Доклады Академии Наук СССР
1954. Том XCVII, № 4

МАТЕМАТИКА

М. А. КРАСНОСЕЛЬСКИЙ и Я. Б. РУТИЦКИЙ

О ЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИОНАЛАХ В ПРОСТРАНСТВАХ ОРЛИЧА

(Представлено академиком П. А. Александровым 27 V 1954)

Вопросы, связанные с изучением линейных функционалов в пространствах Орлича, были подробно изучены ([1], [2]) в предположении, что соответствующие N'-функции удовлетворяют Δ_2-условию. Оказалось, что в общем случае появляются особенности, которые представляют, как нам кажется, интерес для общей теории банаховых пространств.

1. Функции $M(u)$ и $N(v)