\mathcal{A}: X \rightarrow X^{**}$ есть естественное вложение. Заметим, что $X^* = \bar{X}$,

$\mathcal{A}(X) \subset \bar{\bar{X}}$, причём $\mathcal{A}(X)$ есть фундамент в \bar{X} (см. Вулик

[6], стр. 239). Пусть $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ - произвольная слабо фунда-
 ментальная последовательность в X . Положим $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x_n|}{n^2(|x_n|+1)}$

(написанный ряд сходится по норме, x есть его сумма относи-
 тельно этой сходимости). Тогда $\mathcal{A}x \in \bar{\bar{X}}$.

Обозначим через

Z главную компоненту в $\bar{\bar{X}}$, порождённую элементом $\mathcal{A}x$.

Положим $F(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$, $f \in \bar{X}$. Так как $f(x_n) = (\mathcal{A}x_n)(f)$

и $\mathcal{A}x_n \in Z$, то в силу теоремы 0.4.7 имеем $F \in Z$. Так

как $\mathcal{A}x$ есть единица в Z , то найдётся последовательность

$\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ в Z , удовлетворяющая условиям: $|F_k| \wedge |F_n| = 0$ при

$k \neq n$; $|F_n| \leq n \mathcal{A}x$ при всех $n \in \mathbb{N}$; ряд $\sum_{n=1}^{\infty} F_n$

(0)-сходится в Z и его сумма есть F . Положим $y_n = \mathcal{A}^{-1}F_n$ ($n \in \mathbb{N}$)

и убедимся, что $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ и есть требуемая последовательность. Так как $(0) - \sum_{n=1}^{\infty} F_n = F$ и члены этого ряда попарно дизъюнктивны, то $\sum_{n=1}^{\infty} T(F_n) = T(F)$ и $\sum_{n=1}^{\infty} |T(F_n)| < +\infty$ для

любого $T \in \bar{Z}$. В частности, взяв произвольный $f \in \bar{X}$ и

положив $T(G) = G(f)$ при $G \in Z$, находим $\sum_{n=1}^{\infty} F_n(f) =$

$= F(f)$, $\sum_{n=1}^{\infty} |F_n(f)| < +\infty$, то есть $\sum_{n=1}^{\infty} f(y_n) = F(f)$,

$\sum_{n=1}^{\infty} |f(y_n)| < +\infty$

. Остается заметить, что равенство

$\sum_{n=1}^{\infty} f(y_n) = F(f)$ можно переписать в виде $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n - \sum_{i=1}^n y_i) =$

$= 0$. Теорема доказана.

С л е д с т в и е 3.1.5. ПРОСТРАНСТВО $C[0,1]$ НЕ ИЗОМОРФНО НИКАКОМУ K_6N -ПРОСТРАНСТВУ.

Действительно, допустим, что $C[0,1] \sim X$, где X есть K_6N -пространство. Так как X полно по норме и сепарабельно, то в X выполнено условие (A) (теорема 0.3.2). Это противоречит эквивалентности (a) \iff (г) из теоремы 3.1.2.

З а м е ч а н и е 3.1.6. В связи с замечанием 3.1.3 естественно возникает следующий вопрос. Пусть X и Y - КВ-линейные (не являющиеся, вообще говоря, K_6N -пространствами), такие что $X \sim Y$ и в X выполнено условие (A). Будет ли в Y тоже выполнено условие (A). Оказывается, что в Y условие (A) может и не выполняться; например, так будет, если принять $X = c_0$, $Y = c$. Таким образом, условие (A) в произвольном КВ-линейном уже не определяется полностью его банаховой топологией.

З а м е ч а н и е 3.1.7. а) Существуют банаховы K^N -пространства X и Y , такие что $X \sim Y$, в X выполнено условие (B), но в Y условие (B) не выполнено. Тем самым, даже в банаховом K^N -пространстве условие (B) не определяется полностью его банаховой топологией. Приведём соответствующий пример. Пусть N - множество натуральных чисел в дискретной топологии, βN - его чеховское бикompактное расширение. Фиксируем точку $q \in \beta N \setminus N$. Положим $X = C(\beta N)$, $Y = \{x \in X : x(q) = 0\}$, причём норма и упорядочение на Y индуцированы из X . Ясно, что X и Y суть банаховы K^N -пространства, $X \sim Y$, в X выполнено условие (B), а в Y оно не выполнено.

б) Существуют банаховы K^N -пространства X и Y , такие что $X \sim Y$, в X есть единица, а в Y единицы нет. Тем самым в банаховом K^N -пространстве наличие единицы не определяется полностью его банаховой топологией. Приведём соответствующий пример. За X принимаем пространство $L^2(T, \Sigma, \mu)$, где (T, Σ, μ) - пространство с конечной несепарабельной мерой, за Y -пространство ℓ^2_Γ , где Γ есть множество, мощность которого равна мощности полной ортонормированной системы в $L^2(T, \Sigma, \mu)$. Ясно, что $X \sim Y$, в X есть единица, в Y нет единицы.

в) Существуют банаховы K^N -пространства X и Y , такие что $X \sim Y$, \bar{X} тотально на X , а $\bar{Y} = \{0\}$. Таким образом, тотальность множества вполне линейных функционалов на банаховом K^N -пространстве не есть линейно-топологическое

свойство этого пространства. Приведём соответствующий пример. За X принимаем пространство $L^\infty[0,1]$, за Y — пространство $\widehat{C}[0,1]$, то есть Y есть K -пополнение пространства $C[0,1]$. Известно, что \overline{X} тотально на $X, X \sim Y, \overline{Y} = \{0\}$.

г) Нетрудно привести пример, показывающий, что свойство полунепрерывности нормы в банаховом KN -пространстве тоже не есть линейно-топологическое свойство.

2. Теорема 3.1.8. ПУСТЬ X БАНАХОВО KN -ПРОСТРАНСТВО, В КОТОРОМ ВЫПОЛНЕНО УСЛОВИЕ (А) И КОТОРОЕ ИЗОМОРФНО СОПРЯЖЁННОМУ БАНАХОВУ ПРОСТРАНСТВУ. ТОГДА В X ВЫПОЛНЕНО УСЛОВИЕ (В), ТЕМ САМЫМ X ЕСТЬ KV -ПРОСТРАНСТВО.

Доказательство. Допустим противное. Тогда в X существует подпространство, изоморфное пространству c_0 (теорема 0.3.8). Но (Бессага и Пелчиньский [1]), если сопряжённое банахово пространство содержит подпространство, изоморфное пространству c_0 , то оно содержит и подпространство, изоморфное пространству ℓ^∞ . Таким образом, X содержит подпространство, изоморфное пространству ℓ^∞ . Это противоречит эквивалентности (а) \iff (в) из теоремы 3.1.2. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 3.1.9. Если банахово KN -пространство изоморфно сопряжённому банахову пространству, но в нём не выполнено условие (А), то в нём может не выполняться и условие (В). Примером такого пространства служит Y из замечания 3.1.7а, которое, очевидно, изоморфно пространству ℓ^∞ .

С л е д с т в и е 3.1.10. Пусть X — банахово K_N -пространство, такое что X^* — сепарабельно, а X^{**} несепара-

бельно. Тогда X не изоморфно сопряжённому банахову пространству.

Действительно, из теоремы 0.3.2 следует, что X^* есть КВ-пространство, и что в X выполнено условие (A). Так как X не (b)-рефлексивно, то X не есть КВ-пространство (см. Вулик [6], стр. 294, теорема Огасавара), ибо X^* есть КВ-пространство. Тем самым, в X не выполнено условие (B). Остаётся применить теорему 3.1.8.

Следующая теорема о пространствах Марцинкевича $M_0(\Psi)$ (см. гл. 0 § 6 п. 7) и пространствах Орлича E_M (см. Красносельский и Рутцкий [1], стр. 98) является следствием теоремы 3.1.8.

Т е о р е м а 3.1.11. ПРОСТРАНСТВО $M_0(\Psi)$ НЕ ИЗОМОРФНО СОПРЯЖЁННОМУ БАНАХОВУ ПРОСТРАНСТВУ. ЕСЛИ N -ФУНКЦИЯ $M(\xi)$ НЕ УДОВЛЕТВОРЯЕТ Δ_2 -УСЛОВИЮ, ТО И ПРОСТРАНСТВО E_M НЕ ИЗОМОРФНО СОПРЯЖЁННОМУ БАНАХОВУ ПРОСТРАНСТВУ.

Действительно, в каждом из этих пространств выполнено условие (A), но не выполнено условие (B) (см. предложения 0.6.1 и 0.6.2).

§ 2. Счётность типа

В этом параграфе: \aleph означает мощность континуума, H - фиксированное множество мощности \aleph , ω - первый бесконечный ординал, ω_1 - первый несчётный ординал, $W = \{\alpha : \alpha < \omega_1\}$.

Напомним, что термины "подпространство" и "изоморфизм" в этой главе используются исключительно в смысле теории ли-

нейных топологических пространств, а не теории полуупорядоченных пространств.

Т е о р е м а 3.2.1. ПУСТЬ X — БАНАХОВО KN -ПРОСТРАНСТВО С ТОТАЛЬНЫМ \bar{X} . В ПРЕДПОЛОЖЕНИИ СПРАВЕДЛИВОСТИ КОНТИНУУМ-ГИПОТЕЗЫ СЛЕДУЮЩИЕ УТВЕРЖДЕНИЯ ЭКВИВАЛЕНТНЫ:

- (а) X — СЧЁТНОГО ТИПА;
- (б) В X НЕТ ПОДПРОСТРАНСТВА, ИЗОМОРФНОГО ПРОСТРАНСТВУ ℓ_N^∞ ;
- (в) СУЩЕСТВУЕТ ТАКОЕ МНОЖЕСТВО $\mathcal{N} \subset X^*$, ЧТО \mathcal{N} ТОТАЛЬНО НА X И ДЛЯ ЛЮБОГО $x \in X$ МНОЖЕСТВО $\{f \in \mathcal{N} : f(x) \neq 0\}$ НЕ БОЛЕЕ ЧЕМ СЧЁТНО.

Из сказанного в гл. 0 § 5 вытекает, что теорема 3.2.1 допускает следующую эквивалентную переформулировку в терминах банаховых пространств измеримых функций на пространстве с мерой.

Т е о р е м а 3.2.1' ПУСТЬ (T, Σ, μ) — ПРОСТРАНСТВО С МЕРОЙ, УДОВЛЕТВОРЯЮЩЕЕ УСЛОВИЯМ: 1) $S(T, \Sigma, \mu)$ ЕСТЬ K -ПРОСТРАНСТВО; 2) $L^1(T, \Sigma, \mu)$ ЕСТЬ ФУНДАМЕНТ В $S(T, \Sigma, \mu)$. ТОГДА ДЛЯ ЛЮБОГО БАНАХОВА KN -ПРОСТРАНСТВА X , ЯВЛЯЮЩЕГОСЯ ИДЕАЛОМ В $S(T, \Sigma, \mu)$, В ПРЕДПОЛОЖЕНИИ СПРАВЕДЛИВОСТИ КОНТИНУУМ ГИПОТЕЗЫ СЛЕДУЮЩИЕ УТВЕРЖДЕНИЯ ЭКВИВАЛЕНТНЫ:

- (а) ДЛЯ ЛЮБОГО $x \in X$ МНОЖЕСТВО $\{t \in T : x(t) \neq 0\}$ ИМЕЕТ σ -КОНЕЧНУЮ МЕРУ (ТО ЕСТЬ ЭТО МНОЖЕСТВО ЕСТЬ ОБЪЕДИНЕНИЕ СЧЁТНОГО ЧИСЛА МНОЖЕСТВ КОНЕЧНОЙ МЕРЫ);
- (б) В X НЕТ ПОДПРОСТРАНСТВА, ИЗОМОРФНОГО ПРОСТРАНСТВУ ℓ_N^∞ ;

(в) СУЩЕСТВУЕТ ТАКОЕ МНОЖЕСТВО $\mathcal{X} \subset X^*$, ЧТО π ТОТАЛЬНО НА X И ДЛЯ ЛЮБОГО $x \in X$ МНОЖЕСТВО $\{f \in \mathcal{X} : f(x) \neq 0\}$ НЕ БОЛЕЕ ЧЕМ СЧЁТНО.

З а м е ч а н и е 3.2.2. Из теоремы 3.2.1 вытекает следующее. Пусть E - произвольное линейное множество, $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ - две эквивалентные банаховы нормы на E , K_1 и K_2 - два конуса в E , причём $X_i = (E, K_i, \|\cdot\|_i)$ есть KN -пространство с тотальным \bar{X}_i ($i=1,2$). Тогда, если X_1 - счётного типа, то (в предположении справедливости континуум-гипотезы) X_2 тоже счётного типа. Сказанное эквивалентно следующему: если X и Y - банаховы KN -пространства, $X \sim Y$, \bar{X} тотально на X , \bar{Y} тотально на Y и X - счётного типа, то (в предположении справедливости континуум-гипотезы) Y тоже счётного типа.

З а м е ч а н и е 3.2.3. Существуют банаховы K_0N -пространства X и Y , такие что $X \sim Y$, \bar{X} - тотально на X , \bar{Y} - тотально на Y , X - счётного типа, но Y не есть пространство счётного типа. Приведём соответствующий пример. Пусть X есть подпространство в ℓ_N^∞ , состоящее из всех x , таких что $\text{card} \{t \in \mathbb{N} : x(t) \neq 0\} \in \mathcal{N}_0$; Y есть подпространство в ℓ_N^∞ , состоящее из всех x , таких что для некоторого $\alpha \in (-\infty, +\infty)$ (зависящего от x) справедливо $\text{card} \{t \in \mathbb{N} : x(t) \neq \alpha\} \in \mathcal{N}_0$. Ясно, что эти X и Y - требуемые. Заметим, что в этом примере X есть K -пространство, Y есть K_0 -пространство, но Y не есть K -пространство.

Оставшаяся часть этого параграфа посвящена доказательству теоремы 3.2.1.

2. Л е м м а 3.2.4. Пусть $f \in (l_N^\infty)^*$ и пусть $\{N_\xi : \xi \in \Sigma\}$ — некоторое разбиение^{x)} множества N . Тогда

$$\text{card} \{ \xi \in \Sigma : |f|(x_{N_\xi}) \neq 0 \} \leq N_0.$$

Лемма тривиальна, ибо множество $\{ \xi \in \Sigma : |f|(x_{N_\xi}) \geq n^{-1} \}$ — конечно при любом $n \in \mathbb{N}$.

Л е м м а 3.2.5. Пусть \mathcal{U} есть множество всех отображений $u : W \rightarrow W$, таких что для некоторого $\alpha \in W$ (зависящего от u) справедливо $u(\alpha) = u(\beta)$ при всех $\beta \geq \alpha, \beta \in W$. Тогда $\text{card } \mathcal{U} = N$.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Для $\alpha \in W$ положим $\mathcal{U}_\alpha = \{ u \in \mathcal{U} : u(\beta) = u(\alpha) \text{ при } \beta \geq \alpha, \beta \in W \}$. Ясно, что $\text{card } \mathcal{U}_\alpha \leq N$ при всех α и $\text{card } \mathcal{U}_\alpha = N$ при $\alpha \geq \omega$. Остается заметить, что $\mathcal{U} = \bigcup_{\alpha \in W} \mathcal{U}_\alpha$.

Л е м м а 3.2.6. По каждому $\alpha \in W$ можно указать такое разбиение $\{N_{\alpha\xi} : \xi \in \Sigma_\alpha\}$ множества N , что

(а) $\text{card } \Sigma_\alpha > N_0$;

(б) если $\alpha < \beta$, то разбиение $\{N_{\beta\xi} : \xi \in \Sigma_\beta\}$ есть измельчение разбиения $\{N_{\alpha\xi} : \xi \in \Sigma_\alpha\}$;

(в) если $\alpha \in W$ и для каждого $\gamma < \alpha$ N^γ есть одно из множеств разбиения $\{N_{\gamma\xi} : \xi \in \Sigma_\gamma\}$, причём $N^{\delta_1} \supset N^{\delta_2}$ при $\delta_1 < \delta_2 < \alpha$, то $\bigcap_{\gamma < \alpha} N^\gamma$ совпадает с объединением бесчётного набора множеств из разбиения $\{N_{\alpha\xi} : \xi \in \Sigma_\alpha\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о . В силу леммы 3.2.5 множество N можно отождествить с множеством \mathcal{U} . Фиксируем

x) Разбиением множества называется такое семейство непустых попарно непересекающихся его подмножеств, объединение которых совпадает с этим множеством.

$\alpha \in W$. Положим $W_\alpha = \{\gamma : \gamma \leq \alpha\}$. За Σ_α примем множество всех отображений $\xi : W_\alpha \rightarrow W$. Положим теперь $N_{\alpha\xi} = \{u \in U : u(\gamma) = \xi(\gamma) \text{ при } \gamma \in W_\alpha\}$. Ясно, что $\{N_{\alpha\xi} : \xi \in \Sigma_\alpha\} (\alpha \in W)$ и есть требуемая система разбиений. Лемма доказана.

Л е м м а 3.2.7. Пусть $T \subset (\ell_N^\infty)^*$, T тотально на ℓ_N^∞ . Тогда для каждого $\alpha \in W$ можно указать $f_\alpha \in T, E_\alpha \subset N, F_\alpha \subset N$, так что

- (а) $E_\alpha \cap F_\alpha = \emptyset$ при всех $\alpha \in W$;
- (б) если $\alpha < \beta$, то $F_\alpha \supset E_\beta \cup F_\beta$;
- (в) $f_\alpha(x_{E_\alpha}) \neq 0, |f_\alpha|(x_{F_\alpha}) = 0$ при всех $\alpha \in W$;
- (г) $f_\alpha \neq f_\beta$ при $\alpha \neq \beta$.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Пусть $\{N_{\alpha\xi} : \xi \in \Sigma_\alpha\} (\alpha \in W)$ — разбиения множества N из леммы 3.2.6. Множества $N_{\alpha\xi} (\xi \in \Sigma_\alpha)$ будем для краткости называть α -множествами. Построение трёх требуемых семейств произведём индуктивно. За E_1 возьмём любое 1-множество. За f_1 возьмём любой функционал из T , такой что $f_1(x_{E_1}) \neq 0$. Наконец, за F_1 возьмём любое 1-множество, такое что $|f_1|(x_{F_1}) = 0$; существование такого множества вытекает из леммы 3.2.4 и (а) из леммы 3.2.6. Пусть теперь $\alpha \in W, \alpha > 1$ и для каждого $\beta < \alpha$ построены $f_\beta \in T, E_\beta \subset N, F_\beta \subset N$ такие что

- (д) E_β и F_β суть β -множества;
- (е) $E_\beta \neq F_\beta$, то есть $E_\beta \cap F_\beta = \emptyset$;
- (ж) если $\beta_1 < \beta_2 < \alpha$, то $F_{\beta_1} \supset E_{\beta_2} \cup F_{\beta_2}$;
- (з) $f_\beta(x_{E_\beta}) \neq 0, |f_\beta|(x_{F_\beta}) = 0$ при всех $\beta < \alpha$.

Теперь, используя лемму 3.2.4 и (в) из леммы 3.2.6, найдём

$f_\alpha \in \Gamma$ и α -множества E_α и F_α , так что $E_\alpha \cap E_\beta = \emptyset$, $f_\alpha(x_{E_\alpha}) \neq 0$, $f_\alpha(x_{F_\alpha}) = 0$, $E_\alpha \subset \bigcap_{\beta < \alpha} F_\beta$, $F_\alpha \subset \bigcap_{\beta < \alpha} F_\beta$.

Итак, построены семейства $f_\alpha, E_\alpha, F_\alpha (\alpha \in W)$, удовлетворяющие (а), (б), (в). Покажем, что тогда (г) выполнено автоматически. Действительно, если $\alpha < \beta (\alpha, \beta \in W)$, то $f_\beta(x_{E_\beta}) \neq 0$, $|f_\alpha(x_{E_\beta})| \leq |f_\alpha(x_{E_\beta})| \leq |f_\alpha(x_{F_\alpha})| = 0$, тем самым $f_\beta(x_{E_\beta}) \neq f_\alpha(x_{E_\beta})$. Откуда $f_\alpha \neq f_\beta$. Лемма доказана.

Лемма 3.2.8. Пусть как и в предыдущей лемме $T \subset (\ell_N^\infty)^*$, T -тотально на ℓ_N^∞ . Тогда существует $z \in \ell_N^\infty$ такой что $\text{card} \{f \in T : f(z) \neq 0\} \geq \aleph_1$.

Доказательство. Воспользуемся леммой

3.2.7. Для каждого $\alpha \in W$ возьмём пока произвольное $c_\alpha \in [-1, 1]$ и положим $v_\alpha = c_\alpha x_{E_\alpha}$. Пусть z есть соединение всех v_α . Для $\gamma \in W$ через z_γ обозначим соединение множества $\{v_\alpha : \alpha \leq \gamma\}$. Заметим, что $|z - z_\gamma| \leq x_{F_\gamma}$, откуда $|f_\gamma(z) - f_\gamma(z_\gamma)| \leq |f_\gamma|(z - z_\gamma) \leq |f_\gamma|(x_{F_\gamma}) = 0$, то есть $f_\gamma(z) = f_\gamma(z_\gamma)$. Итак, $f_\alpha(z) = f_\alpha(z_\alpha)$ при всех $\alpha \in W$. Отсюда ясно, что (индуктивно) числа $c_\alpha (\alpha \in W)$ можно выбрать так, что c_α равно $+1$ или -1 и $f_\alpha(z) \neq 0$ при всех $\alpha \in W$. Лемма доказана.

3. Если Γ есть произвольное множество, то $c_0(\Gamma)$ означает подпространство в ℓ_Γ^∞ , состоящее из всех $x \in \ell_\Gamma^\infty$ таких что для любого $\varepsilon > 0$ множество $\{\gamma \in \Gamma : |x(\gamma)| > \varepsilon\}$ - конечно. Напомним, что для любого $x \in c_0(\Gamma)$ справедливо $\text{card} \{\gamma \in \Gamma : x(\gamma) \neq 0\} \leq \aleph_0$.

Нам понадобится далее следующий результат Д.Амира и Дж.Линденштрауса (см.Амир, Линденштраус [1], главная теорема):

Пусть B есть банахово пространство, содержащее слабо компактное множество K , линейная оболочка которого плотна в B . Тогда существует множество Γ и взаимно однозначный линейный непрерывный оператор U из B в $C_0(\Gamma)$.

Л е м м а 3.2.9. Пусть X есть K -пространство счётного типа с тотальным \tilde{X} . Тогда существует такое множество $\pi \subset \tilde{X}$, что π тотально на X и для любого $x \in X$ множество $\{f \in \pi : f(x) \neq 0\}$ не более чем счётно.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть сначала X есть KB -пространство с единицей $\mathbb{1}$. Так как множество $\{x \in X : |x| \leq \mathbb{1}\}$ слабо компактно (см. предложение 0.3.3) и его линейная оболочка плотна в X , то применима упомянутая теорема Амбра и Линденштрауса. Пусть Γ - множество, U - взаимно однозначный линейный непрерывный оператор из X в $C_0(\Gamma)$. Положим $f_\gamma(x) = (Ux)(\gamma)$ при $x \in X$, где $\gamma \in \Gamma$. Ясно, что можно принять $\pi = \{f_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$. Второй частный случай. Пусть

X есть K -пространство с единицей и на X существует существенно положительный вполне линейный функционал f_0 . Введём на X норму, положив $\|x\|_X = f_0(|x|)$, $x \in X$. Пусть Y есть

(b) - пополнение X . Тогда Y есть KB -пространство с аддитивной нормой и X есть фундамент в Y (см. Канторович, Булих, Шварцер [1], гл. XI § 3). Следовательно, единица пространства X будет единицей и в Y . Итак, Y есть KB -пространство с единицей. В силу уже доказанного существует $\pi' \subset \tilde{Y}$, такое что π' тотально на Y и для любого $y \in Y$ множество $\{f \in \pi' : f(y) \neq 0\}$ не более чем счётно. Остаётся положить $\pi = \{f|_X : f \in \pi'\}$. Общий случай. Известно (см. Канторович, Булих,

Пинскер [1], гл. XI § 3), что существует такая система $\{X_\xi : \xi \in \Sigma\}$ попарно дизъюнктных ненулевых компонент пространства X , объединение которых есть всё X , что каждая X_ξ есть пространство с единицей и на X_ξ существует существенно положительный вполне линейный функционал. В силу уже доказанного для каждого $\xi \in \Sigma$ найдётся такое множество $\pi^\xi \subset \tilde{X}_\xi$, что π^ξ тотально на X_ξ и для любого $x \in X_\xi$ множество $\{f \in \pi^\xi : f(x) \neq 0\}$ не более чем счётно. Для каждого $f \in \pi^\xi$ построим $\hat{f} \in \tilde{X}$, положив $\hat{f}(x) = f(P_{X_\xi} x)$, $x \in X$. Пусть $\mathcal{N}_\xi = \{\hat{f} : f \in \pi^\xi\}$. Покажем, что тогда $\mathcal{N} = \bigcup_{\xi \in \Sigma} \mathcal{N}_\xi$ - требуемое множество. Ясно, что \mathcal{N} - тотально на X . Остаётся заметить, что для любого $x \in X$ множество $\{\xi \in \Sigma : P_{X_\xi} x \neq 0\}$ не более чем счётно, ибо X по условию есть пространство счётного типа. Лемма доказана.

4. Доказательство теоремы 3.2.1. Справедливость (а) \Rightarrow (в) есть следствие леммы 3.2.9. Справедливость (в) \Rightarrow (б) есть следствие леммы 3.2.8. Доказываем, что (б) \Rightarrow (а), считая справедливой континуум-гипотезу. Пусть семейство $\{x_\xi : \xi \in \Sigma\}$ элементов из X таково, что: (а) $\|x_\xi\| > 0$ при всех $\xi \in \Sigma$; (б) $x_{\xi_1} \wedge x_{\xi_2} = 0$ при $\xi_1 \neq \xi_2$; (в) $\text{card } \Sigma > \aleph_0$; (г) существует $\sup x_\xi \in X$. Ясно, что существует $\alpha \in (0, +\infty)$, такое что $\text{card } \{\xi \in \Sigma : \|x_\xi\|_X \geq \alpha\} > \aleph_0$. Так как континуум-гипотеза предполагается справедливой, то можно считать, что $H \subset \{\xi \in \Sigma : \|x_\xi\|_X \geq \alpha\}$. Для любого $x = \{\lambda_\xi : \xi \in H\} \in \ell_H^\infty$ через $\mathcal{U}x$ обозначим объединение элементов $\lambda_\xi x_\xi$ при $\xi \in H$. Ясно, что $\alpha \|x\|_{\ell_H^\infty} \leq \|\mathcal{U}x\|_X \leq \beta \|x\|_{\ell_H^\infty}$ для всех $x \in \ell_H^\infty$, где

$\delta = \|\sup \{x_\xi : \xi \in N\}\|_X$. Отсюда следует, что $U(l_N^\infty)$ есть подпространство в X , изоморфное l_N^∞ . Противоречие. Теорема 3.2.1 доказана.

З а м е ч а н и е 3.2.10. Из доказательства видно, что в теореме 3.2.1 импликация (а) \implies (в) и (в) \implies (б) справедливы и без предположения о справедливости континуум-гипотезы.

§ 3. Слабая* секвенциальная компактность

1. Напомним, что топологическое пространство Γ называется **СЕКВЕНЦИАЛЬНО КОМПАКТНЫМ**, если любая последовательность $\Gamma_n \in \Gamma$ ($n \in \mathbb{N}$) содержит сходящуюся подпоследовательность Γ_{n_k} ($k \in \mathbb{N}$). Хорошо известно (теорема Эберлейна), что для ограниченного слабо замкнутого подмножества банахова пространства слабая секвенциальная компактность эквивалентна слабой компактности. В то же время для произвольного банахова пространства E единичный шар $\{f \in E^* : \|f\|_{E^*} \leq 1\}$ сопряженного пространства E^* далеко не всегда слабо* секвенциально компактен, хотя он всегда слабо* компактен. В связи с этим отметим результат Амра и Линденштраусса (см. Амр, Линденштраусс [1], следствие 2): если в банаховом пространстве E существует слабо компактное множество, линейная оболочка которого плотна в E , то единичный шар пространства E^* слабо* секвенциально компактен.

Основной результат этого параграфа - следующий.

Теорема 3.3.1. ПУСТЬ X — БАНАХОВО K, N — ПРОСТРАНСТВО. ТОГДА (В ПРЕДПОЛОЖЕНИИ СПРАВЕДЛИВОСТИ КОНТИНУУМ-ГИПОТЕЗЫ) СЛЕДУЮЩИЕ УТВЕРЖДЕНИЯ ЭКВИВАЛЕНТНЫ:

(а) ЕДИНИЧНЫЙ ШАР $\{f \in X^* : \|f\|_{X^*} \leq 1\}$ ПРОСТРАНСТВА X^* СЛАБО* СЕБЕВЕНЦИАЛЬНО КОМПАКТЕН;

(б) В X ВЫПОЛНЕНО УСЛОВИЕ (А) И X^* — СЧЁТНОГО ТИПА. ПРИ ЭТОМ ИМПЛИКАЦИЯ (б) \Rightarrow (а) СПРАВЕДЛИВА И БЕЗ ПРЕДПОЛОЖЕНИЯ О СПРАВЕДЛИВОСТИ КОНТИНУУМ-ГИПОТЕЗЫ.

Следствие 3.3.2^X. ДЛЯ ЛЮБОГО БАНАХОВО K, N — ПРОСТРАНСТВА X СЛЕДУЮЩИЕ УТВЕРЖДЕНИЯ ЭКВИВАЛЕНТНЫ:

(а) ЛЮБАЯ ОГРАНИЧЕННАЯ ПО НОРМЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ ЭЛЕМЕНТОВ ИЗ X СОДЕРЖИТ СЛАБО ФУНДАМЕНТАЛЬНУЮ ПОДПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ (определение слабо фундаментальной последовательности элементов банахова пространства дано в начале § 1);

(б) В X ВЫПОЛНЕНО УСЛОВИЕ (А) И X^* ЕСТЬ K, N — ПРОСТРАНСТВО.

Следствие 3.3.3. ПУСТЬ X И Y БАНАХОВЫ K, N — ПРОСТРАНСТВА, УДОВЛЕТВОРЯЮЩИЕ УСЛОВИЮ (А), ПРИЧЁМ X^* — СЧЁТНОГО ТИПА, А Y^* НЕ ЕСТЬ ПРОСТРАНСТВО СЧЁТНОГО ТИПА. ТОГДА (В ПРЕДПОЛОЖЕНИИ СПРАВЕДЛИВОСТИ КОНТИНУУМ-ГИПОТЕЗЫ) НИКАКОЕ ПОДПРОСТРАНСТВО ПРОСТРАНСТВА X НЕ ИЗОМОРФНО ПРОСТРАНСТВУ Y . НАПОМНИМ, ЧТО ТЕРМИНЫ "ПОДПРОСТРАНСТВО" И "ИЗОМОРФИЗМ" ИСПОЛЬЗУЮТСЯ ЗДЕСЬ ИСКЛЮЧИТЕЛЬНО В СМЫСЛЕ ТЕОРИИ ЛИНЕЙНЫХ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ.

Доказательства следствий 3.3.2 и 3.3.3 приведены после доказательства теоремы 3.3.1.

^X) В следствии 3.3.2 справедливость континуум-гипотезы не предполагается.

2. Доказательство теоремы 3.3.1. Дока-
 зываем, что (б) \implies (а). Пусть $\{f_n \in X^*, \|f_n\|_{X^*} \leq 1 \ (n \in \mathbb{N})$. Пусть
 X_n есть компонента существенной положительности функциона-
 ла $|f_n| \ (n \in \mathbb{N})$. Так как $\bar{X} = X^*$ - счётного типа, то макси-
 мальное расширение пространства X_n есть пространство счёт-
 ного типа. Поэтому X_n есть пространство с единицей. Пусть
 E есть наименьшая компонента пространства X , содержа-
 щая все $X_n \ (n \in \mathbb{N})$. Тогда E тоже есть пространство с
 единицей. Заметим, что в E существует слабо компактное
 множество, линейная оболочка которого плотна в E . Действи-
 тельно, таким множеством является $\{x \in E : |x| \leq \mathbb{1}\}$, где
 $\mathbb{1}$ есть единица в E . Из упомянутого в п.1 результата Амира
 и Липценштраусса теперь следует, что единичный шар простран-
 ства E^* слабо* секвенциально компактен. Поэтому найдёт-
 ся последовательность $n_k \in \mathbb{N} \ (k \in \mathbb{N})$, такая что $n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$
 и последовательность $\{n_k | E \ (k \in \mathbb{N})$ слабо* сходится в E^* .
 Ясно, что тогда последовательность $\{f_{n_k} \ (k \in \mathbb{N})$ слабо* сходится
 в X^* , ибо для любого $x \in X$ справедливо $f_{n_k}(x) = f_{n_k}(P_{E^*} x) \ (k \in \mathbb{N})$.

Доказываем, что (а) \implies (б). Допустим, что в X не вы-
 полнено условие (А). Тогда по теореме 3.1.2 в X сущест-
 вует подпространство, изоморфное пространству ℓ^∞ . Это не-
 возможно, ибо, во-первых, единичный шар пространства $(\ell^\infty)^*$
 не является слабо* секвенциально компактным (из последо-
 вательности координатных функционалов нельзя извлечь слабо*
 сходящуюся подпоследовательность), во-вторых, из теоремы Хана-
 —Банаха очевидным образом следует, что для любого подпростран-

ства Y пространства X единичный шар пространства Y^* слабо* секвенциально компактен. Итак, в X выполнено условие (A). Докажем теперь, считая справедливой континуум-гипотезу, что X^* — счётного типа. Обозначим через Ξ множество всех строго возрастающих последовательностей натуральных чисел. Ясно, что Ξ имеет мощность континуума. Допустим, что X^* не есть пространство счётного типа. Тогда найдётся такое семейство $\{f_\xi : \xi \in \Xi\}$ в X^* , что: 1) $f_\xi > 0$ при всех $\xi \in \Xi$; 2) $f_{\xi_1} \wedge f_{\xi_2} = 0$ при $\xi_1 \neq \xi_2$; 3) существует $\sup\{f_\xi : \xi \in \Xi\} = f \in X^*$. Для каждого $\xi \in \Xi$ найдём такой $e_\xi \in X_+$, что $f_\xi(e_\xi) \geq 1$ и e_ξ принадлежит компоненте существенной положительности функционала f_ξ . Заметим, что $e_{\xi_1} \wedge e_{\xi_2} = 0$ при $\xi_1 \neq \xi_2$. Для любого $\xi = (n_1, n_2, \dots, n_k, \dots) \in \Xi$ и любого $m \in \mathbb{N}$ положим

$$\varphi_{m,\xi} = \begin{cases} 0, & \text{если } m = n_k \text{ при чётном } k \\ f_\xi, & \text{если } m = n_k \text{ при нечётном } k \text{ или} \\ & \text{если } m \neq n_k \text{ ни при каком } k. \end{cases}$$

Положим теперь $F_m = \sup\{\varphi_{m,\xi} : \xi \in \Xi\}$, $m \in \mathbb{N}$. Рассмотрим последовательность $\{F_m\}_{m \in \mathbb{N}}$. Ясно, что $0 \leq F_m \leq f$ при всех $m \in \mathbb{N}$. Осталось показать, что последовательность $\{F_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ не содержит слабо* сходящейся подпоследовательности. Возьмём произвольное $\xi_0 = (m_1, m_2, \dots, m_k, \dots) \in \Xi$ и покажем, что последовательность $\{F_{m_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ не является слабо* сходящейся. Рассмотрим числовую последовательность $\{F_{m_k}(e_{\xi_0})\}_{k \in \mathbb{N}}$. Если $k \in \mathbb{N}$ — чётное число, то $F_{m_k}(e_{\xi_0}) = (\sup_{\xi \in \Xi} \varphi_{m_k, \xi})(e_{\xi_0}) = \varphi_{m_k, \xi_0}(e_{\xi_0}) = 0$. Если же $k \in \mathbb{N}$ — нечётное число, то $F_{m_k}(e_{\xi_0}) = \varphi_{m_k, \xi_0}(e_{\xi_0}) = f_{\xi_0}(e_{\xi_0}) \geq 1$.

Тем самым последовательность $\{F_{m_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ не является слабо* сходящейся. Теорема доказана.

3. Доказательство следствия 3.3.2. Доказываем, что (б) \implies (а). Не умаляя общности, можно считать, что X есть пространство с единицей, ибо всякое счётное множество элементов из X содержится в главной компоненте пространства X . Так как в X есть единица и X - счётного типа, то и максимальное расширение пространства X есть пространство счётного типа. Отсюда следует, что $X^{**} = \overline{X}$ есть пространство счётного типа. Поэтому в силу теоремы 3.3.1 единичный шар пространства X^{**} слабо* секвенциально компактен. Остаётся воспользоваться естественным вложением X в X^{**} . Доказываем, что (а) \implies (б). Ясно, что X не содержит подпространства, изоморфного пространству ℓ^1 , ибо последовательность ортов пространства ℓ^1 не содержит никакой слабо фундаментальной подпоследовательности. Поэтому X не содержит подпространства, изоморфного пространству $C[0,1]$, так как $C[0,1]$ содержит подпространство, линейно изометричное пространству ℓ^1 . Теперь из теоремы 3.1.2 следует, что в X выполнено условие (А). Так как X не содержит подпространства, изоморфного пространству ℓ^1 , то (см. Бессага и Пелчильский [1], теорема 1) X^* не содержит подпространства, изоморфного пространству ℓ^∞ . Тогда по теореме 3.1.2 в X^* выполнено условие (А), а так как условие (В) в X^* выполнено тривиальным образом, то X^* есть КВ-пространство.

Доказательство следствия 3.3.3. В силу теоремы 3.3.1 единичный шар пространства Y^* не является

слабо* секвенциально компактны. Остаётся заметить, что из теоремы 3.3.1 и теоремы Хана-Банаха следует, что для любого подпространства Z пространства X единичный шар в Z^* слабо* секвенциально компактен.

4. З а м е ч а н и е 3.3.4. В доказательстве теоремы 3.3.1 предположение о справедливости континуум-гипотезы использовалось только при доказательстве того, что из слабой* секвенциальной компактности шара $\{f \in X^* : \|f\|_{X^*} \leq 1\}$ следует, что пространство X^* -счётного типа. Пусть ZF - система аксиом Цермело-Френкеля теории множеств, C - аксиома выбора. Пусть \mathcal{D} - хаусдорфово пространство из двух элементов, \mathcal{D}^{N_1} - топологическое произведение N_1 экземпляров пространства \mathcal{D} . В заметке (Бут [1]) приведено (без доказательства) следующее утверждение: если система ZF непротиворечива, то система $ZFC + (\mathcal{D}^{N_1} \text{ - секвенциально компактно})$ тоже непротиворечива.

Пусть $I = [-1, 1]$, I^{N_1} - топологическое произведение N_1 экземпляров пространства I . Без всякого труда (с помощью разложения вещественного числа в двоичную дробь) проверяется, что $(\mathcal{D}^{N_1} \text{ - секвенциально компактно}) \Rightarrow (I^{N_1} \text{ - секвенциально компактно})$. Пусть Γ - некоторое множество мощности N_1 . Обозначим через X пространство ℓ_Γ^1 . Ясно, что шар $\{f \in X^* : \|f\|_{X^*} \leq 1\}$ наделён слабой* топологией, гомеоморфен пространству I^{N_1} . Поэтому из цитированного результата Бута вытекает следующее: если система ZF непротиворечива, то непротиворечива и система $ZFC + (\text{шар } \{f \in X^* : \|f\|_{X^*} \leq 1\} \text{ слабо* секвенциально компактен})$. Но пространство X^* , очевидно, не

есть пространство счётного типа. Поэтому (если результат Бурбаки верен) в формулировке теоремы 3.3.1 нельзя отбросить предположение о справедливости континуум гипотезы.

§ 4. Сопряжённое в смысле Накано и банахову сопряжённому пространству

Напомним, что всюду в этой главе термины "подпространство" и "изоморфизм" используются исключительно в смысле теории линейных топологических пространств, а не теории полуупорядоченных пространств. Если E - нормированное пространство, то $\mathcal{K}: E \rightarrow E^{**}$ есть оператор естественного вложения. Напомним, также следующее определение, которое будет играть важную роль в этом параграфе. Пусть X - линейное топологическое пространство, $\{x_t : t \in T\}$ - некоторое семейство его элементов.

Пусть $\mathcal{P}(T)$ - совокупность всех конечных подмножеств множества T , упорядоченная по включению. Говорят, что семейство $\{x_t : t \in T\}$ суммируемо к элементу $x \in E$, если $\lim_{\sigma \in \mathcal{P}(T)} \sum_{t \in \sigma} x_t = x$.

I. В этом пункте будут доказаны некоторые вспомогательные утверждения.

Л е м м а 3.4.1. Пусть X - архимедов (?) -полный K -линеал, $\{f_t : t \in T\}$ - семейство регулярных функционалов на X , такое что $\sup\{|f_t(x)| : t \in T\} < +\infty$ для любого $x \in X$. Тогда $\sup\{|f_t|(x) : t \in T\} < +\infty$ для любого $x \in X_+$.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Фиксируем произвольный $x \in X_+$. Пусть $y = x_x$, причём $\|\cdot\|_y = \|\cdot\|_x$, то есть

$\|\cdot\|_Y$ — есть естественная норма $\mathbb{K}N$ -линеала ограниченных элементов. Так как X — (2)-полон, то норма $\|\cdot\|_Y$ — банахова. Положим $q_t = f_t|_Y$ ($t \in T$). Так как семейство $\{q_t : t \in T\}$ слабо ограничено, то $\sup\{\|q_t\|_{Y^*} : t \in T\} < +\infty$. Следовательно, семейство $\{q_t| : t \in T\}$ тоже ограничено по норме в Y . Поэтому $\sup\{q_t|(x) : t \in T\} < +\infty$, то есть $\sup\{|\varphi_t(x)| : t \in T\} < +\infty$.

Л е м м а 3.4.2. Пусть E — слабо секвенциально полное банахово пространство, $\{x_t : t \in T\}$ — семейство его элементов, такое что $\sum_{t \in T} |\varphi(x_t)| < +\infty$ для любого $\varphi \in E^*$. Тогда: (а) множество $\{t \in T : x_t \neq 0\}$ не более чем счётно; (б) семейство $\{x_t : t \in T\}$ суммируемо в нормированной топологии пространства E .

Д о к а з а т е л ь с т в о . Допустим, что множество $\{t \in T : x_t \neq 0\}$ несчётно. Тогда найдутся число $\alpha > 0$ и последовательность $t_n \in T$ ($n \in \mathbb{N}$), такие что $t_i \neq t_k$ при $i \neq k$ и $\|x_{t_i}\| \geq \alpha$ при всех $i \in \mathbb{N}$. Рассмотрим ряд $\sum_{i=1}^{\infty} x_{t_i}$. Так как $\sum_{i=1}^{\infty} |\varphi(x_{t_i})| < +\infty$ для любого $\varphi \in E^*$, то в силу теоремы Орлича-Банаха (см. Данфорд, Шварц [1], стр. 107) ряд $\sum_{i=1}^{\infty} x_{t_i}$ безусловно сходится в нормированной топологии пространства E , откуда $\|x_{t_i}\| \rightarrow 0$ при $i \rightarrow \infty$. Противоречие. Итак, множество $\{t \in T : x_t \neq 0\}$ не более чем счётно. Ещё раз применив упомянутую теорему Орлича-Банаха и хорошо известные соотношения между различными типами сходимости рядов в банаховом пространстве (см. Дэй [1], стр. 102, 103), получим второе утверждение леммы.

Л е м м а 3.4.3. Пусть X — $\mathbb{K}N$ -линеал ограниченных элементов, $\{\varphi_t : t \in T\}$ — семейство элементов пространства

X^* , такое что $\sum_{t \in T} |f_t(x)| < +\infty$ для любого $x \in X$. Тогда:
 (а) множество $\{t \in T : f_t \neq 0\}$ не более чем счётно; (б) семейство $\{f_t : t \in T\}$ суммируемо в нормированной топологии пространства X^* .

Доказательство. Так как X^* есть \mathbb{K} -пространство с аддитивной нормой, то X^* слабо секвенциально полно по теореме Огасавара (см. теорему 0.3.8). Поэтому в силу леммы 3.4.2 достаточно только проверить, что $\sum_{t \in T} |F(f_t)| < +\infty$ для любого $F \in X^{**}$. Пусть H есть совокупность всех $f \in X^*$, допускающих представление вида $f = \sum_{k=1}^n \delta_k f_{t_k}$, где $n \in \mathbb{N}$ — любое, δ_k есть число, равное $+1$ или -1 , $t_k \in T$ ($k=1, \dots, n$). Ясно, что $|f(x)| \leq \sum_{t \in T} |f_t(x)| < +\infty$ для любых $f \in H, x \in X$. Поэтому $\sup\{|f(x)| : f \in H\} < +\infty$ для любого $x \in X$. Следовательно, $\sup\{\|f\|_{X^*} : f \in H\} = M < +\infty$. Теперь ясно, что

$\sum_{t \in T} |F(f_t)| \leq M \|F\|_{X^{**}} < +\infty$ для любого $F \in X^{**}$. Лемма доказана.

Лемма 3.4.4. Пусть X — \mathbb{K} -линеал, $\{f_t : t \in T\}$ — семейство попарно дизъюнктивных элементов в \tilde{X} , такое что существует соединяние $\sum_T f_t = f \in \tilde{X}$. Тогда $\sum_{t \in T} |f_t(x)| < +\infty$,
 $\sum_{t \in T} f_t(x) = f(x)$ для любого $x \in X$.

Доказательство. Пусть $\mathcal{P}(T)$ есть совокупность всех конечных подмножеств множества T , упорядоченная по включению. Так как $\sum_T |f_t| = |f|$, то для любого $x \in X$ имеем $\sum_{t \in T} |f_t(x)| \leq \sum_{t \in T} |f_t|(x) \leq |f|(x)$. Далее, так как $f = (0)\text{-}\lim_{B \in \mathcal{P}(T)} \sum_{t \in B} f_t$, то (см. Булик [6], стр. 233, теорема III.2.3) $f(x) = \lim_{B \in \mathcal{P}(T)} \sum_{t \in B} f_t(x) = \sum_{t \in T} f_t(x)$. Лемма доказана.

Предложение 3.4.5. Пусть X - архимедов (\mathcal{V})-полный K -линеал, V - идеал в \tilde{X} , R - компонента в \tilde{X} , порождённая V . Пусть f - аддитивный и однородный функционал на X . Следующие утверждения эквивалентны:

(a) $f \in R$;

(б) существует такое семейство $\{f_t : t \in T\}$ в V , что

$$\sum_{t \in T} |f_t(x)| < +\infty, \sum_{t \in T} f_t(x) = f(x) \text{ для любого } x \in X.$$

Доказательство. (a) \implies (б). Возьмём максимальное семейство $\{R_t : t \in T\}$ ненулевых попарно дизъюнктивных компонент K -пространства R , таких что $f_t = R_{R_t} f \in V$. Ясно, что $f = \sum_T f_t$. В силу леммы 3.4.4 семейство $\{f_t : t \in T\}$ - искомое.

(б) \implies (a). Из леммы 3.4.3 следует, что сужение f на любой главный идеал в X есть регулярный функционал на этом главном идеале. Поэтому для любых $x_1 < x_2$ ($x_1, x_2 \in X$) справедливо $\sup\{|f(x)| : x \in X, x_1 < x \leq x_2\} < +\infty$. Тем самым $f \in \tilde{X}$.

Докажем, что $f \in R$. Достаточно показать, что если $q \in \tilde{X}_+$, q дизъюнктивен R , то $q \wedge |f| = 0$. Возьмём произвольный $u \in X_+$

и рассмотрим KV -линеал ограниченных элементов X_u . Положим $f' = f|_{X_u}$, $q' = q|_{X_u}$, $f'_t = f_t|_{X_u}$. Так как $|f'_t| \wedge q' = 0$ при всех $t \in T$, то в силу леммы 3.4.3 имеем $|f'| \wedge q' = 0$. Итак, сужения f и

q на любой главный идеал в X - дизъюнктивны. Отсюда ясно, что $q \wedge |f| = 0$. Предложение 3.4.5 доказано.

Следствие 3.4.6. Пусть X есть K -пространство, f - аддитивный и однородный функционал на \tilde{X} . Следующие утверждения эквивалентны:

(a) $f \in \tilde{X}$;

(б) существует такое семейство $\{x_t: t \in T\}$ в X , что $\sum_{t \in T} |f(x_t)| < +\infty$, $\sum_{t \in T} f(x_t) = F(f)$ для любого $f \in \bar{X}$.

Доказательство. В силу теоремы Накано (Булик [6], стр. 289, теорема IX.5.2) образ X при естественном вложении в \bar{X} есть фундамент в \bar{X} . Остаётся применить предложение 3.4.5.

Лемма 3.4.7. Пусть X есть K -пространство с тотальным \bar{X} . $q \in \tilde{X}$, но $q \notin \bar{X}$. Тогда существует такое семейство $\{x_t: t \in T\}$ в X , что:

- (а) $\sum_{t \in T} |f(x_t)| < +\infty$ для любого $f \in \tilde{X}$;
- (б) $\sum_{t \in T} f(x_t) = 0$ для любого $f \in \bar{X}$;
- (в) $\sum_{t \in T} q(x_t) \neq 0$.

Доказательство. Пусть $q = q_1 + q_2$, где $q_1 \in \bar{X}$, $q_2 \in \tilde{X}_{ant}$. Фиксируем $x \in X_+$, такой что $q_2(x) \neq 0$. Так как $\tilde{X}_{ant} = \tilde{X}_{an}$ (см. теорему 0.4.1), то существует такой фундамент Φ в X , что $q_2(y) = 0$ для любого $y \in \Phi$. Пусть N есть максимальное множество, состоящее из ненулевых попарно дельзюневых осколков элемента x , принадлежащих Φ . Ясно, что $\text{sup } N = x$. Положим $N_1 = N \cup \{-x\}$. Покажем, что тождественное отображение N_1 на N_1 и есть искомое семейство. Действительно $\sum_{y \in N_1} |f(y)| = \sum_{y \in N} |f(y)| + |f(x)| \leq |f|(x) + |f|(x)$ для любого $f \in \tilde{X}$. Если $f \in \bar{X}$, то $\sum_{y \in N_1} f(y) = \sum_{y \in N} f(y) + f(-x) = f(x) - f(x) = 0$. Наконец, $\sum_{y \in N_1} q(y) = \sum_{y \in N_1} q_2(y) = \sum_{y \in N} q_2(y) + q_2(-x) = 0 - q_2(x) \neq 0$. Лемма доказана.

Л е м м а 3.4.8. Пусть X - рефлексивное K -пространство, Y - некоторое подмножество в \bar{X} , причём Y тотально на X . Пусть семейство $\{x_f : f \in T\}$ в X таково, что:

$$(a) \sum_{f \in T} |f(x_f)| < +\infty \quad \text{для любого } f \in \bar{X} ;$$

$$(b) \sum_{f \in T} f(x_f) = 0 \quad \text{для любого } f \in Y .$$

Тогда $\sum_{f \in T} f(x_f) = 0$ для любого $f \in \bar{X}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Для любого $f \in \bar{X}$ положим $F(f) = \sum_{f \in T} f(x_f)$. Тогда $F \in \bar{X}$ в силу следствия 3.4.6. Так как X - рефлексивно, то найдётся такой $x \in X$, что $F(f) = f(x)$ для любого $f \in \bar{X}$. Тогда $f(x) = 0$ для любого $f \in Y$. Отсюда $x = 0$, тем самым $F = 0$. Лемма доказана.

2. О п р е д е л е н и е 3.4.9. Пусть E - произвольное нормированное пространство. Через $(E^{**})^{\mathcal{T}}$ обозначаем совокупность всех $F \in E^{**}$, таких что $\sum_{f \in T} F(f) = 0$ для любого семейства $\{f_f : f \in T\}$ в E^* , удовлетворяющего условиям:

$$(a) \sum_{f \in T} |G(f_f)| < +\infty \quad \text{для любого } G \in E^{**} .$$

$$(b) \sum_{f \in T} f_f(x) = 0 \quad \text{для любого } x \in E .$$

О п р е д е л е н и е 3.4.10. Пусть E - произвольное нормированное пространство. Через $(E^{**})_{\mathcal{T}}$ обозначаем совокупность всех $F \in E^{**}$, таких что существует семейство $\{x_f : f \in T\}$ в E , удовлетворяющее условиям:

$$(a) \sum_{f \in T} |f(x_f)| < +\infty \quad \text{для любого } f \in E^* ;$$

$$(б) \sum_{f \in \Gamma} f(x_f) = F(f) \text{ для любого } f \in E^* .$$

З а м е ч а н и е 3.4.11. Подчеркнём, что в определениях 3.4.9 и 3.4.10 E есть произвольное нормированное пространство, наличия какого бы то ни было частичного упорядочения в E не требуется.

Следующая теорема является основным результатом этого параграфа.

Т е о р е м а 3.4.12. ДЛЯ ЛЮБОГО KN -ЛИНЕАЛА X СПРАВЕДИМО РАВЕНСТВО $\overline{X^*} = (X^{**})^{\mathfrak{A}}$, ГДЕ $\overline{X^*}$ ЕСТЬ СОПРЯЖЁННОЕ ПО НАКАНО ПРОСТРАНСТВО К БАНАХОВУ СОПРЯЖЁННОМУ X^* .

З а м е ч а н и е 3.4.13. Из теоремы 3.4.12 вытекает следующее. Пусть E - произвольное линейное множество, $\| \cdot \|_1$ и $\| \cdot \|_2$ - две эквивалентные нормы на E . K_1 и K_2 - два конуса в E , причём $X_1 = (E, K_1, \| \cdot \|_1)$ и $X_2 = (E, K_2, \| \cdot \|_2)$ суть KN -линеалы. Тогда $\overline{X_1^*} = \overline{X_2^*}$. В этом смысле можно сказать, что для любого KN -линеала X пространство $\overline{X^*}$ полностью определяется нормированной топологией пространства X .

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 3.4.12. Покажем, что $\overline{X^*} \subset (X^{**})^{\mathfrak{A}}$. Пусть $F \in \overline{X^*}$. Возьмём произвольное семейство $\{f_t : t \in \Gamma\}$ в X^* , удовлетворяющее условиям (а) и (б) из определения 3.4.9. Так как X^* есть рефлексивное K -пространство, $\mathfrak{A}(X) \subset \overline{X^*}$ и $\mathfrak{A}(X)$ тотально на X^* , то $\sum_{f \in \Gamma} F(f_t) = 0$ в силу леммы 3.4.8. Тем самым $F \in (X^{**})^{\mathfrak{A}}$. Докажем, что $(X^{**})^{\mathfrak{A}} \subset \overline{X^*}$. Пусть $F \in (X^{**})^{\mathfrak{A}}$, но $F \notin \overline{X^*}$. В силу леммы 3.4.7 существует семейство $\{f_t : t \in \Gamma\}$ в X^* , такое что $\sum_{f \in \Gamma} |F(f_t)| < +\infty$

для любого $f \in X^{**}$, $\sum_{t \in T} G(\frac{f}{t}) = 0$ для любого $f \in \overline{X^*}$, но $\sum_{t \in T} F(\frac{f}{t}) \neq 0$. Следовательно, $F \notin (X^{**})^{\mathfrak{A}}$. Тем самым $(X^{**})^{\mathfrak{A}} \subset \overline{X^*}$. Теорема доказана.

Предложение 3.4.14. Для любого KN -линейного пространства X справедливо $\mathfrak{A}(X) \subset (X^{**})_{\mathfrak{A}} \subset (X^{**})^{\mathfrak{A}}$. Здесь $\mathfrak{A}: X \rightarrow X^{**}$ - оператор естественного вложения.

Доказательство. Включение $\mathfrak{A}(X) \subset (X^{**})_{\mathfrak{A}}$ тривиально. Включение $(X^{**})_{\mathfrak{A}} \subset \overline{X^*}$ следует из предложения 3.4.5, ибо $\mathfrak{A}(X) \subset \overline{X^*}$, а $\overline{X^*}$ есть компонента в X^{**} . Остаётся заметить, что $\overline{X^*} = (X^{**})^{\mathfrak{A}}$ в силу теоремы 3.4.12.

Предложение 3.4.15. Пусть X есть KN -пространство, удовлетворяющее условию (A). Тогда $(X^{**})_{\mathfrak{A}} = (X^{**})^{\mathfrak{A}}$.

Доказательство. Так как $\mathfrak{A}(X)$ есть фундамент в $\overline{X^*}$, то $(X^{**})_{\mathfrak{A}} = \overline{X^*}$ в силу предложения 3.4.5. Тем самым $(X^{**})_{\mathfrak{A}} = (X^{**})^{\mathfrak{A}}$.

Замечание 3.4.16. Если не требовать, чтобы банахово KN -пространство X удовлетворяло условию (A), то, вообще говоря, $(X^{**})_{\mathfrak{A}} \neq (X^{**})^{\mathfrak{A}}$. Более того, как показывает следующее предложение, эти множества даже могут иметь разную мощность.

Предложение 3.4.17. Пусть $X = l^{\infty}$. Тогда $\text{card}(X^{**})_{\mathfrak{A}} \neq \text{card}(X^{**})^{\mathfrak{A}}$.

Доказательство. Покажем сначала, что $\text{card}(X^{**})_{\mathfrak{A}} = \aleph$, где \aleph есть мощность континуума. Возьмём произвольное семейство $\{x_t: t \in T\}$ в X , такое что $\sum_{t \in T} |f(x_t)| < +\infty$ для любого $f \in X^*$. Пусть $x_t = (\xi_{1t}, \xi_{2t}, \dots, \xi_{nt}, \dots)$. Так

как $\sum_{t \in T} |\xi_{nt}| < +\infty$ для любого $n \in N$, то множество $\{t \in T : x_t \neq 0\}$ не более чем счётно. Отсюда ясно, что $\text{card}(X^{**})_{\mathfrak{A}} \leq N$. Так как, кроме того, $\mathfrak{A}(X) \subset (X^{**})_{\mathfrak{A}}$, то $\text{card}(X^{**})_{\mathfrak{A}} = N$. Заметим теперь, что $(X^{**})^{\mathfrak{A}} = \overline{X^*} = X^{**}$, ибо X^* есть КВ-пространство с аддитивной нормой. Отсюда легко следует, что $\text{card}(X^{**})^{\mathfrak{A}} \geq 2^{2^N}$. Действительно, X допускает представление в виде $C(\beta N)$, где βN есть чеховское бикомпактное расширение пространства N , рассматриваемого с дискретной топологией, поэтому уже мощность дискретной компоненты пространства X^{**} не меньше $2^{\text{card} \beta N} = 2^{2^N}$. Итак, $\text{card}(X^{**})_{\mathfrak{A}} \neq \text{card}(X^{**})^{\mathfrak{A}}$.

Предложение 3.4.18. Для произвольного КН-линеала X следующие утверждения эквивалентны:

- (а) X есть КВ-пространство;
- (б) $\mathfrak{A}(X) = (X^{**})_{\mathfrak{A}}$;
- (в) $\mathfrak{A}(X) = (X^{**})^{\mathfrak{A}}$.

Доказательство. Если X есть КВ-пространство, то $\mathfrak{A}(X) = \overline{X^*}$. Но $\mathfrak{A}(X) \subset (X^{**})_{\mathfrak{A}} \subset (X^{**})^{\mathfrak{A}} = \overline{X^*}$. Поэтому, если X есть КВ-пространство, то $\mathfrak{A}(X) = (X^{**})_{\mathfrak{A}} = (X^{**})^{\mathfrak{A}}$. Тем самым, импликация (а) \implies (б) и (а) \implies (в) — доказаны. Если $\mathfrak{A}(X) = (X^{**})^{\mathfrak{A}}$, то есть $\mathfrak{A}(X) = \overline{X^*}$, то X есть КВ-пространство в силу (Вулик [6], стр. 293, теорема IX.7.3); это доказывает импликацию (в) \implies (а). Докажем, что (б) \implies (а). Пусть $\mathfrak{A}(X) = (X^{**})_{\mathfrak{A}}$. Докажем сначала, что X полно по норме. Пусть $x_n \in X$ ($n \in N$), причём $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|_X < +\infty$. Положим $F(\{ \}) = \sum_{n=1}^{\infty} f(x_n)$, $f \in X^*$. Тогда $F \in (X^{**})_{\mathfrak{A}}$. Пусть $x = \mathfrak{A}^{-1} F$. Ясно, что $\| \sum_{n=1}^k x_n - x \|_X \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$. Возьмём теперь произвольную после-

довательность $x_n \in X$ ($n \in \mathbb{N}$), такую что $\sum_{n=1}^{\infty} |f(x_n)| < +\infty$ для любого $f \in X^*$. Из равенства $\mathcal{N}(X) = (X^{**})^{\mathcal{N}}$ следует, что существует $x \in X$, такой что $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f(x_n)$ для любого $f \in X^*$. Остаётся применить теорему 0.3.8.

Теорема 3.4.19. ПУСТЬ X И Y - ПРОИЗВОЛЬНЫЕ $\mathbb{K}\mathbb{N}$ -ЛИНЕАЛЫ, $U \in N_f(X \rightarrow Y)$. ТОГДА $U^{**}(\overline{X^*}) \subset \overline{Y^*}$. ЗДЕСЬ U^{**} - ВТОРОЙ СОПРЯЖЁННЫЙ ОПЕРАТОР KU .

Доказательство. Воспользуемся тем, что $\overline{X^*} = (X^{**})^{\mathcal{N}}$, $\overline{Y^*} = (Y^{**})^{\mathcal{N}}$. Фиксируем произвольный $G \in (X^{**})^{\mathcal{N}}$. Возьмём произвольное семейство $\{f_t : t \in T\}$ в Y^* , такое что $\sum_{t \in T} |F(f_t)| < +\infty$ для любого $F \in Y^{**}$ и $\sum_{t \in T} f_t(\psi) = 0$ для любого $\psi \in Y$. Рассмотрим семейство $\{U^* f_t : t \in T\}$ в X^* . Для любого $F \in X^{**}$ имеем $\sum_{t \in T} |F(U^* f_t)| = \sum_{t \in T} |U^{**} F(f_t)| < +\infty$ ибо $U^{**} F \in Y^{**}$. Для любого $x \in X$ имеем $\sum_{t \in T} U^* f_t(x) = \sum_{t \in T} f_t(Ux) = 0$. Так как $G \in (X^{**})^{\mathcal{N}}$, то из сказанного следует, что $\sum_{t \in T} G(U^* f_t) = 0$, то есть $\sum_{t \in T} U^{**} G(f_t) = 0$. Тем самым $U^{**} G \in (Y^{**})^{\mathcal{N}}$. Теорема доказана.

3. Предложение 3.4.20. Пусть E - произвольное линейное множество, K_1 и K_2 - конусы в E , $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ - две эквивалентные банаховы нормы на E , причём $X_1 = (E, K_1, \|\cdot\|_1)$ и $X_2 = (E, K_2, \|\cdot\|_2)$ суть $\mathbb{K}\mathbb{N}$ -пространства. Если X_1 рефлексивно по Накано и $\overline{X_1} \cap \overline{X_2}$ тотально на E , то $\overline{X_1} \subset \overline{X_2}$.

Доказательство. Обозначим $R = \overline{X_1} \cap \overline{X_2}$. Допустим, что существует $q \in \overline{X_1}$, такой что $q \notin \overline{X_2}$. В силу предложения 3.4.7 существует такое семейство $\{x_t : t \in T\}$ в E , что $\sum_{t \in T} |f(x_t)| < +\infty$ для любого $f \in \overline{X_2} = \overline{X_1}$, $\sum_{t \in T} f(x_t) = 0$ для любого $f \in \overline{X_2}$, но $\sum_{t \in T} q(x_t) \neq 0$. С другой стороны,

так как $\sum_{f \in \Gamma} f(x_f) = 0$ для любого $f \in R$ и R тотально на X_1 , то $\sum_{f \in \Gamma} f(x_f) = 0$ для любого $f \in \bar{X}_1$ в силу леммы 3.4.8.

Поэтому $\sum_{f \in \Gamma} q(x_f) = 0$. Противоречие. Предложение доказано.

С л е д с т в и е 3.4.21. Если в условиях предложения 3.4.20 K -пространство X_2 рефлексивно по Накано, то $\bar{X}_1 = \bar{X}_2$.

П р е д л о ж е н и е 3.4.22. Пусть E - произвольное линейное множество, K_1 и K_2 - конусы в E , причём $X_1 = (E, K_1)$ и $X_2 = (E, K_2)$ суть K -пространства. Если $\bar{X}_1 = \bar{X}_2$, то $\bar{X}_1 = \bar{X}_2$.

Это предложение есть очевидное следствие предложения 3.4.6.

А. Нелчинский доказал (см. Нелчинский [2]), что пространства ℓ^∞ и $L^\infty[0,1]$ изоморфны, то есть существует линейное непрерывное взаимнооднозначное отображение ℓ^∞ на $L^\infty[0,1]$. Следующее предложение показывает, что любое такое отображение обладает "плохими" порядковыми свойствами.

П р е д л о ж е н и е 3.4.23. Пусть U есть любой изоморфизм пространства $X = \ell^\infty$ на $Y = L^\infty[0,1]$. Тогда множество $R = U^*(\bar{Y}) \cap \bar{X}$ не является тотальным на X .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Допустим, что R тотально на X . Так как X и Y рефлексивны по Накано, то $\bar{X} = U^*(\bar{Y})$ в силу следствия 3.4.21. Тем самым U^* осуществляет изоморфизм \bar{Y} на \bar{X} . Остается напомнить, что пространства $\bar{X} = \ell^1$ и $\bar{Y} = L^1[0,1]$ не являются изоморфными. Предложение доказано.

Г л а в а I V

О (β) -СОПРЯЖЁННОМ ПРОСТРАНСТВЕ К БАНАХОВОЙ СТРУКТУРЕ И НЕКОТОРЫХ ЕГО ПОДПРОСТРАНСТВАХ

В этой главе рассматриваются разного рода вопросы, относящиеся к строению и свойствам (β) -сопряжённого пространства X^* к банаховому $K_0 N$ -пространству X .

Одним из наиболее важных результатов, связанных с вполне линейными функционалами, является уже неоднократно цитированная нами теорема Мори, Амемия, Накано (см. теорему 0.4.3). В § I гл. IV приведён результат (теорема 4.1.4), являющийся, как нам кажется, существенным усилением упомянутой теоремы японских математиков.

В § 2 гл. IV рассматриваются в основном аномальные функционалы. Введён и изучен новый класс аномальных функционалов ("локализованные функционалы"). Показано, в частности, что в наиболее важных случаях всякий аномальный функционал счётного типа — локализованный (теорема 4.2.12). Понятие локализованного функционала неоднократно используется в §§ 4—6 этой главы.

В § 3 гл. IV рассматриваются в основном особенности строения пространства X^* для того случая, когда X есть банахово $K_0 N$ -пространство, не удовлетворяющее условию (A) (теорема 4.3.1).

В этом же параграфе приведены два критерия (б) - рефлексивности KV -линеала (предложения 4.3.6 и 4.3.7), а также найдены критерии дискретности и непрерывности пространства X^* для произвольного банахова K_N -пространства X (теоремы 4.3.12 и 4.3.14). Упомянем также теорему 4.3.8 и следствие 4.3.9, являющиеся усилением одного результата Т.Шмогана.

В §§ 4 и 5 гл. IV методами теории полуупорядоченных пространств изучаются (б) - сопряжённые пространства к пространствам Марцинкевича $M(\Psi)$ и к пространствам со смешанной нормой $L^{(p,q)}$ (определения этих пространств приведены в гл. 0 § 6).

Наконец, в § 6 гл. IV рассматривается задача проектирования банаховой структуры X на её замкнутый идеал Y ; при этом используется уже упоминавшееся понятие локализованного функционала. Отметим, что теорема 4.3.4 является обобщением одного результата Т.Андо.

Из результатов этой главы теоремы 4.1.4, 4.2.12, 4.3.1 и 4.6.4 относятся к числу главных результатов диссертации.

§ I. О вполне линейных функционалах

I. В теории нормированных пространств важную роль играет понятие опорного функционала к выпуклому множеству. Напомним его.

О п р е д е л е н и е 4.1.1. Пусть E - нормированное пространство, V - выпуклое замкнутое множество в E .

x - граничная точка V , $f \in E^*$, $f \neq 0$ и $f(x) = \sup f(V)$.
Тогда f называется опорным функционалом к V в точке x ,
а x - опорной точкой множества V .

Нам понадобится далее следующий классический результат
Билла и Фелпса (см. Билл, Фелпс [1], следствие 4 теоремы 2):
если V - ограниченное замкнутое выпуклое подмножество бана-
хова пространства E , то опорные функционалы к V плотны
в E^* .

О п р е д е л е н и е 4.1.2. Пусть X - $\mathbb{K}N$ -про-
странство. Элемент $x \in X$ назовём сильным, если существует
 $f \in \bar{X} \cap X^*$, такой что $\|f\|_{X^*} = 1$ и $f(x) = \|x\|_X$. Иными сло-
вами, элемент $x \in X$ называется сильным, если существует
выпукло линейный и одновременно (в) - линейный функционал,
который опорен к множеству $\{y \in X : \|y\|_X \leq \|x\|_X\}$ в точке x .

О п р е д е л е н и е 4.1.3. Пусть X - $\mathbb{K}N$ -про-
странство. Элемент $x \in X$ назовём квазисильным, если для
любого числа $\varepsilon > 0$ существует $f \in \bar{X} \cap X^*$, такой что $\|f\|_{X^*} = 1$
и $f(x) \geq \|x\|_X - \varepsilon$.

Используя последнее определение, теорему Морк, Амеция,
Накано (см. теорему 0.4.3), можно переформулировать так: если
 X есть $\mathbb{K}N$ -пространство с тотальным \bar{X} , то все элементы
пространства X являются квазисильными тогда и только
тогда, когда норма в X универсально полунепрерывна.

С другой стороны, справедлива следующая теорема (см.
Лозановский, Меклер [1], теорема 3): если X есть $\mathbb{K}N$ -про-
странство с тотальным \bar{X} , то все элементы пространства X

сильными тогда и только тогда, когда в X выполнено условие (А). Иными словами, все элементы пространства X могут быть сильными лишь в тривиальном случае, когда $X^* \subset \bar{X}$.

Следующая теорема дополняет и уточняет оба эти результата.

Теорема 4.1.4. ПУСТЬ X — КН-ПРОСТРАНСТВО С ТОТАЛЬНЫМ \bar{X} . СЛЕДУЮЩИЕ УТВЕРЖДЕНИЯ ЭКВИВАЛЕНТНЫ:

(а) НОРМА В X УНИВЕРСАЛЬНО ПОЛУНИПРЕРЫВНА;

(б) ДЛЯ ЛЮБОГО $x \in X$ И ЛЮБОГО ЧИСЛА $\varepsilon > 0$ НАЙДЕТСЯ СИЛЬНЫЙ ЭЛЕМЕНТ $y \in X$, ТАКОЙ ЧТО $\|x - y\|_X < \varepsilon$;

(в) ДЛЯ ЛЮБОГО $x \in X_+$ И ЛЮБОГО ЧИСЛА $\varepsilon > 0$ НАЙДЕТСЯ СИЛЬНЫЙ ЭЛЕМЕНТ $y \in X$, ТАКОЙ ЧТО $(1 - \varepsilon)x \leq y \leq (1 + \varepsilon)x$;

(г) ДЛЯ ЛЮБОГО $x \in X_+$ И ЛЮБОГО ЧИСЛА $\varepsilon > 0$ НАЙДУТСЯ СИЛЬНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ $y, z \in X$, ТАКИЕ ЧТО

$$(1 - \varepsilon)x \leq y \leq x \leq z \leq (1 + \varepsilon)x.$$

Доказательство. (в) \implies (г). Фиксируем $x \in X_+$, $\varepsilon \in (0, 1)$. Положим $x_1 = (1 - \frac{\varepsilon}{2})x$, $x_2 = (1 + \frac{\varepsilon}{2})x$.

Возьмём теперь пока произвольное $\delta > 0$. По условию найдутся сильные элементы $y, z \in X$, такие что $(1 - \delta)x_1 \leq y \leq (1 + \delta)x_1$, $(1 - \delta)x_2 \leq z \leq (1 + \delta)x_2$, то есть $(1 - \delta)(1 - \frac{\varepsilon}{2})x \leq y \leq (1 + \delta)(1 - \frac{\varepsilon}{2})x$, $(1 - \delta)(1 + \frac{\varepsilon}{2})x \leq z \leq (1 + \delta)(1 + \frac{\varepsilon}{2})x$. Если $\delta > 0$ достаточно мало, то из этих неравенств следует, что $(1 - \varepsilon)x \leq y \leq x \leq z \leq (1 + \varepsilon)x$.

Импликация (г) \implies (в) тривиальна. Итак, доказано, что

(г) \iff (в). Докажем, что (в) \implies (б). Заметим, что если $z_1, z_2 \in X$ и $|z_1| = |z_2|$, то для любого $f_1 \in \bar{X}$ найдётся $f_2 \in \bar{X}$, такой что $|f_2| = |f_1|$ и $f_1(z_1) = f_2(z_2) \cdot x$. Отсюда следует, что если

^{X)} Действительно, пусть X_1 и X_2 суть две дополнительные друг к другу компоненты в X , такие что $P_{X_1} z_1 = P_{X_2} z_2$, $P_{X_2} z_1 = -P_{X_1} z_2$. Тогда можно положить $f(x) = f(P_{X_1} z_1) - f(P_{X_2} z_2) \in \bar{X}$.

$z_1, z_2 \in X, |z_1| = |z_2|$ и z_1 - сильный элемент, то и z_2 - сильный элемент. Поэтому достаточно ограничиться случаем $x > 0$.

Теперь не остаётся заметить, что из неравенства $(1-\varepsilon)x \leq y \leq (1+\varepsilon)x$ следует, что $|y-x| \leq \varepsilon x$, откуда $\|y-x\|_X \leq \varepsilon \|x\|_X$.

Докажем теперь, что (б) \Rightarrow (а). Фиксируем $x \in X$ и возьмём произвольное $\varepsilon > 0$. По условию найдутся $y \in X, \{ \in \bar{X} \cap X^*$ такие что $\|x-y\|_X < \varepsilon, \|y\|_{X^*} = 1, \{ (y) = \|y\|_X$. Тогда $\{ (x) = \{ (y) + \{ (x-y) > \|y\|_X - \|x-y\|_X > \|x\|_X - 2\varepsilon$. В силу произвольности $\varepsilon > 0$, элемент x - квазисильный. Итак, все элементы пространства X - квазисильные. Из теоремы Мори, Амеми, Накано теперь следует, что норма в X универсально полунепрерывна. Наконец, докажем, что (а) \Rightarrow (в). Положим $Y = \bar{X} \cap X^*$

и за норму $\|\cdot\|_Y$ на Y примем сужение нормы $\|\cdot\|_{X^*}$. Обозначим через Z максимальное расширение пространства Y , а через γ - оператор канонического вложения X в \bar{Y} . Напомним, что $\gamma(x)$ есть фундамент в \bar{Y} (см. Вулих [6], стр. 237, 238). Фиксируем произвольный $x > 0$ в X и произвольное число $\varepsilon > 0$. Можно считать, что x есть единица в X , ибо в противном случае вместо X мы стали бы рассматривать главную компоненту в X , порождённую элементом x . Тогда γx

есть существенно положительный вполне линейный функционал на Y . В силу (Напторович, Вулих, Шенкер [1], гл. XI § 1) найдётся фундамент L в Z , являющийся КВ-пространством с аддитивной нормой, и существенно положительный вполне линейный функционал J на L , такие что будут выполнены условия: (а) $Y \subset L$; (б) $\|y\|_L = J(|y|)$ для любого $y \in L$; (в) су-

жение $J|_Y = \gamma x$. Заметим, что для любого $F \in L^*$ справедливо равенство $\|F\|_{L^*} = \min \{ \lambda \geq 0 : |F| \leq \lambda J \}$. Множество $\mathcal{U}_Y = \{ g \in Y : \|g\|_Y \leq 1 \}$ ограничено, выпукло и (в силу предложения 0.3.6) замкнуто в банаховом пространстве L . Поэтому можно применить упомянутый в начале параграфа результат Бишопа и Фелпса, взяв $E = L$, $V = \mathcal{U}_Y$. Пусть $F \in L^*$ опорен к \mathcal{U}_Y в точке $f_0 \in \mathcal{U}_Y$ и $\|F - J\|_{L^*} \leq \varepsilon$. Из последнего неравенства следует, что $|F - J| \leq \varepsilon J$, то есть $(1 - \varepsilon)J \leq F \leq (1 + \varepsilon)J$. Отсюда $(1 - \varepsilon)J|_Y \leq F|_Y \leq (1 + \varepsilon)J|_Y$, то есть $(1 - \varepsilon)\gamma x \leq F|_Y \leq (1 + \varepsilon)\gamma x$.

Так как $\gamma(x)$ - фундамент в \bar{Y} , то найдётся $\psi \in X$ такой, что $\gamma\psi = F|_Y$. Покажем, что ψ - требуемый. Из неравенства $(1 - \varepsilon)\gamma x \leq \gamma\psi \leq (1 + \varepsilon)\gamma x$ следует, что $(1 - \varepsilon)x \leq \psi \leq (1 + \varepsilon)x$.

Используя теорему Мори, Амемия, Накано, получаем $\|g\|_X = \sup \{ f(g) : f \in \mathcal{U}_Y \} = \sup \{ F(f) : f \in \mathcal{U}_Y \} = F(f_0) = f_0(\psi)$. Теорема доказана.

Т е о р е м а 4.1.5. ПУСТЬ X - БАНАХОВО КН-ПРОСТРАНСТВО С ТОТАЛЬНЫМ \bar{X} , НОРМА В X УНИВЕРСАЛЬНО ПОЛУНЕПРЕРЫВНА И УНИВЕРСАЛЬНО МОНОТОННО ПОЛНА. ПУСТЬ $\mathcal{U}_X = \{ x \in X : \|x\|_X \leq 1 \}$. ТОГДА СПРАВЕДИЛИВЫ СЛЕДУЮЩИЕ УТВЕРЖДЕНИЯ:

(а) для любого $f \in \bar{X}$ и любого $\varepsilon > 0$ найдётся такой $g \in \bar{X}$, что $\|f - g\|_{X^*} < \varepsilon$ и g опорен к \mathcal{U}_X ;

(б) для любого ненулевого $f \in \bar{X}_+$ и любого $\varepsilon > 0$ найдётся такие $g, h \in \bar{X}$, что $(1 - \varepsilon)f \leq g \leq f \leq h \leq (1 + \varepsilon)f$. причём g и h опорны к \mathcal{U}_X .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из теоремы 0.5.9 следует, что при естественном вложении X в \bar{X} оба эти пространства совпадают как по запасу элементов, так и по норме. Теперь остаётся только применить теорему 4.1.4.

З а м е ч а н и е 4.1.6. В связи с теоремами 4.1.4 и 4.1.5 естественно возникает следующий вопрос. Пусть X — банахово $\mathbb{K}N$ -пространство с тотальным \bar{X} , с универсально полунепрерывной и универсально монотонно полной нормой. Пусть $f \in X_+^*$ (но уже, вообще говоря, $f \notin \bar{X}$) и пусть число $\varepsilon > 0$. Существует ли такой $g \in X_+^*$, что $(1-\varepsilon)f \leq g \leq (1+\varepsilon)f$ и g — опорен к $\mathcal{U}_X = \{x \in X : \|x\|_X \leq 1\}$? Положительный ответ на этот вопрос был бы существенным усилением теоремы 4.1.5. Приведём пример, показывающий, что на самом деле требуемого функционала g может не существовать. Пусть X есть обычное пространство $L^\infty[0,1]$, но рассматриваемое не с естественной нормой $\|\cdot\|_{L^\infty[0,1]}$, а с нормой $\|x\|_X = \|x\|_{L^\infty[0,1]} + \int_0^1 |x(t)| dt$, $x \in X$. Представим X естественным образом в виде $C(Q)$ на подходящем бикомпакте Q , так что $X_{[0,1]}$ при этом превращается в X_Q . Фиксируем любую точку $q \in Q$ и полагаем $f(x) = x(q)$, $x \in X$. Ясно, что $\|f\|_{X^*} = 1$ и что f не является опорным к \mathcal{U}_X , ибо $|f(x)| < 1$ для любого $x \in \mathcal{U}_X$. Остается заметить, что компонента в X^* , порождённая f , — одномерна, то есть состоит из функционалов вида αf , где α — произвольное число.

2. В этом пункте будут даны некоторые приложения теоремы 4.1.4 к вопросам, рассматриваемым в гл. II § 5. До конца этого пункта пусть X означает произвольное банахово $\mathbb{K}N$ -пространство, являющееся фундаментом в $S[0,1]$ и удовлетворяющее следующим условиям:

- (а) норма в X полунепрерывна и монотонно полна;

(б) норма в X строго выпукла, то есть множество $\{x \in X: \|x\|_X = 1\}$ не содержит прямолинейных отрезков.

Положим

$$E_X = \{x \in X_+: \|x\|_X = 1\},$$

$$E_{X'} = \{x' \in X'_+: \|x'\|_{X'} = 1\},$$

$$E_L = \{z \in L^1[0,1]: z > 0, \|z\|_{L^1[0,1]} = 1\}.$$

Из теоремы 2.5.3 следует, что для любого $z \in E_L$ найдутся такие $x \in E_X$, $x' \in E_{X'}$, что $z = xx'$.

Л е м м а 4.1.7. Элемент $x \in E_X$ определяется по $z \in E_L$ однозначно.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Пусть $x, x_1 \in E_X$, $x', x'_1 \in E_{X'}$ таковы, что $z = xx' = x_1 x'_1$. Положим $y = \sqrt{xx_1}$, $y' = \sqrt{x'x'_1}$. Так как $y \leq \frac{x+x_1}{2}$, то $\|y\|_X \leq 1$ и аналогично $\|y'\|_{X'} \leq 1$. Теперь из неравенства $1 = \|z\|_{L^1[0,1]} = \|yy'\|_{L^1[0,1]} \leq \|y\|_X \|y'\|_{X'}$ вытекает, что $\|y\|_X = 1$, откуда $\left\| \frac{x+x_1}{2} \right\|_X \geq 1$. Тем самым $\left\| \frac{x+x_1}{2} \right\|_X = 1$. Так как норма в X строго выпукла, то отсюда следует, что $x = x_1$. Лемма доказана.

О п р е д е л е н и е 4.1.8. Через Θ обозначим оператор из E_L в E_X , сопоставляющий каждому $z \in E_L$ такой $x \in E_X$, что для некоторого $x' \in E_{X'}$ справедливо равенство $z = xx'$.

П р е д л о ж е н и е 4.1.9. Будем рассматривать E_L и E_X как метрические пространства с метриками, индуцированными из $L^1[0,1]$ и X , соответственно. Тогда множество $\{\Theta z: z \in E_L\}$ плотно в E_X . Следовательно, если опе-

ратор $\theta: E_L \rightarrow E_X$ непрерывен, то пространство X - сепарабельно.

Доказательство. Из результатов гл. 0 § 5 следует, что множество $\{\theta z: z \in E_L\}$ совпадает с множеством всех сильных элементов $x \in X$, таких что $x \geq 0$, $\|x\|_X = 1$. Остается применить теорему 4.1.4. Предложение доказано.

Итак, для непрерывности оператора θ необходимо, чтобы X было сепарабельным. Мы покажем сейчас, что достаточным условием непрерывности θ является локальная равномерная выпуклость пространства X .

Предложение 4.1.10. Если пространство X локально равномерно выпукло^{х)}, то оператор θ непрерывен.

Доказательство. Допустим противное. Тогда найдутся $z \in E_L$, последовательность $z_n \in E_L$ ($n \in \mathbb{N}$) и число

$\varepsilon > 0$, такие что $\|z_n - z\|_{L^1[0,1]} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, но $\|\theta z_n - \theta z\|_X \geq \varepsilon$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Положим $x_n = \theta z_n$, $x = \theta z$. По

условию существует число $\delta > 0$, такое что $\left\| \frac{x+x_n}{2} \right\|_X \leq 1 - \delta$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Так как $\sqrt{x x_n} \leq \frac{x+x_n}{2}$, то $\|\sqrt{x x_n}\|_X \leq 1 - \delta$

при всех $n \in \mathbb{N}$. Но $|\sqrt{z z_n} - z| = \frac{\sqrt{z}}{\sqrt{z_n} + \sqrt{z}} \cdot |z_n - z| \leq |z_n - z|$

откуда $\|\sqrt{z z_n} - z\|_{L^1[0,1]} \rightarrow 0$, поэтому $\|\sqrt{z z_n}\|_{L^1[0,1]} \rightarrow 1$

Пусть $x', x'_n \in E_{X'}$ таковы, что $z = x x'$, $z_n = x_n x'_n$ ($n \in \mathbb{N}$)

Имеем $\sqrt{z z_n} = \sqrt{x x_n} \cdot \sqrt{x' x'_n}$. Так как $\|\sqrt{x' x'_n}\|_{X'} \leq 1$,

$\|\sqrt{z z_n}\|_{L^1[0,1]} \rightarrow 1$, то должно быть $\|\sqrt{x x_n}\|_X \rightarrow 1$, что невозможно, ибо $\|\sqrt{x x_n}\|_X \leq 1 - \delta$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Предложение доказано.

^{х)} Это значит, что для каждого $\varepsilon \in (0, 2]$ и каждого $x \in X$, такого что $\|x\|_X = 1$, существует число $\delta(\varepsilon, x) > 0$, такое

§ 2. Об аномальных функционалах

Этот параграф посвящён в основном изучению некоторых типов аномальных функционалов на K -линеале.

Всюду в этом параграфе X есть произвольный архимедов K -линеал, удовлетворяющий там, где это указано, и некоторым дополнительным условиям.

О п р е д е л е н и е 4.2.1. Функционал $f \in \tilde{X}$ будем называть функционалом счётного типа, если f - счётного типа как элемент K -пространства \tilde{X} , то есть если главная компонента в \tilde{X} , порождённая f , есть K -пространство счётного типа.

О п р е д е л е н и е 4.2.2. Функционал $f \in \tilde{X}$ будем называть локализованным, если в булевой алгебре $\mathcal{O}(X)$ всех компонент K -линеала X существует идеал $Z(f)$, удовлетворяющий условиям:

- (а) сужение $f|_K = 0$ для любой $K \in Z(f)$;
- (б) $Z(f)$ плотен в $\mathcal{O}(X)$, то есть если $K \in \mathcal{O}(X)$, $K \neq \{0\}$, то существует $K_1 \in Z(f)$, такая что $K_1 \subset K$ и $K_1 \neq \{0\}$.

Совокупность всех локализованных функционалов на X будем обозначать через \tilde{X}_{loc} . Если X есть KN -линеал, то полагаем $X^*_{loc} = X^* \cap \tilde{X}_{loc}$.

З а м е ч а н и е 4.2.3. Если X есть K -пространство и $f \in \tilde{X}$, то множество $\{K \in \mathcal{O}(X) : f|_K = 0\}$ есть идеал в $\mathcal{O}(X)$. Поэтому $f \in \tilde{X}_{loc}$ тогда и только тогда, когда указанный идеал плотен в $\mathcal{O}(X)$.

Л е м м а 4.2.4. Пусть Y есть K -пополнение X , $F \in \tilde{Y}_+$, $f = F|_X$.

(а) Если $F \in \tilde{Y}_{loc}$, то и $f \in \tilde{X}_{loc}$.

(б) Если f - счётного типа, то и F - счётного типа.

Д о к а з а т е л ь с т в о . (а). Пусть $F \in \tilde{Y}_{loc}$. Напомним, что если $K \in \mathcal{O}(Y)$, то $K \cap X \in \mathcal{O}(X)$. Пусть $Z(F) = \{K \in \mathcal{O}(Y) : F|_K = 0\}$. Тогда $Z(f) = \{K \cap X : K \in Z(F)\}$

есть искомый идеал в $\mathcal{O}(X)$. (б). Допустим противное. Тогда существует семейство $\{F_t : t \in T\}$ в \tilde{Y} , такое что: $F_t > 0$ при всех $t \in T$; $F_{t_1} \wedge F_{t_2} = 0$ при $t_1 \neq t_2$; $\sup\{F_t : t \in T\} = F$;

скажд $T > \aleph_0$. Пусть $\rho(T)$ есть совокупность всех конечных подмножеств множества T , упорядоченная по включению. Для $\alpha \in \rho(T)$ положим $G_\alpha = \sum_{t \in \alpha} F_t$. Ясно, что направление $G_\alpha \uparrow F$.

Положим $g_\alpha = G_\alpha|_X$ ($\alpha \in \rho(T)$). Так как $G_\alpha(y) \uparrow F(y)$ для любого $y \in Y_+$, то $g_\alpha(x) \uparrow f(x)$ для любого $x \in X_+$. Тем самым $g_\alpha \uparrow f$. Так как f - счётного типа, то существует последовательность $\alpha_n \in \rho(T)$ ($n \in \mathbb{N}$), такая что $f = \sup\{g_{\alpha_n} : n \in \mathbb{N}\}$.

Положим $T_0 = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n$. Заметим, что $T \setminus T_0 \neq \emptyset$, ибо скажд $T_0 \leq \aleph_0$.

Ясно, что $f(x) = \sum_{t \in T_0} F_t(x)$ для любого $x \in X_+$. Поэтому

$F_t(x) = 0$ при $t \in T \setminus T_0$, $x \in X_+$. Следовательно, $F_t = 0$ при $t \in T \setminus T_0$.

Противоречие. Лемма доказана.

П р е д л о ж е н и е 4.2.5. Для любого архимедова K -линеала X множество \tilde{X}_{loc} есть фундамент в \tilde{X}_{an} .

Д о к а з а т е л ь с т в о . Прежде всего, очевидно, что \tilde{X}_{loc} есть идеал в \tilde{X}_{an} . Возьмём произвольный $f \in \tilde{X}_{an}$, $f > 0$ и покажем, что существует $g \in \tilde{X}_{loc}$, такой что $0 < g \leq f$. Пусть

сначала X есть K -пространство. По условию существует фунда-
мент Φ в X , такой что $f|_{\Phi} = 0$. Фиксируем какой-нибудь
 $u \in X_+$, такой что $f(u) > 0$. Положим $N = \{h \in X : h \wedge (u-h) = 0, \\ u-h \in \Phi\}$. Ясно, что $\inf N = 0$. Положим $g(x) = \inf \{f(\alpha h) : \\ \alpha \in N\}$ для $x \in X_+$ и $g(x) = g(x_+) - g(x_-)$ для любого $x \in X$.
Ясно, что $g(u) = f(u)$, поэтому $g > 0$. Очевидно также, что
 $g \leq f$. Кроме того, $g \in \tilde{X}_{loc}$, ибо g аннулируется на каж-
дой компоненте вида $\{h\}^{\alpha}$, где $h \in N$, а множество всех
таких компонент полно в X . Общий случай. Пусть Y есть
 K -дополнение X . Тогда существует $F \in \tilde{Y}_+$, такой что $F|_X = f$.
Ясно, что $F \in \tilde{Y}_{an}$, поэтому в силу уже доказанного существует
такой $G \in \tilde{Y}_{loc}$, что $0 < G \leq F$. Остаётся положить $g = G|_X$ и
воспользоваться леммой 4.2.4. Предложение доказано.

З а м е ч а н и е 4.2.6. Вообще говоря $\tilde{X}_{loc} \neq \tilde{X}_{an}$. При-
мер аномального функционала, не являющегося локализованным,
приведён в замечании 4.2.13 пункт (б). Более того, далее бу-
дет показано (см. теорему 4.4.2), что в предположении справед-
ливости континуум-гипотезы существует банахово KN -пространст-
во X , обладающее следующими свойствами: (а) X есть фун-
дамент в $S[0,1]$, тем самым \bar{X} - тотально на X ; (б) нор-
ма в X универсально полунепрерывна и универсально монотон-
но полна; (в) $\tilde{X}_{loc} \neq \tilde{X}_{an}$.

П р е д л о ж е н и е 4.2.7. ПУСТЬ X ЕСТЬ K -ПРО-
СТРАНСТВО, В КОТОРОМ СУЩЕСТВУЕТ ФУНДАМЕНТ Φ , ТАКОЙ ЧТО $\bar{\Phi}$
ТОТАЛЬНО НА Φ . ЕСЛИ $f_n \in \tilde{X}_{loc}$ ($n \in N$) И $0 \leq f_n \uparrow f \in \tilde{X}$, ТО
 $f \in \tilde{X}_{loc}$. ТАКИМ ОБРАЗОМ, В ЭТОМ СЛУЧАЕ \tilde{X}_{loc} ЕСТЬ σ -ЗАМКНУТЫЙ
ФУНДАМЕНТ В \tilde{X}_{an} .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточно убедиться, что

для любой $K \in \mathcal{U}(X), K \neq \{0\}$ найдётся $\mathcal{F} \in \mathcal{U}(X)$, такая что $\mathcal{F} \neq \{0\}, \mathcal{F} \subset K$ и $\mathcal{F}|_{\mathcal{F}} = 0$. Напомним, что всякое K -пространство с достаточным множеством вполне линейных функционалов можно разложить на главные компоненты счётного типа (см. Канторович, Вулик, Пинскер [1], стр. 416). Поэтому не умаляя общности, можно считать, что K - счётного типа и с единицей. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ построим последовательность $\mathcal{F}_m^n \in \mathcal{U}(X) (m \in \mathbb{N})$ такую что $\mathcal{F}_m^n \subset \mathcal{F}_{m+1}^n \subset K, \mathcal{F}_m^n|_{\mathcal{F}_m^n} = 0 (m \in \mathbb{N})$ и $\sup\{\mathcal{F}_m^n : m \in \mathbb{N}\} = K$ где супремум берётся в булевой алгебре $\mathcal{U}(X)$. Заметим, что $\mathcal{M}(K)$ есть регулярное K -пространство (см. Канторович, Вулик, Пинскер [1], гл. XI § 3 и гл. VI § 1). Поэтому в силу теоремы о диагональной последовательности (см. Вулик [6], стр. 180) существует последовательность индексов $m_1 < m_2 < \dots < m_n < \dots$, такая что $\mathcal{F} = \bigcap_{n=2}^{\infty} \mathcal{F}_{m_n}^n \neq \{0\}$ для достаточно больших $n \in \mathbb{N}$. Остаётся заметить, что $\mathcal{F} \in \mathcal{U}(X), \mathcal{F} \subset K$ и $\mathcal{F}|_{\mathcal{F}} = 0$. Предложение доказано.

2. Мы далее установим связь между локализованными функционалами и функционалами счётного типа. Предварительно докажем следующие два предложения, имеющие, как нам кажется, и самостоятельный интерес.

Предложение 4.2.8. ПУСТЬ X - АРХИМЕДОВ K -ЛИНЕАЛ, $f \in \tilde{X}_+$. СЛЕДУЮЩИЕ УТВЕРЖДЕНИЯ ЭКВИВАЛЕНТНЫ:

- (а) f - СЧЁТНОГО ТИПА;
- (б) СУЩЕСТВУЮТ $u_n \in X_+ (n \in \mathbb{N})$, ТАКИЕ ЧТО $u_n \uparrow$ И $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x \wedge u_n)$ ДЛЯ ЛЮБОГО $x \in X_+$.

Доказательство. (а) \Rightarrow (б). Для каждого $v \in X_+$ положим $f_v(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_+ \wedge n v) - \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_- \wedge n v)$, $x \in X$.

Ясно, что $f \in \tilde{X}_+$ и $\sup\{f_\nu : \nu \in X_+\} = f$. Так как f - счёт-
ного типа, то существует последовательность $v_n \in X_+$ ($n \in \mathbb{N}$),
такая что $\sup\{f_{v_n} : n \in \mathbb{N}\} = f$. Остаётся положить $u_n = v_1 + \dots + v_n$
($n \in \mathbb{N}$) .

Докажем, что (б) \Rightarrow (а). Для $m \in \mathbb{N}$ положим
 $f_m(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x + \wedge n u_m) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x \wedge n u_m)$, $x \in X$. Ясно, что $f_m \in \tilde{X}_+$
и $f_m \uparrow f$. Поэтому достаточно доказать, что f_m - счёт-
ного типа ($m \in \mathbb{N}$). Заметим, что если $g \in \tilde{X}_+$, $g \leq f_m$, $g(u_m) = 0$
то $g = 0$. Действительно, пусть $x \in X_+$, тогда для любого $n \in \mathbb{N}$
имеем $g(x) = g(x - x \wedge n u_m) + g(x \wedge n u_m) \leq g(x - x \wedge n u_m) +$
 $+ n g(u_m) \leq f_m(x - x \wedge n u_m)$. откуда $g(x) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} f_m(x - x \wedge n u_m)$
 $= f_m(x) - \lim_{n \rightarrow \infty} f_m(x \wedge n u_m) = f_m(x) - f_m(x) = 0$

тем самым $g = 0$. Пусть теперь $g_t \in \tilde{X}_+$ ($t \in \Gamma$) попарно дизъюнк-
ты и $0 < g_t \leq f_m$. Тогда очевидно $\sum_{t \in \Gamma} g_t(u_m) \leq f_m(u_m)$
поэтому множество Γ не более чем счётно. Предложение дока-
зано.

Предложение 4.2.9. Пусть X - кв-линеал,
 $f \in \tilde{X}_+$. Следующие два утверждения эквивалентны:

(а) f - счёт-ного типа;

(б) существует $u \in X_+$, такое что $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x \wedge n u)$

для любого $x \in X_+$.

Доказательство. Справедливость (б) \Rightarrow (а)
прямо следует из предложения 4.2.8. Для доказательства

(а) \Rightarrow (б) достаточно применить предложение 4.2.8 и положить
 $u = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n u_n$, где числа $\alpha_n > 0$ таковы, что $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \|u_n\|_X <$
 $< +\infty$. Предложение доказано.

Л е м м а 4.2.10. Пусть X - K -пространство, в котором существует фундамент Φ с тотальным $\bar{\Phi}$. Пусть $f \in \tilde{X}_{an}$ и f - счётного типа. Тогда $f \in \tilde{X}_{loc}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Можно считать, что $f \geq 0$. В силу предложения 4.2.5 $f = \sup\{g: 0 \leq g \leq f, g \in \tilde{X}_{loc}\}$. Так как f - счётного типа, то существует счётное множество $\{g_n: n \in \mathbb{N}\}$, такое что $0 \leq g_n \leq f$ и $g_n \in \tilde{X}_{loc}$ ($n \in \mathbb{N}$). Остаётся применить предложение 4.2.7. Лемма доказана.

Л е м м а 4.2.11. Пусть X - банахово $K\mathbb{N}$ -пространство, $f \in \tilde{X}_{an}$ и f - счётного типа. Тогда $f \in \tilde{X}_{loc}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Можно считать, что $f \geq 0$. Достаточно убедиться, что для любой $K \in \mathcal{A}(X)$, $K \neq \{0\}$ существует $\mathcal{P} \in \mathcal{A}(X)$, $\mathcal{P} \neq \{0\}$, такая что $\mathcal{P} \subset K$ и $f|_{\mathcal{P}} = 0$. Пусть $u \in X_+$ из предложения 4.2.9, Φ - фундамент в X , такой что $f|_{\Phi} = 0$. Если $u \notin K$, то $f|_K = 0$ и можно принять $\mathcal{P} = K$. В противном случае существует $h \in \Phi$, такой что $0 < h \in K$, $(u-h) \wedge h = 0$, и за \mathcal{P} можно принять главную компоненту в X порождённую h . Лемма доказана.

Следующая теорема показывает, что в наиболее важных случаях всякий аномальный функционал счётного типа - локализованный.

Т е о р е м а 4.2.12. Пусть X есть архимедов K -линеал, в котором имеется фундамент Φ с тотальным $\bar{\Phi}$, или же X есть кв-линеал. Если $f \in \tilde{X}_{an}$ и f - счётного типа, то $f \in \tilde{X}_{loc}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Можно считать, что $f \geq 0$.

Пусть Y есть K -пополнение X и $f \in \tilde{Y}$, таков, что $f|_X = \varphi$. В силу леммы 4.2.4 достаточно показать, что $f \in \tilde{Y}_{loc}$. Заметим, что f - счётного типа по той же лемме 4.2.4. Напомним, что K -пополнение KB -линеала при естественном распространении нормы (f) - полно (см. Вулик, Лозановский [1]). Теперь требуемое немедленно вытекает из лемм 4.2.IO и 4.2.II. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 4.2.I3. (а) Далее будет показано, что существуют локализованные функционалы, не являющиеся функционалами счётного типа (см. теорему 4.5.I).

(б) Если X есть произвольное K -пространство, то из того что $f \in \tilde{X}_{an}$ есть функционал счётного типа не следует, что $f \in \tilde{X}_{loc}$; тем самым наложенные в формулировке теоремы 4.2.I3 ограничения на X - существенны для справедливости теоремы. Приведём соответствующий пример. Возьмём экстремальный бикомпакт Q , в котором существуют последовательности $t_n \in Q (n \in \mathbb{N})$ и $Q_n \subset Q (n \in \mathbb{N})$, удовлетворяющие условиям: 1) множества Q_n попарно не пересекаются, они нигде не плотны, замкнуты и имеют тип G_δ ; 2) $t_n \in Q_n (n \in \mathbb{N})$; 3) множество $\{t_n : n \in \mathbb{N}\}$ - плотно в Q . Такие бикомпакты Q существуют, например, за Q можно принять абсолют отрезка $[0,1]$ (см. Пономарёв [1]). Для каждого $n \in \mathbb{N}$ зафиксируем какую-нибудь функцию $u_n \in C_\infty(Q)$, удовлетворяющую условиям: 1) $u_n(t) \geq 1$ при всех $t \in Q$; 2) $u_n(t) = +\infty$ при всех $t \in Q_n$; 3) $u_n(t) < +\infty$ при всех $t \in Q \setminus Q_n$. Примем за X наименьший идеал в $C_\infty(Q)$, содержащий все $u_n (n \in \mathbb{N})$. Положим теперь $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (x u_n^{-1})(t_n)$, $x \in X$. Функционал f .

очевидно, - счётного типа. Он анормален, ибо $f(x) = 0$ для любого $x \in C(Q)$, и $C(Q)$ есть фундамент в X . Наконец, ясно, что если $K \in \mathcal{A}(X)$, $K \neq \{0\}$, то $f|_K \neq 0$. Тем самым $f \notin \tilde{X}_{loc}$.

§ 3. Различные вопросы строения (b) -сопряжённых пространств

Л. Теорема 4.3.1. ПУСТЬ X ЕСТЬ БАНАХОВО $K_5 N$ -ПРОСТРАНСТВО, В КОТОРОМ НЕ ВЫПОЛНЕНО УСЛОВИЕ (A) И ПУСТЬ $Y = X_{anf}^*$. ТОГДА

(а) В Y НЕТ СЛАБОЙ ЕДИНИЦЫ;

(б) В Y СУЩЕСТВУЕТ МНОЖЕСТВО НЕНУЛЕВЫХ ПОПАРНО ДИЗЪЮНКТИВНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ, ИМЕЮЩЕЕ МОЩНОСТЬ КОНТИНУУМА;

(в) ПРОСТРАНСТВО \bar{Y} НЕ ЕСТЬ ПРОСТРАНСТВО СЧЁТНОГО ТИПА. БОЛЕЕ ТОГО, В \bar{Y} СУЩЕСТВУЕТ ПОРЯДКОВО ОГРАНИЧЕННОЕ МНОЖЕСТВО НЕНУЛЕВЫХ ПОПАРНО ДИЗЪЮНКТИВНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ, ИМЕЮЩЕЕ МОЩНОСТЬ КОНТИНУУМА.

З а м е ч а н и е 4.3.2. В формулировке теоремы 4.3.1 слова " X есть банахово $K_5 N$ -пространство" нельзя заменить словами " X ЕСТЬ КВ-ЛИНЕАЛ". Действительно, рассмотрим КВ-линеал C всех сходящихся последовательностей вещественных чисел. Он не является K_5 -пространством, в нём не выполнено условие (A), в C^* есть слабая единица, любое множество ненулевых попарно дизъюнктивных элементов в C^* не более чем счётно, пространство C^{**} -счётного типа.

Для доказательства теоремы нам понадобится следующая лемма.

Л е м м а 4.3.3. Пусть Z есть KN -линеал, $\{z_n: n \in \mathbb{N}\}$ — последовательность его элементов, такая что $z_n \uparrow 0$ и $\inf\{\|z_n\|_Z: n \in \mathbb{N}\} > 0$. Тогда найдётся $f \in Z_+^*$, такой что:
 1) $f(z) = 0$ для любого $z \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{z_n\}^d$; 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) > 0$;
 3) $f(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(z \wedge n z_1)$ для любого $z \in Z_+$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из (Вулик [6], стр. 280, лемма IX.4.1) следует, что существует $g \in Z_+^*$, такой что $\lim_{n \rightarrow \infty} g(z_n) > 0$. Положим $f(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{k \rightarrow \infty} g(z \wedge k z_n)$ для $z \in Z_+$ и $f(z) = f(z_+) - f(z_-)$ для любого $z \in Z$. Покажем, что f — искомый функционал. Ясно, что $f \in Z_+^*$. Если $z \in Z_+$ и $z \wedge z_n = 0$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$, то, очевидно, $f(z) = 0$. Очевидно также, что $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} g(z_n) > 0$. Пусть теперь $z \in Z_+$, покажем, что $f(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(z \wedge n z_1)$. Положим $h(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} g(x \wedge k z_1)$ для $x \in Z_+$ и $h(x) = h(x_+) - h(x_-)$ для любого $x \in X$. Ясно, что $f \leq h$. Теперь для $n \in \mathbb{N}$ имеем

$$0 \leq f(z) - f(z \wedge n z_1) = f(z - z \wedge n z_1) \leq h(z - z \wedge n z_1) = h(z) - h(z \wedge n z_1) =$$

$$= \lim_{k \rightarrow \infty} g(z \wedge k z_1) - \lim_{k \rightarrow \infty} g(z \wedge n z_1 \wedge k z_1) = \lim_{k \rightarrow \infty} g(z \wedge k z_1) -$$

$$- g(z \wedge n z_1).$$
 Отсюда ясно, что $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z \wedge n z_1) = f(z)$. Лемма доказана.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 4.3.1. В силу леммы 0.3.4 найдётся последовательность $\{x_n: n \in \mathbb{N}\}$ элементов из X , удовлетворяющая условиям: 1) $x_n > 0, \|x_n\|_X > 1$ ($n \in \mathbb{N}$); 2) $x_m \wedge x_n = 0$ при $m \neq n$; 3) существует $\sup x_n = x_0 \in X$.

Разобьём множество \mathbb{N} всех натуральных чисел на два бесконечных подмножества N_0 и N_1 . Множество N_i ($i=0,1$),

в свою очередь, разобьём на два бесконечных подмножества $N_{i,0}$ и $N_{i,1}$. Каждое из четырёх полученных множеств тоже разобьём на два бесконечных множества и т.д., продолжим этот процесс неограниченно. Через Γ обозначим множество всех последовательностей, состоящих из чисел 0 и 1.

Пусть $i = (i_1, i_2, \dots, i_n, \dots) \in \Gamma$ — произвольная последовательность. Для $n \in \mathbb{N}$ положим $z_n^{(i)} = \sup \{x_k : k \in N_{i_1, i_2, \dots, i_n}\} - \sup \{x_k : k \in \bigcap_{m=1}^{\infty} N_{i_1, i_2, \dots, i_m}\}$. Ясно, что $z_n^{(i)} \downarrow 0$ и $\inf_n \|z_n^{(i)}\|_X \geq 1$. В силу леммы 4.3.3 найдётся функционал $f_i \in X_+^*$, такой что $f_i(z) = 0$ для любого $z \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{z_n^{(i)}\}^d$, $\lim_{n \rightarrow \infty} f_i(z_n^{(i)}) > 0$ и $f_i(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_i(z \wedge n x_0)$ для любого $z \in X_+$. Ясно, что $f_i \in X_{\text{ан}}^* \subset X_{\text{от}}^* = Y$ и $f_i \wedge f_j = 0$ при $i \neq j$ ($i, j \in \Gamma$). Так как мощность множества

Γ равна мощности континуума, то утверждение (б) доказано.

Докажем (а). Допустим, что F есть слабая единица в Y . Тогда $\varphi_i = f_i \wedge F > 0$ ($i \in \Gamma$). Покажем, что $\varphi_i(x_0) > 0$. Допустим, что $\varphi_i(x_0) = 0$. Тогда для любого $x \in X_+$ имеем $\varphi_i(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_i(x - x \wedge n x_0) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} f_i(x - x \wedge n x_0) = f_i(x) - f_i(x) = 0$, то есть $\varphi_i = 0$, что невозможно. Итак, $\varphi_i(x_0) > 0$. Так как $\varphi_i \wedge \varphi_j = 0$ при $i \neq j$ и $\varphi_i \leq F$ ($i, j \in \Gamma$), то $\sum_{i \in \Gamma} \varphi_i(x_0) \leq F(x_0)$, тем самым $\sum_{i \in \Gamma} \varphi_i(x_0) < +\infty$. Это противоречит тому, что

множество Γ — несчётное. Утверждение (а) доказано. Докажем (в). Положим для $i \in \Gamma$ $F_i(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n^{(i)})$, $f \in Y$. Ясно, что $F_i \in \tilde{Y}_+$. Так как $F_i(f_i) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_i(z_n^{(i)}) > 0$, то $F_i > 0$. Положим $F_0(f) = f(x_0)$, $f \in Y$. Заметим, что $F_0 \in \bar{Y}$ и $0 \leq F_i \leq F_0$, поэтому $F_i \in \bar{Y}$ ($i \in \Gamma$). Осталось показать, что $F_i \wedge F_j = 0$ при

$i \neq j$ ($i, j \in T$). Фиксируем $n \in \mathbb{N}$ настолько большое, что $z_n^{(i)} \wedge z_n^{(j)} = 0$. Положим $G_i(f) = f(z_n^{(i)})$, $G_j(f) = f(z_n^{(j)})$, $f \in U$. Ясно, что $G_i \wedge G_j = 0$. Но, очевидно, $0 \leq F_i \leq G_i$, $0 \leq F_j \leq G_j$. Поэтому $F_i \wedge F_j = 0$. Теорема доказана.

С л е д с т в и е 4.3.4. Для произвольного банахова $K_0 N$ -пространства X следующие утверждения эквивалентны:

- (а) в пространстве X^* есть слабая единица;
- (б) в X выполнено условие (А) и имеется существенно положительный функционал $f \in X_+^*$, то есть такой, что $f(x) > 0$ для любого $x > 0$ ($x \in X$).

С л е д с т в и е 4.3.5. Для произвольного банахова $K_0 N$ -пространства X следующие утверждения эквивалентны:

- (а) в X^* есть слабая единица и X^* -счётного типа;
- (б) в X есть слабая единица и выполнено условие (А).

Напомним (Вулик [6], стр. 294, теорема IX.7.4) теорему Огасавара: КВ-линеал X (б)-рефлексивен тогда и только тогда, когда X и X^* суть КВ-пространства. Следующие два предложения дают другие критерии (б)-рефлексивности КВ-линеала.

П р е д л о ж е н и е 4.3.6. Для произвольного КВ-линеала X следующие утверждения эквивалентны:

- (а) X - (б)-рефлексивен;
- (б) X^{***} и X^{****} суть К-пространства счётного типа;
- (в) X - КВ-пространство, а X^{***} - счётного типа.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Импликация (а) \Rightarrow (б) и (а) \Rightarrow (в) - тривиальны. Докажем, что (б) \Rightarrow (а). Из теоремы 4.3.1 следует, что в X^* и X^{**} выполнено условие (А). Тем

самым, X^* и X^{**} суть КВ-пространства. В силу упомянутой теоремы Огасавара X^* - (б) - рефлексивное пространство, поэтому и X - (б) - рефлексивное пространство. Аналогично доказывается импликация (в) \Rightarrow (а).

Предложение 4.3.7. Для произвольного КВ-линеала X , имеющего единицу, следующие утверждения эквивалентны:

- (а) X - (б) - рефлексивен;
- (б) X^{**} и X^{***} суть пространства с единицами;
- (в) X^{***} есть пространство счётного типа с единицей;
- (г) X есть КВ-пространство, а в X^{**} есть единица.

Это предложение доказывается совершенно так же как и предыдущее, с использованием теоремы Огасавара и теоремы 4.3.1.

2. Т. Шимогаки был получен следующий результат (см. Шимогаки [1], теорема 5). Пусть X - $K_G N$ -пространство с тотальным \bar{X} и с универсально полунепрерывной нормой. Для того чтобы сопряжённое по Накано пространство к $\bar{X} \cap X^*$ было КВ-пространством, необходимо (и, очевидно, достаточно), чтобы (б) - пополнение пространства X было КВ-пространством. Следующая теорема содержит существенное обобщение этого результата.

Теорема 4.3.8. Пусть X - КВ-линеал, E - замкнутый по норме идеал в X^* , причём E тотален на X и \bar{E} есть КВ-пространство. Тогда X есть КВ-пространство^{х)}.

Доказательство. Не умаляя общности, можно считать, что E есть компонента в X^* . Обозначим через \mathcal{U}_E \bar{E} и, следовательно, $E = X^*$.

замкнутый единичный шар пространства E . Так как E естественным образом можно отождествить с пространством $(\bar{E})^* = \bar{E}$, то \mathcal{U}_E компактен в топологии $\mathcal{B}(E, \bar{E})$. Следовательно, \mathcal{U}_E компактен и в более слабой топологии $\mathcal{B}(E, X)$. Тем самым \mathcal{U}_E замкнут в X^* в топологии $\mathcal{B}(X^*, X)$. Так как E тотально на X , то из теоремы Крейна-Мильяна (см. Дэй [1], стр. 77) теперь следует, что $E = X^*$. Таким образом, \bar{X}^* есть КВ-пространство, тем самым \bar{X}^* — слабо секвенциально полно. Но X естественным образом вкладывается в \bar{X}^* как замкнутое подпространство, поэтому X тоже слабо секвенциально полно, и, следовательно, X есть КВ-пространство. Теорема доказана.

С л е д с т в и е 4.3.9. ПУСТЬ X ЕСТЬ КВ-ЛИНЕАЛ С ТОТАЛЬНЫМ \bar{X} . ЕСЛИ \bar{X} ЕСТЬ КВ-ПРОСТРАНСТВО, ТО И X ЕСТЬ КВ-ПРОСТРАНСТВО.

П р и м е р 4.3.10. Пусть X есть банахово КН-пространство, являющееся фундаментом в $S[0,1]$, причём $X' = L^\infty[0,1]$ по запасу элементов (здесь штрих, как обычно, означает дуальное пространство). Тогда $X = L^1[0,1]$ по запасу элементов.

Действительно, так как $X'' = L^1[0,1]$ есть КВ-пространство, то в силу следствия 4.3.9 X есть КВ-пространство, поэтому $X = X''$ и $X = L^1[0,1]$.

П р и м е р 4.3.11. Пусть X есть банахово КН-пространство, являющееся фундаментом в $S[0,1]$, причём $X' = M(\Psi)$ по запасу элементов. Рассуждая как и в предыдущем примере, видим, что $X = \Lambda(\Psi)$ по запасу элементов (определение пространств $\Lambda(\Psi)$ и $M(\Psi)$ см. гл. 0 § 6 п. 7).

3. Напомним (см. Вулик [6], стр. 87-89), что элемент x K -линеала X называется ДИСКРЕТНЫМ, если не существует дизъюнктивных между собой элементов $\psi > 0$ и $z > 0$ таких, что $\psi \leq |x|$ и $z \leq |x|$. K -пространство называется ДИСКРЕТНЫМ, если каждый его элемент является соединением дискретных.

Напомним также следующий хорошо известный факт (см. Наикано [3]). Пусть X - архимедов K -линеал, $f \in \tilde{X}_+$. Для того чтобы f был дискретным элементом K -пространства \tilde{X} необходимо и достаточно, чтобы f был структурным гомоморфизмом, то есть чтобы для любых $x, y \in X$ было $f(xvy) = \max\{f(x), f(y)\}$.

Т е о р е м а 4.3.12. Для любого банахова K_6N -ПРОСТРАНСТВА X СЛЕДУЮЩИЕ УТВЕРЖДЕНИЯ ЭКВИВАЛЕНТНЫ:

(а) ПРОСТРАНСТВО X^* -ДИСКРЕТНО;

(б) в X ВЫПОЛНЕНО УСЛОВИЕ (А) И X -ДИСКРЕТНО.

Д о к а з а т е л ь с т в о . (б) \Rightarrow (а). Если в X выполнено условие (А), то X и $X^* = \bar{X}$ имеют изоморфные максимальные расширения, поэтому, если добавив X - дискретно, то и X^* дискретно. (а) \Rightarrow (б). Достаточно убедиться, что в X выполнено условие (А), ибо после этого дискретность X будет следовать из дискретности X^* и того, что X и X^* имеют изоморфные максимальные расширения. Допустим, что в X не выполнено условие (А). Тогда в силу леммы 0.3.4 в X найдётся замкнутая линейная подструктура Y , которая алгебраически, топологически и порядково изоморфна пространству ℓ^∞ . Фиксируем любой $f \in Y^*$, такой что $f > 0$ и

f дискретен всем дискретным функционалам на Y . Пусть теперь $g \in X_+^*$ таков, что сужение $g|_Y = f$. Ясно, что g не является соединением дискретных функционалов, ибо если h есть дискретный функционал на X , то его сужение на Y есть дискретный функционал на Y . Противоречие. Теорема доказана.

С л е д с т в и е 4.3.13. Пусть X — КВ-линеал, такой что X^{***} есть дискретное K -пространство. Тогда X — (б) —рефлексивен.

Действительно, из теоремы 4.3.12 следует, что в этом случае в X^* и X^{**} выполнено условие (А), тем самым X^* и X^{**} суть КВ-пространства, и остаётся применить критерий (б) —рефлексивности Огасавара.

Т е о р е м а 4.3.14. ДЛЯ ЛЮБОГО БАНАХОВА K_6^N —ПРОСТРАНСТВА X СЛЕДУЮЩИЕ УТВЕРЖДЕНИЯ ЭКВИВАЛЕНТНЫ:

(а) В X^* НЕТ НЕНУЛЕВЫХ ДИСКРЕТНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ;

(б) ДЛЯ ЛЮБОГО $x \in X_+$ И ЧИСЛА $\varepsilon > 0$ НАЙДУТСЯ ТАКИЕ $x_i \in X_+$ ($i=1, \dots, n$), ЧТО $x_i \wedge x_j = 0$ ПРИ $i \neq j$, $x_1 + x_2 + \dots + x_n = x$, ПРИЧЁМ $\|x_i\|_X \leq \varepsilon$ ($i=1, \dots, n$).

Д о к а з а т е л ь с т в о . (б) \implies (а). Допустим противное. Пусть $f \in X_+^*$, $\|f\|_{X^*} = 1$ и f — дискретен. Возьмём $x \in X_+$, такой что $f(x) = 1$. По условию найдутся такие $x_i \in X_+$ ($i=1, \dots, n$), что $x_i \wedge x_j = 0$ при $i \neq j$, $x_1 + x_2 + \dots + x_n = x$ и $\|x_i\|_X \leq \frac{1}{2}$ ($i=1, \dots, n$). Так как f — дискретен, то $1 = f(x) = \max\{f(x_1), \dots, f(x_n)\}$, что невозможно, ибо $f(x_i) \leq \|f\|_{X^*} \|x_i\|_X \leq \frac{1}{2}$ ($i=1, 2, \dots, n$). (а) \implies (б). Фиксируем произвольный $\varepsilon > 0$ ($x \in X$). Можно считать, что x есть слабая единица

в X , ибо в противном случае вместо X мы стали бы рассматривать главную компоненту в X , порождённую элементом x . Можно считать теперь, что X есть фундамент в $C_\infty(Q)$, где Q - подходящий квазиэкстремальный бикомпакт, причём $x = x_Q$. Заметим, что для любой точки $q \in Q$ существует $z \in X_+$ таковой, что $z(q) = +\infty$. Действительно, если точка $q \in Q$ такова, что $z(q) < +\infty$ для любого $z \in X_+$, то $\{z\} = z(q)$ при $z \in X$ есть ненулевой дискретный функционал на X , что невозможно. Для каждой точки $q \in Q$ зафиксируем теперь $z^q \in X_+$ таковой, что $\|z^q\|_X = 1$ и $z^q(q) = +\infty$. Через V_q обозначим замыкание множества $\{t \in Q : z^q(t) > \frac{1}{\varepsilon}\}$ в Q . Так как бикомпакт Q - квазиэкстремален, то V_q есть открыто-замкнутое множество. Заметим, что $x_{V_q} \leq \varepsilon z^q$, откуда $\|x_{V_q}\|_X \leq \varepsilon$. В силу бикомпактности Q из покрытия $\{V_q : q \in Q\}$ можно выделить конечное подпокрытие; тем самым найдутся $q_1, q_2, \dots, q_n \in Q$, такие что $\bigcup_{i=1}^n V_{q_i} = Q$. Обозначим для краткости $x_{V_{q_i}}$ через y_i . Остается положить $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2 - y_2 \wedge x_1$, $x_3 = y_3 - y_3 \wedge (x_1 + x_2)$, ..., $x_n = y_n - y_n \wedge (x_1 + \dots + x_{n-1})$. Теорема доказана.

4. В этом пункте будет доказана теорема, характеризующая банаховы KN -пространства, алгебраически и порядково изоморфные идеалам в соединении пространств $S[0,1]$ и S .

Т е о р е м а 4.3.15. ПУСТЬ X ЕСТЬ БАНАХОВО KN -ПРОСТРАНСТВО С ЕДИНИЦЕЙ И ТОТАЛЬНЫМ \bar{X} . СЛЕДУЮЩИЕ УТВЕРЖДЕНИЯ ЭКВИВАЛЕНТНЫ:

(а) X АЛГЕБРАИЧЕСКИ И ПОРЯДКОВО ИЗОМОРФНО НЕКОТОРОМУ ИДЕАЛУ В СОЕДИНЕНИИ ПРОСТРАНСТВ $S[0,1]$ И S ;

(б) на X существует счётная тотальная система (б) - линейных функционалов.

Доказательство. Импликация (а) \Rightarrow (б) очевидна, доказываем, что (б) \Rightarrow (а). Пусть $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ - счётное тотальное множество (б) - линейных функционалов на X . Можно считать, очевидно, что $f_n > 0$ при всех $n \in \mathbb{N}$, ибо в противном случае множество $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ можно было бы заменить объединением множеств $\{(f_n)_+ : n \in \mathbb{N}\}$ и $\{(f_n)_- : n \in \mathbb{N}\}$. Положим $F = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n}{2^n \|f_n\|}$. Тогда F есть существенно положительный функционал на X , поэтому X - K -пространство счётного типа. Итак, X - K -пространство счётного типа с единицей и \bar{X} тотально на X . Из сказанного в гл. 0 § 5 теперь вытекает, что X можно считать фундаментом в $S(T, \Sigma, \mu)$, где (T, Σ, μ) - подходящее пространство с конечной мерой. Пусть $f_n = f'_n + f''_n$, где $f'_n \in \bar{X}$, $f''_n \in X^*_{\text{отн}}$. Заметим, что f''_n - аномален в силу теоремы 0.4.1. Отсюда следует, что $X_n = \{x \in X : f''_n(|x|) = 0\}$ есть замкнутый по норме фундамент в X . Тогда $Y = \bigcap_{n=1}^{\infty} X_n$ есть замкнутый по норме фундамент в X в силу регулярности пространства $S(T, \Sigma, \mu)$. Так как Y с нормой, индуцированной из X , есть банахово KN -пространство, а мера μ - конечна, то Y есть пространство с единицей. Поэтому, не умаляя общности, можно считать, что $Y \supset L^\infty(T, \Sigma, \mu)$. Так как f''_n аннулируется на $L^\infty(T, \Sigma, \mu)$ при всех $n \in \mathbb{N}$, то множество $\{f'_n|_{L^\infty(T, \Sigma, \mu)} : n \in \mathbb{N}\}$ тотально на $L^\infty(T, \Sigma, \mu)$. Итак, на $L^\infty(T, \Sigma, \mu)$ существует счётное тотальное множество вполне линейных функционалов. Сказанное равносильно тому, что $L^1(T, \Sigma, \mu)$ метрически сепарабельно. Остаётся применить (Халмош [1], § 41). Теорема доказана.

5. Напомним следующий хорошо известный факт. Пусть X — банахово пространство, $\mathcal{J}: X \rightarrow X^{**}$ — оператор канонического вложения. Тогда для любого подпространства Y пространства X слабое* замыкание множества $\mathcal{J}(Y)$ в X^{**} естественным образом можно отождествить с Y^{**} . Пусть теперь X не просто банахово пространство, но КВ-линеал, Y — линейная подструктура в X . Возникает естественный вопрос, будет ли слабое* замыкание множества $\mathcal{J}(Y)$ в X^{**} линейной подструктурой в X^{**} ? Следующая теорема показывает, что ответ на этот вопрос утвердительный, причём без каких бы то ни было ограничений на X и Y .

Теорема 4.3.16. Пусть X есть КВ-линеал, $\mathcal{J}: X \rightarrow X^{**}$ — оператор канонического вложения, Y — линейная подструктура в X . Тогда слабое* замыкание множества $\mathcal{J}(Y)$ в X^{**} есть линейная подструктура в X^{**} .

Предварительно докажем следующую лемму.

Лемма 4.3.17. Пусть E_1 и E_2 — архимедовы К-линеалы, $0 \leq A \in \mathcal{N}_2(E_1 \rightarrow E_2)$, где $\mathcal{N}_2(E_1 \rightarrow E_2)$ есть совокупность всех регулярных операторов из E_1 в E_2 . Пусть

A обладает следующим свойством: для любого $0 < x \in E_1$ справедливо $\{Ay : y \in E_1, 0 \leq y \leq x\} = \{z : z \in E_2, 0 \leq z \leq Ax\}$.

Положим для любого $f \in \tilde{E}_2$

$$(\tilde{A}f)(x) = f(Ax),$$

где $x \in E_1$. Тогда $0 \leq \tilde{A} \in \mathcal{N}_2(\tilde{E}_2 \rightarrow \tilde{E}_1)$, причём

$$(\tilde{A}f)_+ = \tilde{A}(f_+)$$

для любого $f \in \tilde{E}_2$. Следовательно, $\tilde{A}(\tilde{E}_2)$ есть линейная подструктура в \tilde{E}_1 .

Доказательство леммы 4.3.17. Для любого $x \in (E_1)_+$ и любого $f \in \tilde{E}_2$ имеем

$$\begin{aligned} (\tilde{A}f)_+(x) &= \sup\{(\tilde{A}f)(y) : y \in E_1, 0 \leq y \leq x\} = \\ &= \sup\{f(Ay) : y \in E_1, 0 \leq y \leq x\} = \sup\{f(z) : z \in E_2, 0 \leq z \leq Ax\} = \\ &= f_+(Ax) = (\tilde{A}f_+)(x). \end{aligned}$$

Следовательно, $(\tilde{A}f)_+ = \tilde{A}(f_+)$.

Доказательство теоремы 4.3.16. Не умаляя общности, можно считать, что Y замкнуто по норме в X .

Пусть $T : Y \rightarrow X$ — действительный оператор вложения. Тогда оператор $\tilde{T} : \tilde{X} \rightarrow \tilde{Y}$ удовлетворяет условиям леммы 4.3.17, то есть

$$\begin{aligned} \text{для любого } f \in \tilde{X}_+ \text{ справедливо } \{ \tilde{T}g : g \in \tilde{X}, 0 \leq g \leq f \} = \\ = \{ h : h \in \tilde{Y}, 0 \leq h \leq \tilde{T}f \}. \end{aligned}$$

Поэтому оператор $\tilde{T} : \tilde{Y} \rightarrow \tilde{X}$

сохраняет грани конечных множеств, следовательно, множество

$\tilde{T}(\tilde{Y})$ является линейной подструктурой в \tilde{X} . Остается

заметить, что $\tilde{T}(\tilde{Y})$ совпадает со слабым* замыканием

множества $\mathcal{K}(Y)$ в X^{**} . Теорема доказана.

§ 4. О строении пространства (b) -сопряженного к пространству Марцинкевича

1. Ввиду в этом параграфе Ψ есть неубывающая, непрерывная, вогнутая на $[0, 1]$ функция, такая что $\Psi(0) = 0$, $\Psi(t) > 0$ при $t > 0$ и $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\Psi(t)} = 0$. Через $M(\Psi)$ обозначается пространство Марцинкевича (см. гл. 0 § 6 п. 7).

Через μ обозначается мера Лебега на $[0, 1]$, Σ — совокупность всех измеримых подмножеств отрезка $[0, 1]$, причём

как обычно эквивалентные множества отождествляются.

О п р е д е л е н и е 4.4.1. Для $f \in M(\Psi)^*$ и $E \in \Sigma$ через f_E обозначается функционал, задаваемый формулой

$$f_E(x) = f(x \chi_E), \quad x \in M(\Psi).$$

Т е о р е м а 4.4.2.

I. ПУСТЬ $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\Psi(2t)}{\Psi(t)} > 1$. ТОГДА $M(\Psi)^*$ ЕСТЬ КВ-ПРОСТРАНСТВО И ПОТОМУ ДЛЯ ЛЮБОГО $f \in M(\Psi)_{ant}^*$ И ЛЮБОГО ЧИСЛА $\varepsilon > 0$ СУЩЕСТВУЕТ $E \in \Sigma$, ТАКОВ ЧТО $\mu E < \varepsilon$ И $f = f_E$.

II. ПУСТЬ $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\Psi(2t)}{\Psi(t)} = 1$. ТОГДА $M(\Psi)^*$ НЕ ТОЛЬКО НЕ ЯВЛЯЕТСЯ КВ-ПРОСТРАНСТВОМ, НО ДАЖЕ НЕ ЯВЛЯЕТСЯ ПРОСТРАНСТВОМ СЧЁТНОГО ТИПА. БОЛЕЕ ТОГО, В ПРЕДПОЛОЖЕНИИ СПРАВЕДЛИВОСТИ КОНТИНУУМ-ГИПОТЕЗЫ СУЩЕСТВУЕТ $f \in M(\Psi)_{ant}^*$, $f \geq 0$ ТАКОЙ ЧТО:

(а) ЕСЛИ $E \in \Sigma$, $\mu E > 0$, ТО $\|f_E\|_{M(\Psi)^*} = 1$;

(б) $f(x) = 0$ ДЛЯ ЛЮБОГО $x \in L^\infty[0,1]$.

Оставшаяся часть этого параграфа посвящена доказательству теоремы 4.4.2.

2. Л е м м а 4.4.3. Положим $R(\Psi) = \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{0 < t \leq 1} \frac{\Psi(t)}{\Psi(\frac{t}{n})}$

Тогда

(а) если $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\Psi(2t)}{\Psi(t)} = 1$, то $R(\Psi) = 1$;

(б) если $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\Psi(2t)}{\Psi(t)} > 1$, то $R(\Psi) = +\infty$ и если Ψ строго возрастает, то $\inf_{0 < t \leq 1} \frac{\Psi(t)}{\Psi(\frac{t}{n})} > 1$ при всех $n \geq 2, n \in \mathbb{N}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. (а) Пусть $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\Psi(2t)}{\Psi(t)} = 1$.

Тогда (см. Семёнов [2], стр. 42, 43, лемма 1.2) для любого

$\ell \geq 1$ справедливо $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\Psi(\ell t)}{\Psi(t)} = 1$, отсюда $\inf_{0 < t \leq 1} \frac{\Psi(t)}{\Psi(\frac{t}{n})} = 1$

при всех $n \in \mathbb{N}$, поэтому $R(\Psi) = 1$. (б) Пусть $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\Psi(2t)}{\Psi(t)} > 1$.

Положим $u_n = \inf_{0 < t \leq 1} \frac{\Psi(t)}{\Psi(\frac{t}{n})}$ ($n \in \mathbb{N}$). Ясно, что $1 \leq u_n$.

Заметим, что для любых $m, n \in \mathbb{N}$ справедливо $\frac{\Psi(t)}{\Psi(\frac{t}{2^m n})} = \prod_{k=0}^{m-1} \frac{\Psi(\frac{t}{2^{k+1}n})}{\Psi(\frac{t}{2^k n})}$, откуда $\frac{\Psi(t)}{\Psi(\frac{t}{2^m n})} \geq (u_{2^m n})^m$, следовательно, $u_{2^m n} \geq (u_{2^m})^m$. Допустим, что $R(\Psi) < +\infty$. Тогда, очевидно, $u_n = 1$ при всех $n \in \mathbb{N}$.

Поэтому найдётся последовательность $t_n \in (0, 1]$, такая что $\frac{\Psi(t_n)}{\Psi(\frac{t_n}{n})} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$. Ясно, что тогда $t_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ и $\frac{\Psi(t_n)}{\Psi(\frac{t_n}{2})} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$.

Это противоречит тому, что $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\Psi(2t)}{\Psi(t)} > 1$. Пусть теперь Ψ всюду строго возрастает. Нужно показать, что $u_2 > 1$. До-

пустим противное. Тогда найдётся последовательность $t_n \in (0, 1]$ ($n \in \mathbb{N}$), такая что $\frac{\Psi(t_n)}{\Psi(\frac{t_n}{2})} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$. Можно считать, что последовательность t_n сходится к некоторому $t^* \in [0, 1]$. Так как $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\Psi(2t)}{\Psi(t)} > 1$, то $t^* \neq 0$. Поэтому имеем $\frac{\Psi(t^*)}{\Psi(\frac{t^*}{2})} = 1$. Это противоречит строгой монотонности функции Ψ . Лемма доказана.

3. В этом пункте будет доказано утверждение 1 теоремы

4.4.2. Пусть $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\Psi(2t)}{\Psi(t)} > 1$. Не умаляя общности, можно всю-

ду считать, что Ψ строго возрастает на $[0, 1]$ (этого можно добиться, соответствующим образом переопределив Ψ на некотором промежутке вида $[\tau, 1]$, где $\tau > 0$, что приведёт лишь к эквивалентной перенормировке пространства). Покажем,

что пространство $M(\Psi)$ квазиравномерно выпукло. Пусть

$x_1, x_2 \in M(\Psi)_+$, $x_1 \wedge x_2 = 0$, $\|x_1\|_{M(\Psi)} = \|x_2\|_{M(\Psi)} = 1$. Возьмём любые

$E_1, E_2 \in \Sigma$, такие что $h_1 = \mu E_1 > 0$, $h_2 = \mu E_2 > 0$, $\mu(E_1 \cap E_2) = 0$. По-

ложим $E = E_1 \cup E_2$, $h = \mu E$. По условию $\frac{1}{\Psi(h_i)} \int_{E_i} x_i d\mu \leq 1$

($i = 0, 1$). Теперь для $x = x_1 + x_2$ имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Psi(h)} \int_E x d\mu &= \frac{1}{\Psi(h)} \left[\left(\frac{1}{\Psi(h_1)} \int_{E_1} x_1 d\mu \right) \Psi(h_1) + \left(\frac{1}{\Psi(h_2)} \int_{E_2} x_2 d\mu \right) \Psi(h_2) \right] \leq \\ &\leq \frac{1}{\Psi(h)} \left[\Psi(h_1) + \Psi(h_2) \right] \leq \frac{2\Psi\left(\frac{h}{2}\right)}{\Psi(h)} \leq \frac{2}{\inf_{0 < t \leq 1} \frac{\Psi(t)}{\Psi\left(\frac{t}{2}\right)}}. \end{aligned}$$

Следовательно $\|x\|_{M(\Psi)} \leq \frac{2}{\inf_{0 < t \leq 1} \frac{\Psi(t)}{\Psi\left(\frac{t}{2}\right)}}$. Но $\frac{2}{\inf_{0 < t \leq 1} \frac{\Psi(t)}{\Psi\left(\frac{t}{2}\right)}} < 2$ в силу леммы 4.4.3. Тем самым, $M(\Psi)$ — квазиравномерно выпукло. По теореме 0.3.II $M(\Psi)^*$ есть КВ-пространство. Поэтому каждый $f \in M(\Psi)^*_{\text{ант}}$ — локализованной (лемма 4.2.II). Утверждение I доказано.

4. Оставшаяся часть параграфа посвящена доказательству утверждения II. Считаем, что $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\Psi(2t)}{\Psi(t)} = 1$. В силу леммы 4.4.3 $R(\Psi) = 1$, поэтому найдётся такая числовая последовательность $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, что $0 < a_n \leq \frac{1}{n}$ ($n \in \mathbb{N}$) и $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Psi(n a_n)}{\Psi(a_n)} = 1$.

До конца параграфа положим $\varphi(t) = \frac{d\Psi(t)}{dt}$ для почти всех $t \in [0, 1]$. Ясно, что $\varphi \in M(\Psi)$, причём $\|\varphi\|_{M(\Psi)} = 1$ для любого $\varepsilon \in (0, 1]$.

Если $x \in S[0, 1]$, то через x^* обозначается перестановка функции $|x|$ в невозрастающем порядке.

$$\text{supp } x \stackrel{\text{def}}{=} \{t \in [0, 1] : x(t) \neq 0\}.$$

Обозначим через Z множество всех $x \in M(\Psi)_+$, таких что для некоторого $\varepsilon \in (0, 1]$ (зависящего от x) функции x и $\varphi x_{[0, \varepsilon]}$ — равноизмеримы.

Напомним, что Σ есть совокупность всех измеримых подмножеств отрезка $[0, 1]$, причём эквивалентные множества

отождествляются. Через Δ будем обозначать множество (точнее - класс всех множеств) нулевой меры. Зафиксируем какое-нибудь $A \subset \Sigma$, такое что $\Delta \notin A$ и мощность множества A равна \aleph_1 . В предположении справедливости континуум-гипотезы можно принять $A = \Sigma \setminus \Delta$. Для доказательства утверждения II достаточно установить существование такого $f \in M(\Psi)_+^*$, что $f(x) = 0$ для любого $x \in L^\infty[0,1]$, $\|f\|_{M(\Psi)^*} = 1$ для любого $E \in A$ и f представим в виде

$$f(x) = \sum_{E \in A} f^E(x), \quad x \in M(\Psi),$$

где $0 < f^E \in M(\Psi)^*$ и $f^{E_1} \wedge f^{E_2} = 0$ при $E_1 \neq E_2$ из A .

Л е м м а. Существует отображение $A \ni E \rightarrow z^E \in Z$, такое что: (а) если $E_1, E_2 \in A$ и $E_1 \neq E_2$, то $z^{E_1} \wedge z^{E_2} \in L^\infty[0,1]$; (б) если $E \in A$, то $\text{supp } z^E \subset E$.

Справедливость леммы без труда устанавливается с помощью трансфинитной индукции.

Теперь для $E \in A$ и $n \in \mathbb{N}$ построим множество R_E^n следующим образом. Если $\mu(\text{supp } z^E) \leq \alpha_n$, то полагаем $R_E^n = \text{supp } z^E$. Если же $\mu(\text{supp } z^E) > \alpha_n$, то за R_E^n принимаем любое измеримое множество, такое что $\mu R_E^n = \alpha_n$, $R_E^n \subset \text{supp } z^E$ и

$$\forall z \in R_E^n \quad \forall t \in [0,1] \setminus R_E^n \quad \text{vrai } f^E(t) \geq \text{vrai } \text{sup } z^E(t).$$

Если E фиксировано, то, очевидно, $\mu R_E^n = \alpha_n$ для достаточно больших n . Кроме того, если $E_1 \neq E_2$ из A , то $\mu(R_{E_1}^n \cap R_{E_2}^n) = 0$ при достаточно больших n .

Зафиксируем теперь какой-нибудь обобщённый предел Lim , определённый на классе всех ограниченных числовых последовательностей (см. Канторович и Акилов [I], стр. 144). По каждому $E \in A$ построим функционал $f^E \in M(\Psi)_+$. Положим

$$f^E(x) = \text{Lim} \left(\left\{ \frac{1}{\Psi(a_n)} \int_{R_E^n} x d\mu \right\}_{n=1}^{\infty} \right), \quad x \in M(\Psi).$$

Ясно, что $\|f^E\|_{M(\Psi)_*} \leq 1$. Кроме того, $f^E(x_{[0,1]}) = 0$,

ибо $\frac{1}{\Psi(a_n)} \int_{R_E^n} x_{[0,1]} d\mu \leq \frac{a_n}{\Psi(a_n)} \rightarrow 0$. Заметим также, что $f^{E_1 \wedge E_2} = 0$ при $E_1 \neq E_2$ ($E_1, E_2 \in A$).

Возьмём произвольные попарно различные множества $E_1, E_2, \dots, E_m \in A$ и для $x \in M(\Psi)_+$ оценим сумму $\sigma = f^{E_1}(x) + \dots + f^{E_m}(x)$.

Выборим номер $n_0 \geq m$, такой что при $n \geq n_0$ справедливо $\mu(R_{E_i}^n \cap R_{E_j}^n) = 0$ ($i \neq j; i, j = 1, 2, \dots, m$). Тогда при $n \geq n_0$

$$\text{имеем } \delta_n = \sum_{k=1}^m \frac{1}{\Psi(a_n)} \int_{R_{E_k}^n} x d\mu \leq \frac{1}{\Psi(a_n)} \int_0^{na_n} x^* d\mu \leq \frac{1}{\Psi(a_n)} \int_0^{na_n} x^* d\mu$$

$$\text{откуда } \delta_n \leq \left[\frac{1}{\Psi(na_n)} \int_0^{na_n} x^* d\mu \right] \frac{\Psi(na_n)}{\Psi(a_n)} \leq \|x\|_{M(\Psi)} \frac{\Psi(na_n)}{\Psi(a_n)}$$

Так как $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Psi(na_n)}{\Psi(a_n)} = 1$, то $\sigma = \text{Lim } \delta_n \leq \|x\|_{M(\Psi)}$.

Отсюда ясно, что для любого $x \in M(\Psi)$ справедливо $\sum_{E \in A} |f^E(x)| \leq \|x\|_{M(\Psi)}$.

Положим теперь

$$f(x) = \sum_{E \in A} f^E(x), \quad x \in M(\Psi).$$

Ясно, что $f \in M(\Psi)_+$, $\|f\|_{M(\Psi)_*} \leq 1$ и $f(x_{[0,1]}) = 0$. Осталось показать, что $f^E > 0$ и $\|f^E\|_{M(\Psi)_*} \geq 1$ при всех $E \in A$.

Так как $\frac{1}{\Psi(a_n)} \int_{R_E^n} z^E d\mu = \frac{1}{\Psi(a_n)} \int_0^{a_n} \varphi(t) dt = 1$ при достаточно

Собственно n , то $\int^E(z^E) = \text{Lim}(\{ \frac{1}{\psi(q_n)} \int_{R^n} z^E d\mu \}_{n=1}^\infty) = 1$.

Поэтому $\| \int^E \|_{M(\psi)^*} \geq \int(z^E) \geq \int^E(z^E) \geq 1$. Теорема доказана.

§ 5. О строении пространства (b) -сопряжённого к пространству со смешанной нормой

I. В этом параграфе: $\Gamma = \{(t_1, t_2) : 0 \leq t_1, t_2 \leq 1\}$; ν - мера Лебега на Γ ; μ - мера Лебега на $[0, 1]$; p и q суть числа, такие что $1 \leq p, q \leq +\infty$; через X обозначается пространство $L^{(p,q)}$ (см.гл.0 § 6 п.4), элементы которого суть функции $x(t_1, t_2)$, определённые и измеримые на Γ , такие что

$$\|x\|_{L^{(p,q)}} = \| \|x\|_{L^p(t_1)} \|x\|_{L^q(t_2)} < +\infty .$$

Теорема 4.5.I. Пусть $X = L^{(p,q)}$. Тогда

- I. X^* есть кв-пространство при $(1 < p \leq \infty, 1 < q \leq \infty)$.
- II. X^* - счётного типа, но не является кв-пространством при $(1 \leq p \leq \infty, q = 1)$ и при $(p = 1, 1 < q < \infty)$.
- III. X^* не есть пространство счётного типа при $(p = 1, q = \infty)$. При этом тем не менее в пространстве $L^{(1,\infty)}$ все аномальные функционалы локализованы.

Оставшаяся часть параграфа посвящена доказательству теоремы 4.5.I.

2. В этом пункте будет доказано утверждение I. Пусть $(1 < p \leq \infty, 1 < q \leq \infty)$. Покажем, что в этом случае $X = L^{(p,q)}$

является квазиравномерно выпуклым пространством. Это очевидно, если $p = q = \infty$. Если же $1 < p < \infty$, $1 < q < \infty$, то верно даже более сильное утверждение: X является равномерно выпуклым пространством (см. Бенедек и Панзоне [1], стр. 317, теорема I).

Пусть $x_1, x_2 \in X$, $x_1 \wedge x_2 = 0$, $\|x_1\|_X = \|x_2\|_X = 1$. Если $p = \infty$, $1 < q < \infty$, то $\|x_1 + x_2\|_X = \left\{ \int_0^1 [v \operatorname{vraisup}_{t_1} (x_1 + x_2)]^q dt_2 \right\}^{\frac{1}{q}} =$
 $= \left\{ \int_0^1 [v \operatorname{vraisup}_{t_1} (x_1^q + x_2^q)] dt_2 \right\}^{\frac{1}{q}} \leq \left\{ \int_0^1 (v \operatorname{vraisup}_{t_1} x_1)^q dt_2 + \int_0^1 (v \operatorname{vraisup}_{t_1} x_2)^q dt_2 \right\}^{\frac{1}{q}} = (1+1)^{\frac{1}{q}} = 2^{\frac{1}{q}}.$

Если же $1 < p < \infty$, $q = \infty$, то $\|x_1 + x_2\|_X = v \operatorname{vraisup}_{t_2} \left\{ \int_0^1 [x_1 + x_2]^p dt_1 \right\}^{\frac{1}{p}} = v \operatorname{vraisup}_{t_2} \left\{ \int_0^1 x_1^p dt_1 + \int_0^1 x_2^p dt_1 \right\}^{\frac{1}{p}} \leq$
 $\leq \left\{ v \operatorname{vraisup}_{t_2} \int_0^1 x_1^p dt_1 + v \operatorname{vraisup}_{t_2} \int_0^1 x_2^p dt_1 \right\}^{\frac{1}{p}} = (1+1)^{\frac{1}{p}} = 2^{\frac{1}{p}}.$

Итак, в случае $(1 < p \leq \infty, 1 < q \leq \infty)$ X - квазиравномерно выпукло, поэтому X^* есть КВ-пространство (теорема 0.3.II). Утверждение I доказано.

3. В этом пункте будет доказано утверждение II. В случае $(1 \leq p < \infty, q = 1)$ и в случае $(p = 1, 1 < q < \infty)$ X является КВ-пространством (это легко проверяется непосредственно с помощью самого определения КВ-пространства), отсюда без труда вытекает, что $X^* = \overline{X}$ есть пространство счётного типа. Так как в указанных случаях X не является (б) - рефлексивным (см. Бенедек и Панзоне [1], стр. 306, теорема I), то X^* не является КВ-пространством в силу критерия (б) - рефлексивности

Степанова. В случае $(p = \infty, q = 1)$ то есть в случае $X = L^{(\infty, 1)}$, дуальное пространство $X' = L^{(1, \infty)}$ не есть KB-пространство (см., например, Стивен [1]), поэтому и подалго X^* не есть KB-пространство. Заметим, что, очевидно, измеримые ограниченные функции плотны в $L^{(\infty, 1)}$. Отсюда в силу предложения 4.29 следует, что X^* - счётного типа. Утверждение II доказано.

4. До конца параграфа полагаем $X = L^{(1, \infty)}$. В этом пункте будет доказано, что X^* не является пространством счётного типа.

Зафиксируем какой-нибудь функционал $F \in (L^\infty[0, 1])^*$ такой что для любого $\psi \in L^\infty[0, 1]$ справедливо неравенство

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [\text{vrai inf}_{0 \leq t \leq \varepsilon} \psi(t)] \leq F(\psi) \leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [\text{vrai sup}_{0 \leq t \leq \varepsilon} \psi(t)].$$

Такой функционал, очевидно, существует.

Для каждого $\tau \in [0, 1]$ построим теперь функционал $\varphi_\tau \in X_+^*$ следующим образом. Пусть $x \in X$. Положим $z_{\tau, x}(t_2) = \int_{\tau - t_2}^{\tau} x(t_1, t_2) dt_1$ для почти всех $t_2 \in [0, 1]$. Ясно, что $z_{\tau, x} \in L^\infty[0, 1]$. Полагаем

$$\varphi_\tau(x) = F(z_{\tau, x}), \quad x \in X.$$

Ясно, что $\varphi_\tau \in X^*$, $\varphi_\tau > 0$, причём $\varphi_{\tau_1} \wedge \varphi_{\tau_2} = 0$ при $\tau_1 \neq \tau_2$ ($\tau_1, \tau_2 \in [0, 1]$). Заметим, что для любого конечного числа попарно различных точек $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n \in [0, 1]$ справедливо неравенство

$$\left\| \sum_{k=1}^n \varphi_{\tau_k} \right\|_{X^*} \leq 1. \quad \text{Действительно, пусть } x \in X_+, \|x\|_X \leq 1$$

Для почти всех достаточно малых $t_2 > 0$ имеем $\sum_{k=1}^n z_{\tau_k, x}(t_2) \leq \int_0^{\tau} x(t_1, t_2) dt_1 \leq 1$. Откуда $\sum_{k=1}^n \varphi_{\tau_k}(x) = F\left(\sum_{k=1}^n z_{\tau_k, x}\right) \leq 1$.

Положим теперь

$$f(x) = \sum_{t \in [0,1]} \varphi_t(x), \quad x \in X.$$

Ясно, что $f \in X_+^*$ и f не есть функционал счётного типа, ибо функционалы $\varphi_t, t \in [0,1]$ попарно дизъюнкты и $0 \leq \varphi_t \leq f$. Итак, X^* не есть пространство счётного типа.

5. Л е м м а 4.5.2. Для любого $f \in X_+^*$ существует $g \in (L^\infty[0,1])_+^*$, такой что $f(x) \leq g(\int_0^1 x(t_1, t_2) dt_1)$ при всех $x \in X_+$.

Доказательство. В силу теоремы 0.4.3 множество $\{h \in \bar{X}_+ : \|h\|_{X^*} \leq 1\}$ слабо* плотно в множестве $\{h \in X_+^* : \|h\|_{X^*} \leq 1\}$. Поэтому существует направление $K_\alpha \in L_+^{(\infty,1)}$ ($\alpha \in A$), такое что $\sup_{\alpha \in A} \|K_\alpha\|_{L^{(\infty,1)}} < \infty$ и $\int_0^1 \int_0^1 K_\alpha(t_1, t_2) x(t_1, t_2) dt_1 dt_2 \xrightarrow{\alpha \in A} f(x)$ при всех $x \in X$. Положим $H_\alpha(t_2) = \sup_{t_1} K_\alpha(t_1, t_2)$ для почти всех $t_2 \in [0,1]$. Для $\alpha \in A$ определим функционал

$$h_\alpha(x) = \int_0^1 \int_0^1 x(t_1, t_2) H_\alpha(t_2) dt_1 dt_2, \quad x \in X.$$

Ясно, что $h_\alpha \in X_+^*$ и $\sup_{\alpha \in A} \|h_\alpha\|_{X^*} < \infty$. Пусть $\varphi \in X_+^*$ есть обобщённая предельная точка направления $\{h_\alpha\}_{\alpha \in A}$ относительно слабой* топологии. Для $\psi \in L^\infty[0,1]$ положим

$$\hat{\psi}(t_1, t_2) = \psi(t_2) \quad \text{при} \quad 0 \leq t_1, t_2 \leq 1.$$

Теперь, взяв

$$g(\psi) = \varphi(\hat{\psi}), \quad \psi \in L^\infty[0,1],$$

получаем, как легко видеть, искомый функционал g . Лемма доказана.

3. Если $f \in X^*$ и E есть измеримое подмножество T , то через f_E обозначается функционал на X , действующий по формуле

$$f_E(x) = f(x \chi_E), \quad x \in X.$$

Л е м м а 4.5.3. Пусть $f \in X_{an}^*$. Тогда для любого числа $\varepsilon > 0$ существует измеримое множество \mathcal{Q} на отрезке $[0, 1]$, такое что $\mu \mathcal{Q} < \varepsilon$ и $f = f_E$, где $E = \{(t_1, t_2) : 0 \leq t_1 \leq 1, t_2 \in \mathcal{Q}\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Можно считать, что $f \geq 0$. Пусть $g \in (L^\infty[0, 1])_+^*$ — соответствующий ему функционал из леммы 4.5.2. Представим g в виде $g = g_1 + g_2$, где g_1 — аномальный, а g_2 — вполне линейный функционал на $L^\infty[0, 1]$. Найдем $v \in L^1[0, 1]$, такое что

$$g_2(g) = \int_0^1 g(t) v(t) dt, \quad g \in L^\infty[0, 1].$$

Тогда при всех $x \in X_+$ имеем

$$f(x) \leq g_1\left(\int_0^1 x(t_1, t_2) dt_1\right) + \int_0^1 \int_0^1 x(t_1, t_2) v(t_2) dt_1 dt_2.$$

Но функционал

$$G(x) = \int_0^1 \int_0^1 x(t_1, t_2) v(t_2) dt_1 dt_2, \quad x \in X,$$

очевидно, вполне линейен на X , поэтому $f \wedge G = 0$. Следовательно,

$$f(x) \leq q_1 \left(\int_0^1 x(t_1, t_2) dt_1 \right), \quad x \in X_+.$$

Но q_1 - анормальный, а значит и локализованный функционал на $L^\infty [0,1]$. Поэтому существует измеримое множество $\mathcal{P} \subset [0,1]$, такое что $\mu \mathcal{P} < \varepsilon$ и $q_1(\psi) = q_1(\psi \chi_{\mathcal{P}})$ при всех $\psi \in L^\infty [0,1]$. Ясно, что \mathcal{P} - требуемое множество. Лемма 4.5.3, а с ней и теорема 4.5.1 - доказаны.

§ 6. О проектировании банаховой структуры на её замкнутый идеал

БАНАХОВЫМ ПРОЕКТОРОМ из нормированного пространства E на его замкнутое подпространство F называется линейный непрерывный оператор \mathcal{P} из E на F , такой что $\mathcal{P}x = x$ для любого $x \in F$.

В этом параграфе с помощью ранее полученных результатов (в частности, результатов гл. IV § 2 о локализованных функционалах) устанавливается несуществование банаховых проекторов из довольно большого класса банаховых KN -пространств на некоторые их замкнутые идеалы.

1. Теорема 4.6.1. ПУСТЬ X ЕСТЬ БАНАХОВО KN -ПРОСТРАНСТВО, Y ЕГО ЗАМКНУТЫЙ ПО НОРМЕ ФУНДАМЕНТ, ПРИЧЕМ ВЫПОЛНЕНЫ СЛЕДУЮЩИЕ УСЛОВИЯ:

(а) НА X СУЩЕСТВУЕТ ТОТАЛЬНОЕ СЧЕТНОЕ МНОЖЕСТВО (δ) - ЛИНЕЙНЫХ (то есть линейных и непрерывных) ФУНКЦИОНАЛОВ^X;

^X) Это условие заведомо выполнено, если X есть идеал в $S[0,1]$ (см. теорему 4.3.15).

$$(б) X_{оп}^* = X_{loc}^* ;$$

(в) НИКАКАЯ НЕНУЛЕВАЯ КОМПОНЕНТА K -ПРОСТРАНСТВА X НЕ СОДЕРЖИТСЯ В Y .

ТОГДА НЕ СУЩЕСТВУЕТ БАНАХОВА ПРОЕКТОРА ИЗ X НА Y .

Доказательство . Допустим противное . Тогда фактор-пространство X/Y в линейном топологическом смысле изоморфно некоторому подпространству пространства X , следовательно, на X/Y существует тотальное счётное множество $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ (б)-линейных функционалов . Для $n \in \mathbb{N}$ положим

$$f_n(x) = \varphi_n(\gamma x), \quad x \in X,$$

где $\gamma : X \rightarrow X/Y$ есть канонический гомоморфизм . Подберём теперь числа $\alpha_n > 0$ ($n \in \mathbb{N}$) так, что $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \|f_n\|_{X^*} < +\infty$, и положим $f = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n |f_n|$. Ясно, что $f|_Y = 0$, в силу чего $f \in X_{оп}^*$. С другой стороны, пусть $K \neq \{0\}$ есть компонента в X . По условию существует $x \in K_+$, такой что $x \notin Y$, то есть такой что $\gamma x \neq 0$. Ясно, что $f(x) > 0$, тем самым $f|_K \neq 0$. Из сказанного вытекает, что $f \notin X_{loc}^*$. Итак, $f \in X_{оп}^*$, но $f \notin X_{loc}^*$. Противоречие . Теорема доказана .

2. Теорема 4.6.2. ПУСТЬ V ЕСТЬ НЕСЕПАРАБЕЛЬНОЕ ПРОСТРАНСТВО ОРЛИЧА НА $[0,1]$, X И Y СУТЬ ЕГО ЗАМКНУТЫЕ ПОДПРОСТРАНСТВА, ЯВЛЯЮЩИЕСЯ СИММЕТРИЧНЫМИ ПРОСТРАНСТВАМИ НА $[0,1]$, ПРИЧЁМ $Y \subset X$, $Y \neq X$. ТОГДА НЕ СУЩЕСТВУЕТ БАНАХОВА ПРОЕКТОРА ИЗ X НА Y .

Доказательство . Известно (см. Алиц [4]), что $V_{оп}^*$ есть KV -пространство с аддитивной нормой . Поэтому V^* есть K -пространство счётного типа . Отсюда легко следует,

что и X^* есть K -пространство счётного типа. Но тогда $X_{оп}^* = X_{loc}^*$ в силу предложения 4.2.5 и теоремы 4.2.12. Остаётся применить теорему 4.6.1. Теорема доказана.

Дадим ещё одно приложение теоремы 4.6.1. Рассмотрим пространство $L^{(p,q)}$ (где $1 \leq p, q \leq \infty$) на квадрате $\Gamma = \{(t_1, t_2) : 0 \leq t_1, t_2 \leq 1\}$, см. начало предыдущего параграфа. Обозначим через $L_0^{(p,q)}$ замыкание в $L^{(p,q)}$ множества всех ограниченных измеримых на Γ функций. Нетрудно видеть, что $L_0^{(p,q)} \neq L^{(p,q)}$ тогда и только тогда, когда $1 \leq p < \infty, q = \infty$.

Т е о р е м а 4.6.3. ПУСТЬ $1 \leq p < \infty$. ТОГДА НЕ СУЩЕСТВУЕТ БАНАХОВА ПРОЕКТОРА ИЗ $L^{(p,\infty)}$ НА $L_0^{(p,\infty)}$.

Действительно, $(L^{(p,\infty)})_{оп}^* = (L^{(p,\infty)})_{loc}^*$ в силу предложения 4.2.5 и теорем 4.2.12 и 4.5.1. Остаётся применить теорему 4.6.1.

3. Хорошо известный результат Флинниса о несуществовании банахова проектора из пространства ℓ^∞ на его подпространство C_0 обобщался в различных направлениях. Следующая теорема является ещё одним обобщением этого результата.

Т е о р е м а 4.6.4. ПУСТЬ X ЕСТЬ БАНАХОВО KN -ПРОСТРАНСТВО, Y — ЕГО ЗАМКНУТЫЙ ПО НОРМЕ ИДЕАЛ, УДОВЛЕТВОРЯЮЩИЙ УСЛОВИЮ (A). ЕСЛИ Y НЕ ЯВЛЯЕТСЯ КОМПОНЕНТОЙ В X , ТО НЕ СУЩЕСТВУЕТ БАНАХОВА ПРОЕКТОРА ИЗ X НА Y .

З а м е ч а н и е 4.6.5. В работе Т. Андо (см. Андо [3], стр. 41, теорема 8) приведён существенно более слабый результат. Именно, в теореме Андо дополнительно требуется, чтобы X и Y удовлетворяли следующему условию: для любого

$0 \in X \in X$ существует $0 < \psi \in Y$, такой что $\psi \in X$ и $\|\psi\| \geq \frac{1}{2} \|x\|$.

Доказательство теоремы 4.6.4. Обозначим через X_1 компоненту в X , порождённую Y , через X_2 — максимальное расширение пространства X_1 . Зафиксируем в X_2 единицу и обозначим через E множество всех ненулевых единичных элементов в X_2 .

Зафиксируем произвольный элемент $z \in X_1$, такой что $z \notin Y, z > 0$. Положим $E_1 = \{e \in E : 0e \leq 0z0, ze \in Y\}$. Хорошо известно, что если $x \in X_2$ дизъюнктен всем элементам множества E_1 , то x дизъюнктен z .

Лемма 4.6.6. Существует такое число $\varepsilon > 0$ и такая последовательность $e_n \in E_1$ ($n \in \mathbb{N}$), что: 1) $e_i \wedge e_j = 0$ при $i \neq j$, 2) $\|ze_n\|_Y \geq \varepsilon$ при всех $n \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Обозначим через E_2 максимальное подмножество в E_1 , состоящее из попарно дизъюнктивных элементов. Так как, очевидно, $z = \sup\{ze : e \in E_2\}$, то множество E_2 не является конечным. Если E_2 несчётно, то справедливость леммы вытекает из того, что несчётное множество положительных чисел содержит счётное подмножество, инфимум которого положителен.

Пусть теперь E_2 — счётно, $E_2 = \{u_n : n \in \mathbb{N}\}$. Для $n \in \mathbb{N}$ положим $B_n = \lim_{m \rightarrow \infty} \|\sum_{k=n}^m zu_k\|_Y$. Тогда $B_1 \geq B_2 \geq \dots \geq B_n \geq \dots$. Положим также $\varepsilon = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} B_n$. Так как $z \notin Y$, то $\varepsilon > 0$. После этого нетрудно найти такую последовательность $n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$ натуральных чисел, что

$\|\sum_{k=n_i}^{n_{i+1}-1} zu_k\|_Y \geq \varepsilon$ при всех $i \in \mathbb{N}$. Остаётся положить $e_i = \sum_{k=n_i}^{n_{i+1}-1} u_k$ ($i \in \mathbb{N}$). Лемма доказана.

Продолжим доказательство теоремы. Возьмём произвольный $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots) \in \ell^\infty$. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k z e_k$ очевидно, (0) -сходится в X . Обозначим через $S\lambda$ его сумму. Без труда проверяется, что $\|\lambda\|_{\ell^\infty} \leq \|S\lambda\|_X \leq \|z\|_X \|\lambda\|_{\ell^\infty}$. Поэтому $V = \{S\lambda : \lambda \in \ell^\infty\}$ есть замкнутое подпространство в X , и S есть линейно топологический изоморфизм ℓ^∞ на V . Обозначим через Γ сужение S на C_0 и положим $W = \{\Gamma\lambda : \lambda \in C_0\}$. Тогда W есть замкнутое подпространство в Y , а Γ есть линейно топологический изоморфизм C_0 на W .

Л е м м а 4.6.7. Существует банахов проектор Q из Y на W .

Д о к а з а т е л ь с т в о . Нетрудно построить последовательность функционалов $f_n \in Y_+^*$ ($n \in \mathbb{N}$), обладающую следующими свойствами:

- 1) $\|f_n\|_{Y^*} \leq \frac{1}{2}$ ($n \in \mathbb{N}$);
- 2) $f_n(z e_n) = 1$ ($n \in \mathbb{N}$);
- 3) если $y \in Y$ и $|y| \wedge z e_{n_0} = 0$ для некоторого $n_0 \in \mathbb{N}$, то $f_{n_0}(y) = 0$.

Убедимся теперь, что $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(y) = 0$ для любого $y \in Y$. Для этого положим $h_n = \sum_{k=1}^{\infty} e_k |y|^{n+1}$. Ясно, что $0 \leq h_n \leq |y|$ и $h_n \uparrow 0$ в Y . Так как в Y выполнено условие (A), то $\|h_n\|_Y \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Остается заметить, что $|f_n(y)| \leq f_n(|y|) = f_n(e_n |y|) \leq f_n(h_n) \leq \|f_n\|_{Y^*} \|h_n\|_Y \leq \frac{1}{2} \cdot \|h_n\|_Y \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Теперь для $y \in Y$ положим $Qy = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(y) z e_k$. Написанный ряд, очевидно, сходится по норме в Y , ибо $f_k(y) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$; при этом $Qy \in W$. Теперь уже нетрудно проверить, что Q есть банахов проектор из Y на W . Лемма доказана.

Продолжаем доказательство теоремы 4.6.4. Допустим, что существует банахов проектор P из X на Y . Тогда оператор $H = T^{-1}QPS$ есть проектор из ℓ^∞ на C_0 , что противоречит вышеупомянутому результату Флинкса. Теорема доказана.

4. В заключение этого параграфа докажем следующую теорему.

Т е о р е м а 4.6.8. В ПРЕДПОЛОЖЕНИИ СПРАВЕДЛИВОСТИ КОНТИНУУМ ГИПОТЕЗЫ СУЩЕСТВУЕТ БАНАХОВО K -ПРОСТРАНСТВО X , ЯВЛЯЮЩЕЕСЯ ФУНДАМЕНТОМ В $S[0,1]$, И ЗАМКНУТЫМ ФУНДАМЕНТОМ Y В X , ТАКИЕ ЧТО:

(а) НИКАКАЯ НЕНУЛЕВАЯ КОМПОНЕНТА K -ПРОСТРАНСТВА X НЕ СОДЕРЖИТСЯ В Y ;

(б) СУЩЕСТВУЕТ БАНАХОВ ПРОЕКТОР ИЗ X НА Y .

Д о к а з а т е л ь с т в о . Через μ обозначаем меру Лебега на $[0,1]$, Σ - совокупность всех измеримых подмножеств отрезка $[0,1]$, причём как обычно эквивалентные множества отождествляются. Через Z обозначим какое-нибудь непараллельное пространство Орлица на $[0,1]$. Нам понадобится

следующий факт, без труда вытекающий из результатов работы (Андо [4]). Для любой ненулевой компоненты V K -пространства

Z найдётся $f \in Z_+^*$, удовлетворяющий условиям: $f \neq 0$;
 $f(x \vee y) = \max\{f(x), f(y)\}$ для любых $x, y \in Z$; $f(x) = 0$ для любого $x \in V$ ($x \in Z$).

Л е м м а 4.6.9. Для каждого $E \in \Sigma$ можно указать такие $f_E \in Z_+^*$ и $z_E \in Z_+$, что:

(1) $f_E(x \vee y) = \max\{f_E(x), f_E(y)\}$ для любых $x, y \in Z$;

(2) $f_E(z_E) = 1$;

(3) $\|z_E\|_Z = 1$;

(4) $z_E(t) = 0$ для почти всех $t \in [0,1] \setminus E$;

(5) если $E_1 \neq E_2, (E_1, E_2 \in \Sigma)$, то $z_{E_1} \wedge z_{E_2} \in L^\infty [0,1]$;

(6) если $E_1 \neq E_2, (E_1, E_2 \in \Sigma)$, то $\int_{E_1} (z_{E_2}) = 0$.

Заметим, что (6) есть следствие (1)–(5). Действительно, так как $z_{E_1} \wedge z_{E_2} \in L^\infty [0,1]$, то $\int_{E_1} (z_{E_1} \wedge z_{E_2}) = 0$, ибо \int_{E_1} очевидно, аннулируется на $L^\infty [0,1]$. Но $\int_{E_1} (z_{E_1} \wedge z_{E_2}) = \min \left\{ \int_{E_1} (z_{E_1}), \int_{E_1} (z_{E_2}) \right\} = \min_{E_1} \left\{ \int_{E_1} (z) \right\}$, откуда $\int_{E_1} (z_{E_2}) = 0$. Теперь уже нетрудно доказать лемму, методом трансфинитной индукции, используя упомянутое следствие из результатов Т. Андо и предположение о справедливости континуум-гипотезы.

Продолжаем доказательство теоремы. За X примем множество всех $x \in Z$, таких что

$$\|x\|_X = \|x\|_Z + \sum_{E \in \Sigma} \int_E (|x|) < +\infty.$$

Ясно, что X с нормой $\|\cdot\|_X$ есть банахово KN -пространство, фундамент в $S[0,1]$, причём $L^\infty [0,1] \subset X$. Заметим, что $z_E \in X$ для любого $E \in \Sigma$. Положим $Y = \{x \in X : \int_E (x) = 0 \text{ для любого } E \in \Sigma\}$. Ясно, что Y есть замкнутый фундамент в X , причём $L^\infty [0,1] \subset Y$.

Покажем теперь, что X и Y – требуемые пространства. Так как $z_E \notin Y$ и $z_E \in X$ для любого $E \in \Sigma$, то никакая ненулевая компонента пространства X не содержится в Y . Положим теперь

$$\mathcal{P}x = x - \sum_{E \in \Sigma} \int_E (x) z_E, \quad x \in X$$

и покажем, что \mathcal{P} – линейный банахов проектор. Заметим прежде всего, что $\sum_{E \in \Sigma} \left\| \int_E (x) z_E \right\|_X = \sum_{E \in \Sigma} \int_E (|x|) \|z_E\|_X =$

$$= 2 \sum_{E \in \Sigma} \rho_E(|x|) \leq 2 \|x\|_X \quad \text{для любого } x \in X \quad . \text{ Ибо } \|z_E\|_X = 2 .$$

Тем самым \mathcal{P} есть (b) - линейный оператор из X в X .

Ясно, что $\mathcal{P}y = y$ для любого $y \in Y$. Далее, для любого $x \in X$

$$\text{и любого } F \in \Sigma \quad \text{имеем } \rho_F(\mathcal{P}x) = \rho_F(x) - \sum_{E \in \Sigma} \rho_E(x) \rho_F(z_E) = \\ = \rho_F(x) - \rho_F(x) = 0 \quad , \text{ тем самым } \mathcal{P}x \in Y \quad . \text{ Теорема доказана.}$$

ПРИЛОЖЕНИЕ

Об интерполяции линейных операторов в пространствах типа $X_0^{1-s} X_1^s$.

Цель настоящего приложения — дать некоторые применения результатов, полученных в главе II, к интерполяции линейных операторов в пространствах Кальдерона. При этом ради простоты мы будем рассматривать только случай пространств измеримых функций, а не общий случай произвольных банаховых RN -пространств.

I. Пусть (T, Σ, μ) — пространство с σ -конечной мерой. Через $S_K = S_K(T, \Sigma, \mu)$ будем обозначать комплексную оболочку пространства $S = S(T, \Sigma, \mu)$, то есть совокупность всех (классов) функций x на T , таких что $Re x, Im x \in S$. Банаховым функциональным пространством на (T, Σ, μ) будем называть комплексное банахово пространство X , являющееся линейным подмножеством в S_K и удовлетворяющее условию:

$$(x \in X, y \in S_K, |y| \leq |x|) \implies (y \in X, \|y\|_X \leq \|x\|_X). \quad (I)$$

Через X_2 будем обозначать вещественное ядро пространства X , то есть $X_2 = X \cap S$. Очевидно, что X_2 есть банахово RN -пространство, являющееся идеалом в S . Будем говорить, что норма в X непрерывна, полунепрерывна или монотонно полна, если соответствующим свойством обладает норма в X_2 .

Пусть теперь X_0 и X_1 — банаховы функциональные пространства на (T, Σ, μ) и s — произвольное число, такое что $0 < s < 1$. Пространство $X_s = X_0^{1-s} X_1^s$ определяется точ-

но так же как в вещественном случае (см. определение 2.1.7), то есть X_S состоит из всех $x \in S_K$, для которых имеет смысл и конечна норма

$$\|x\|_{X_S} = \inf \left\{ \lambda \geq 0 : |x| \leq \lambda x_0^{1-s} x_1^s, \|x_0\|_{X_0}, \|x_1\|_{X_1} \leq 1, x_0, x_1 \geq 0 \right\}.$$

Ясно, что $(X_0^{1-s} X_1^s)_2 = ((X_0)_2)^{1-s} ((X_1)_2)^s$.

Хорошо известно, что $X_0 + X_1$ и $X_0 \cap X_1$ суть банаховы функциональные пространства на (T, Σ, μ) , если на них ввести следующие нормы:

$$\|x\|_{X_0 + X_1} = \inf \left\{ \|x_0\|_{X_0} + \|x_1\|_{X_1} : x_0 \in X_0, x_1 \in X_1, x_0 + x_1 = x \right\}, x \in X_0 + X_1;$$

$$\|x\|_{X_0 \cap X_1} = \max \left\{ \|x\|_{X_0}, \|x\|_{X_1} \right\}, x \in X_0 \cap X_1.$$

2. Пусть далее (T_1, Σ_1, μ_1) и (T_2, Σ_2, μ_2) — пространства с σ -конечными мерами, X_0 и X_1 — банаховы функциональные пространства на (T_1, Σ_1, μ_1) , Y_0 и Y_1 — банаховы функциональные пространства на (T_2, Σ_2, μ_2) , число $s \in (0, 1)$, $X_S = X_0^{1-s} X_1^s$, $Y_S = Y_0^{1-s} Y_1^s$. Пусть также R есть линейный оператор из $X_0 + X_1$ в $Y_0 + Y_1$, действующий непрерывным образом из X_i в Y_i с нормой M_i ($i = 0, 1$).

Нас будет интересовать следующий вопрос: при каких условиях оператор R непрерывно действует из X_S в Y_S ? Если это имеет место, то через M_S будем обозначать норму R как оператора из X_S в Y_S .

Из результатов работы (Кальдерон [1]) следует, что если норма в X_S непрерывна, то R действует непрерывно из X_S в Y_S , причём

$$M_s \leq M_0^{1-s} M_1^s \quad (2)$$

Некоторые результаты в указанном направлении имеются также в работе (Забрейко [I]).

Мы докажем сейчас теорему, уточняющую основной результат работы (Забрейко [I]).

Т е о р е м а 1. ЕСЛИ НОРМЫ В Y_0 И Y_1 ПОЛУНЕПРЕРЫВНЫ И МОНОТОННО ПОЛНЫ, ТО R НЕПРЕРЫВНО ДЕЙСТВУЕТ ИЗ X_S В Y_S С ОЦЕНКОЙ (2).

Д о к а з а т е л ь с т в о . Из теоремы 2.4.2 следует, что норма в X_S полунепрерывна и монотонно полна. Из предложения 0.3.6 теперь легко следует, что множество $\{y \in Y_S : \|y\|_{Y_S} \leq 1\}$ замкнуто в пространстве $Y_0 + Y_1$. Поэтому пространство Y_S совпадает с пространством $[Y_0, Y_1]^S$, полученным методом комплексной интерполяции (см. Кальдерон [I], § 13.6). Но $X_S \subset [X_0, X_1]^S$ и норма оператора вложения ≤ 1 (см. Кальдерон [I], § 13.6). Остаётся применить интерполяционную теорему из (Кальдерон [I], § 7).

З а м е ч а н и е 2. В доказательстве теоремы I были использованы тонкие результаты работы (Кальдерон [I]) о комплексной интерполяции. Нетрудно дать другое доказательство теоремы I, основанное на результатах главы II, и не опирающееся на результаты работы (Кальдерон [I]). Ключом к такому доказательству служит теорема 2.2.12.

Из теоремы I, предложения 0.4.4 и теоремы 2.4.2 вытекает

Т е о р е м а 3. ЕСЛИ НОРМЫ В Y_0 И Y_1 МОНОТОННО ПОЛНЫ, ТО R НЕПРЕРЫВНО ДЕЙСТВУЕТ ИЗ X_S В Y_S .

3. В связи с теоремами 1 и 3 естественно возникают следующие два вопроса:

- i) Будет ли R действовать из X_S в Y_S , если на X_0, X_1, Y_0, Y_1, R не накладывают вообще никаких ограничений?
- ii) В условиях теоремы 3 будет ли справедлива оценка (2)?

Мы приведём примеры, показывающие, что ответы на оба вопроса отрицательны.

В этих примерах банаховы функциональные пространства строятся на отрезке $(0,1)$ с лебеговой мерой. Через 1 обозначается функция, тождественно равная 1, через e обозначается функция $\frac{1}{t}$ на $(0,1)$.

Пример 4. За X_0 принимаем пространство всех $x \in S_K(0,1)$, таких что

$$\|x\|_{X_0} = \sup_{t \in (0,1)} \left| \frac{x(t)}{e(t)} \right| < +\infty.$$

Прежде чем продолжать построение примера, докажем следующую лемму.

Лемма 5. Существует функционал $f \in X_0^*$, удовлетворяющий условиям:

- (а) $f(x) \geq 0$ при $0 \leq x \in X_0$;
- (б) $f(\max\{x, y\}) = \max\{f(x), f(y)\}$ при $0 \leq x, y \in X_0$;
- (в) $f(e) = 1, f(e^\delta) = 0$ при $0 \leq \delta < 1$.

Доказательство. В силу теоремы Крейн-Иангута существует бикомпакт K и сохраняющий порядок изометрический изоморфизм H пространства X_0 на простран-

ство всех комплексных непрерывных функций на K , так что $H(e)$ есть функция, тождественно равная 1 на K . Ясно, что существует $\rho \in K$, такая что $(H(\Pi))(\rho) = 0$. Остается положить

$$f(x) = (H(x))(\rho), \quad x \in X_0.$$

Лемма доказана.

Продолжаем построение примера. Фиксируем функционал f , построенный в лемме 5, и положим $Y_0 = \{x \in X_0 : f(x) = 0\}$ с нормой, индуцированной из X_0 . Ясно, что Y_0 есть банахово функциональное пространство, ибо, если $x, y \in X_0, |x| \leq |y|, f(y) = 0$, то $f(x) = 0$. Заметим, что норма в Y_0 не является монотонно полной.

За $X_1 = Y_1$ теперь примем пространство всех $x \in S_K(0,1)$, так что

$$\|x\|_{X_1} = \|x\|_{Y_1} = \sup_{t \in (0,1)} |x(t)| < +\infty.$$

Заметим, что $X_0 \supset X_1, Y_0 \supset Y_1$, в силу чего $X_0 + X_1 = X_0, Y_0 + Y_1 = Y_0$.

Положим теперь

$$Rx = x - f(x)e, \quad x \in X_0.$$

Ясно, что R непрерывно действует из X_0 в Y_0 (ибо $f(Rx) = f(x) - f(x)f(e) = f(x) - f(x) = 0$ для любого $x \in X_0$) и из X_1 в Y_1 (ибо $Rx = x$ для любого $x \in X_1$). Покажем, что R не действует из X_s в Y_s ни при каком $s \in (0,1)$. Действительно, ясно, что $e^{1-s} \in X_s$, но $e^{1-s} \notin Y_s$. Остается заметить,

что $R(e^{1-s}) = e^{1-s}$, ибо $\int_0^1 (e^{1-s}) = 0$. Итак, ответ на вопрос i) — отрицательный.

Пример 6. Пусть X_0, X_1, Y_1, R те же, что в примере 4, а Y_0 по набору элементов совпадает с X_0 , но норма

$$\|x\|_{Y_0} = \|x\|_{X_0} + k \int_0^1 |x|, \quad x \in Y_0,$$

где \int из леммы 5, а $k > 0$ — пока произвольное число. Заметим, что норма в Y_0 не является полунепрерывной. Ясно, что нормы в Y_0 и Y_1 монотонно полны, но

$$M_0 \leq 2, \quad M_1 = 1, \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} M_k = +\infty.$$

Итак, ответ на вопрос ii) тоже отрицательный.

Цитированная литература

Абрамович Ю.А.

1. Некоторые теоремы о нормированных структурах. Д.,
Вестн. ун-та, № 13, серия матем., 3 (1971), 5-11.

Александров П.С.

1. Введение в общую теорию множеств и функций. М., Гос-
техиздат, 1948.

Амемия (Amemiya I.)

1. A generalization of Riesz-Fischer theorem. J. Math. Soc.
Japan, 5 (1953), 353-354.

Амир и Линденштраусс (Amir D.,
Lindenstrauss J.)

1. The structure of weakly compact sets in Banach spaces.
Ann. of Math., 88, № 1 (1968), 35-46.

Андо (Andô T.)

1. On the continuity of norms. Proc. Japan Acad.,
33, № 8 (1957), 429-434.

2. Convexity and evenness in modularized semi-ordered
linear spaces. J. Fac. Sci. Hokkaido Univ., ser. I, math., 14, № 2, 3, 4 (1959), 59-95.

3. On the continuity of the norm by a modular. Res. Inst.
Appl. Electricity Monograph, 7 (1959), 31-44.

4. Linear functionals on Orlicz spaces. Nieuw Archief
voor Wiskunde (3), VIII (1960), 1-16.

Бенедек и Панзоне (Benedek A., Panzone R.).

1. The spaces L^p with mixed norm. Duke Math. J.

28 (1961), 301-324.

Бессага и Пелчиньский (Bessaqa C.,

Pelczynski A.)

1. Some remarks on conjugate spaces containing subspaces isomorphic to the space c_0 . Bull. Acad. Pol. Sci., sér. sci. math., astr. et phys., 6 (1958), 249-250.

Биркгоф (Birkhoff G.).

1. Теория структур. III, 1952.

Бишоп и Фелпс (Bishop E., Phelps R. R.).

1. The support functionals of a convex set. Proc. Sympos. Pure Math., Amer. Math. Soc., 7 (Convexity), (1963), 27-35.

Бурбаки (Bourbaki N.).

1. Топологические векторные пространства, III, 1959.

2. Интегрирование. Наука, 1967.

Бут (Booth D.).

1. Sequential compactness. Notices A.M.S., 15, № 2, (1968),

374.

Векслер А.И.

1. Понятие нормальной в себе линейной структуры и некоторые приложения этого понятия к теории линейных и линейных нормированных структур. Изв. вузов, Математика, 4 (53), (1966), 13-22.

Вулих Б.З.

1. Определение произведения в линейном полуупорядоченном пространстве. ДАН СССР 26 (1940), 847-851.

2. Свойства произведения и обратного элемента в линейных полуупорядоченных пространствах. ДАН СССР 26 (1940), 852-856.

3. Произведение в линейных полуупорядоченных пространствах и его применение к теории операций. I. Матем.Сб., 22, № 1 (1948), 27-78.

4. Произведение в линейных полуупорядоченных пространствах и его применение к теории операций. II. Матем.Сб., 22, № 2 (1948), 287-317.

5. Некоторые вопросы теории линейных полуупорядоченных множеств. ИАН СССР, сер.мат., 17 (1953), 365-388.

6. Введение в теорию полуупорядоченных пространств. Физматгиз, 1961.

7. О линейных структурах, эквивалентных структурам с монотонной нормой. ДАН СССР 147 (1962), 271-274.

Вулик Б.З. и Лозановский Г.Я.

1. О метрической полноте нормированных и счётно-нормированных структур. Л. Вестн.ун-та, 19, серия мат., 4 (1966), 12-15.

2. О представлении вполне линейных и регулярных функционалов в полуупорядоченных пространствах. Матем.Сб., 84 (126), № 3 (1971), 331-353.

Гилман и Джерисон (Gillman L., Jerison M.).

1. Rings of continuous functions. Princeton, 1960.

Грётски (Grötschy M.).

1. Representation theorems on Banach function spaces. Memoirs of Amer. Math. Soc., 84 (1968), 1-56.

Гротендик (Grothendieck A.).

1. Sur les applications linéaires faiblement compactes d'espaces du type $C(K)$. Canadian J. Math., 5 (1953), 129-173.

Данфорд и Шварц (Dunford N., Schwartz J.T.).

1. Линейные операторы, т. I, III, 1962.

Дэй (Day M.M.).

1. Нормированные линейные пространства, III, 1961.

Забрейко П.И.

1. Об одной интерполяционной теореме для линейных операторов. Матем. Заметки, 2, № 6 (1937), 593-598.

Кавая (Kawai I.).

1. Locally convex lattices. J. Math. Soc. Japan 9, № 3 (1957), 281-314.

Какутани (Kakutani S.).

1. Concrete representation of abstract (L) -spaces and the mean ergodic theorem. Ann. of Math., 42 (1941), 523-537.

2. Concrete representation of abstract (M) -spaces. Ann. of Math., 42 (1941), 994-1024.

Кальдерон (Calderon A.P.).

1. Промежуточные пространства и интерполяция, комплексный метод. Математика (об. переводов), 3:3 (1965), 56-129.

Кавторович Л.В.

1. О полуупорядоченных линейных пространствах и их приложениях в теории линейных операций. ДАН СССР, 4 (1935), II-14.

2. Sur les propriétés des espaces semi-ordonnés linéaires.

C.R. Acad. Sci., 202 (1936), 813-816.

3. К общей теории операций в полуупорядоченных пространствах. ДАН СССР, I (1936), 271-274.

4. Основы теории функций вещественного переменного со значениями, принадлежащими полуупорядоченному линейному пространству. ДАН СССР, 2 (1936), 359-364.

5. О некоторых классах линейных операций. ДАН СССР, 3 (1936), 9-14.

6. К проблеме моментов для конечного интервала. ДАН СССР, 14 (1937), 531-536.

7. Линейные полуупорядоченные пространства. Матем.Сб., 2 (44), (1937), 121-163.

8. Sur la continuité et sur le prolongement des opérations linéaires. C.R. Acad. Sci., 206 (1938), 833-835.

Канторович Л.В. и Акилов Г.П.

I. Функциональный анализ в нормированных пространствах. Физматгиз, 1959.

Канторович Л.В. и Вулик Б.З.

I. Sur la représentation des opérations linéaires. Compos. Math, 5 (1937), 119-165.

Канторович Л.В., Вулик Б.З. и Пинскер А.Г.

I. Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах. Гостехиздат, 1950.

Келли (Kelley J. L.).

I. Measures on Boolean algebras. Pacif. J. Math., 9 (1959), 1165-1178.

Красносельский М.А.

1. Положительные решения операторных уравнений. Физматгиз, 1961.

Красносельский М.А. и Рунцицкий Я.Б.

1. Выпуклые функции и пространства Орлича. Физматгиз, 1958.

Крейн М.Г. и Крейн С.Г.

1. Об одной внутренней характеристике пространства всех непрерывных функций, определённых на хаусдорфовом компактном множестве. ДАН СССР 27 (1940), 427-431.

2. О пространстве непрерывных функций, определённых на компакте, и его полуупорядоченных подпространствах. Матем. Об., 13 (1948), 1-33.

Крейн С.Г., Петунин Ю.И. и Семёнов Е.М.

1. Шкалы банаховых структур измеримых функций. Труды М.М.О., 17 (1967), 293-322.

Левитан Б.М.

1. Почти-периодические функции. Гостехиздат, 1953.

Лозановский Г.Я.

1. О топологически рефлексивных KB-пространствах. ДАН СССР, 158: 3 (1964), 517-519.

2. О рефлексивных пространствах, обобщающих рефлексивные пространства Орлича. ДАН СССР, 163: 3 (1965), 573-576.

3. О банаховых структурах и базисах. Функт. анализ и его прилож., 1: 3 (1967), 92.

4. О банаховых структурах Кальдерона. ДАН СССР, 172: 5 (1967), 1018-1020.
5. О пределе последовательности функционалов в полуупорядоченных пространствах. Л., Вестн. ун-та, I, серия матем., I (1967), 148-149.
6. О некоторых топологических свойствах банаховых структур и об условиях их рефлексивности. ДАН СССР, 183: 3 (1968), 521-523.
7. О проекторах в некоторых банаховых структурах. Матем. Заметки, 4, № I (1968), 41-44.
8. Об изоморфных банаховых структурах. Сиб. Мат. в., 10: I (1969), 93-98.
9. О реализации пространства регулярных функционалов и некоторых её приложениях. ДАН СССР, 188: 3 (1969), 522-524.
10. О некоторых банаховых структурах. Сиб. Мат. в., 10: 3 (1969), 584-599.
11. О банаховых структурах с единицей. Изв. вузов, Математика, I (92), (1970), 65-69.
12. О вполне линейных функционалах в полуупорядоченных пространствах. Матем. Заметки, 8, № 2 (1970), 187-195.
13. Об одном результате Шмогаля. Вторая зональная конференция пединститутов северо-западной зоны по математике и методике её преподавания. Тезисы, Л., 1970, стр. 43.
14. О банаховых пространствах, эквивалентных KB-линеалам. XXIV Герценовские чтения (межвузовская конференция). Краткое содержание докладов. Л., 1971, 52-54.

15. О нормированных структурах с полунепрерывной нормой. Сиб.Мат.з., 12: 1 (1971), 232-234.

16. О некоторых банаховых структурах, II. Сиб.Мат.з., 12: 3 (1971), 562-567.

17. О банаховых структурах и вогнутых функциях. ДАН СССР, 199: 3 (1971), 536-539.

18. О функциях от элементов линейной структуры. Изв. вузов, Математика (аннотация опубликована в 6 (109), 1971, стр.110).

Лозановский Г.Я. и Меклер А.А.

I. Больше линейные функционалы и рефлексивность в нормированных линейных структурах. Изв.вузов, Математика, II (1967), 47-53.

Лоренц (Lozentz G.G.).

I. On the theory of spaces Λ . Pacif. J. Math., I, (1950), 411-429.

Люксембург (Luxemburg W.A.J.).

I. Notes on Banach function spaces. Proc. Acad. Sci. Amsterdam; A68 (1965); Note XIVa, 229-239; Note XIV в, 240-248; Note XVa, 415-429; Note XV в, 430-446; Note XVIa, 646-657; Note XVIв, 658-667.

Люксембург и Заанен (Luxemburg W. A. J., Zaanen A.C.).

I. Notes on Banach function spaces. Proc. Acad. Sci. Amsterdam; Note I, A68 (1963), 135-147; Note II, A66 (1963), 148-153; Note III, A66 (1963), 239-250; Note IV, A66 (1963), 251-263; Note V, A66 (1963), 496-504; Note VI, A66 (1963), 655-663;

Note VII. A66 (1963), 669-681; Note VIII A67 (1964), 104-119;
Note IX. A67 (1964), 360-376; Note X. A67 (1964), 493-506;
Note XI. A67 (1964), 507-513; Note XII. A67 (1964), 519-529;
Note XIII. A67 (1964), 530-543.

Мори, Амемия, Накано (Mori T., Amemiya I.,
Nakano H.).

1. On the reflexivity of semicontinuous norms. Proc.
Japan Acad., 31 (1955), 684-685.

Накано (Nakano H.).

1. Modular semi-ordered linear spaces. Токуо, Maruzen
Co., LTD . 1950, 1-238.

2. Modern spectral theory. Токуо, Maruzen Co., LTD,
1950, 1-323.

3. Semi-ordered linear spaces. Токуо . 1955.

Намиока (Namioka I.).

1. Partially ordered linear topological spaces. Memoirs
of Amer. Math. Soc. . 24, (1957), Providence .

Огасавара (Ogasawara T.).

1. Theory of vector lattices. J. Sci. Hiroshima univ, ser. A,
12 (1942), 37-100 и 13 (1944), 41-161.

Пелчиньский (Pelczynski A.).

1. A connection between weakly unconditional convergence
and weakly completeness of Banach spaces. Bull. Acad.
Pol. Sci., série sci. math., astr. et phys. , 6, № 4 (1958), 251-253.

2. On the isomorphism of the spaces m and M . Bull. Acad.
Pol. Sci., série sci. math., astr. et phys. , 6 (1958), 695-696.

Перессини (Peressini A. L.).

Ordered topological vector spaces. New York, 1967.

Пинскер А.Г.

1. О расширении полуупорядоченных пространств. ДАН СССР, 21, (1938), 3-10.

2. Универсальные K -пространства. ДАН СССР, 49 (1945), 8-11.

3. Разложение K -пространств на элементарные пространства. ДАН СССР, 49, (1945), 169-172.

4. Вполне линейные функционалы в K -пространствах. ДАН СССР, 55, (1947), 303-306.

5. О конкретных представлениях линейных полуупорядоченных пространств. ДАН СССР, 55, (1947), 333-336.

6. О конкретных представлениях линейных полуупорядоченных пространств. Уч. Зап. ЛГУ им. А.И. Герцена, 64, (1948), 17-26.

7. Разложение полуупорядоченных групп и пространств. Уч. зап. ЛГУ им. А.И. Герцена, 86, (1949), 235-284.

8. Расширение полуупорядоченных групп и пространств. Уч. Зап. ЛГУ им. А.И. Герцена, 86, (1949), 235-315.

Пономарёв В.И.

1. О пространствах, соабсолютных с метрическими. УМН, 21, вып. 4 (130), (1966), 101-132.

Райс (Rice N. M.).

1. Multiplication in vector lattices. *Canad. J. Math.*, 20, № 5 (1968), 1136-1149.

Рао (Rao M.M.).

1. Linear functionals on Orlicz spaces: general theory. Pacific J. Math., 25, (1968), 553-585.

2. Linear operations, tensor products, and contractive projections in function spaces. Studia Math., 38, (1971), 131-136.

Семенов В.М.

1. Теоремы вложения для банаховых пространств измеримых функций. ДАН СССР, 156, № 6 (1964), 1292-1295.

2. Интерполяция линейных операторов в симметричных пространствах. Докторская диссертация, Воронежский гос. ун-т, 1968.

Сивер (Seever G.L.).

1. A peculiar Banach function space. Proc. Amer. Math. Soc., 16, (1965), 682-684.

2. Measures on F-spaces. Trans. Amer. Math. Soc., 133, № 1 (1968), 267-280.

Сикорский (Sikoriski R.).

1. Булевы алгебры. Мир, М., 1969.

Халмош (Halmos P.R.).

1. Теория меры, III, М., 1958.

Шефер (Schaefer H.).

1. Weak convergence of measures. Math. Ann., 193, № 1 (1971), 57-64.

Шимогаки (Shimogaki T.).

1. On the continuity and the monotonousness of norms. J. Fac. Sci. Hokkaido Univ., ser. I, 16, (1962), 225-237.

Широков М.Ф.

1. Функции от элементов полуупорядоченных пространств. ДАН СССР, 74, (1950), 1057-1060.

2. Применение функций от разложений к теории полуупорядоченных пространств. Л., Вестн. ун-та, 19, сер. мат., 4 (1960), 29-36.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

База K -линеала	30
Ближайший квазиэкстремальный	33
— экстремальный	33
Дизъюнктивность	27
— множеств	27
— элементов	27
— элементов и множеств	27
— функционалов (обобщенная)	76
Дополнение дизъюнктивное	27
Глицида	29
— сильная	30
— слабая	29
Идеал	28
— главный	28
Интервал порядковый	27
Компонента	28
— главная	29
Конус	27

К-линеал	27
- квази (2)-полный	64
- ограниченный элементов	30
- (2)-полный	31
- с единицей	30
- счётного типа	30
KB-линеал	37
- ограниченных элементов	38
KN-линеал	37
- квазиравномерно выгнутый	42
- ограниченных элементов	38
Мера нормальная	47
Множество тотальное	37
Норма дуальная	50
- естественная	37
- монотонная	37
- монотонно полная	39
- непрерывная	38
- полунепрерывная	38
- универсально монотонно полная	39
- - полунепрерывная	38
Носитель элемента	35
Оболочка элемента	29

Перестановка функции невозрастающая	53
Подлинеал нормальный	28
Подструктура линейная	28
Полное множество компонент	29
- - элементов	28
(b) - пополнение	36
K-пополнение	32
Проектор банахов	246
Проекция	29
Пространство банахово функциональное	254
- дуальное	49
- Доренца	53
- Марцинкевича	53
- Орлича	52
- присоединённое	43
- симметричное	53
- с мерой	46
- сопряжённое	43
- - в смысле Накано	43
- со смешанной нормой	52
- типа (L)	41
K-пространство	27
- дискретное	230
- расширенное	32
- рефлексивное	43
- - в смысле Накано	43
K_b -пространство	27
- расширенное	32

KB-пространство	40
- с аддитивной нормой	41
KN-пространство	37
- ограниченных элементов	38
$K_{\delta}N$ -пространство	37
- ограниченных элементов	38
Рангомизмеримость функций	53
Распространение нормы естественное	42
- функционала минимальное	70
Расширение максимальное	32
Реализация каноническая	78
- классическая первая	35
- - вторая	36
Регулятор сходимости	31
(b) - рефлексивность	36
След элемента	30
Структура нормированная	37
- банахова	37
Сходимость с регулятором	31
(b) - сходимость	36
(0) - сходимость	31
(?) - сходимость	31
Условие правильности	28
- (A)	38
- (A')	39

- (B)	39
- (B')	39
- (u)	177

Фундамент	28
-----------	----

Функционал аномальный	44
-----------------------	----

- антинормальный	44
------------------	----

- вполне линейный	43
-------------------	----

- задающий норму	41
------------------	----

- (b)-линейный	36
----------------	----

- локализованный	217
------------------	-----

- положительный	33
-----------------	----

- регулярный	43
--------------	----

- счётного типа	217
-----------------	-----

N - функция	87
-------------	----

Элемент дискретный	230
--------------------	-----

- единичный	29
-------------	----

- квазисильный	210
----------------	-----

- обратный	33
------------	----

- сильный	210
-----------	-----

- счётного типа	30
-----------------	----

УКАЗАТЕЛЬ СИМВОЛОВ ПО МЕРЕ ИХ ПОЯВЛЕНИЯ
В ТЕКСТЕ

	Гл.	§	п
N	0		
ϕ	0		
$\text{card } \Gamma$	0		
x_A	0		
$C(\Gamma)$	0		
R^n	0		
x_+	0	I	I
$x dy$	0	I	I
$E_1 dE_2$	0	I	I
$x dE$	0	I	I
E^d	0	I	I
x_u	0	I	I
$\alpha(x)$	0	I	I
$P_{2y} x$	0	I	I
$\partial u \partial x$	0	I	I
$\Pi(x)$	0	I	I
$\epsilon(x)$	0	I	I
e_x	0	I	I
$x_\alpha \uparrow, x_\alpha \downarrow, x_\alpha \perp, x_\alpha \nabla$	0	I	2
$x_\alpha \uparrow x, x_\alpha \downarrow x, x_\alpha \perp x, x_\alpha \nabla x$	0	I	2
$x_\alpha \xrightarrow{(0)} x$	0	I	2
$x_\alpha \xrightarrow{(2)} x$	0	I	2
\hat{X}	0	I	3
$\mathcal{M}(x)$	0	I	4

x^{-1}	0	1	5
$C_\infty(Q)$	0	2	1
$\Omega(Q)$	0	2	1
$\mathcal{L}(Q)$	0	2	1
$\dot{\mathcal{L}}(Q)$	0	2	1
Q_x	0	2	2
$Q(W)$	0	2	3
E^*	0	3	1
$H_B(E \rightarrow F)$	0	3	1
$\ \cdot\ _{X_u}, \ \cdot\ _{u}$	0	3	3
X_+^*	0	3	8
$\tilde{X}, \bar{X}, \tilde{X}_{an}, \tilde{X}_{ant}$	0	4	1
X_{an}^*, X_{ant}^*	0	4	2
$S(T, \Sigma, \mu), L^p(T, \Sigma, \mu), L^p(M)$	0	5	1
$X^r, \ \cdot\ _{X^r}$	0	5	3
$S[0,1], L^p[0,1]$	0	6	1
$s_T, \ell_T^p, c_T, (c_0)_T$	0	6	2
s, ℓ^p, c, c_0	0	6	3
$L^{(p,q)}$	0	6	5
x^*	0	6	7
$\Lambda(\Psi), M(\Psi), M_0(\Psi)$	0	6	7
$\mathcal{I}_\Pi^W(x_1, \dots, x_n)$	1	1	1
$CH(\mathbb{R}^n)$	1	1	2
$\mathcal{I}^X(x_1, \dots, x_n)$	1	1	2
$\mathcal{I}(u)$	1	2	2
$\mathcal{I}Dq$	1	2	3

α_2, α_2^0	II	I	I
$\hat{\varphi}$	II	I	I
$\varphi(x_0, x_1), \ \cdot\ _{\varphi(x_0, x_1)}$	II	I	2
$x_0^{1-s}, x_1^s, \ \cdot\ _{x_0^{1-s}, x_1^s}$	II	I	2
$x_p, \ \cdot\ _{x_p}$	II	3	
x_{min}^*	II	4	I
$zca(K), zca^+(K)$	II	3	
$(E^{**})_{\mathcal{K}}, (E^{**})_{\mathcal{K}^s}$	III	4	2
$\tilde{X}_{loc}, X_{loc}^*$	IV	2	I
$L^{(p,q)}$	IV	6	2

Grigorii Yakovlevich Lozanovskii

Unpublished Doctoral
Dissertation

Григорий Яковлевич Лозановский защитил
Докторскую диссертацию в 1973 году.

Эту защиту называли выдающейся и гениальной, однако эта Диссертация никогда не была утверждена Советским ВАК, только по одной причине, что ГЯ Лозановский был еврей.

В 1976 году ГЯ Лозановский умер, так и не дождавшись утверждения своей диссертации.

Прошло 35 лет. Возможно, некоторые результаты уже известны, некоторые устарели, но я уверена, что Диссертация ГЯ Лозановского остается интересной и полезной для многих математиков.

Рита Лозановская.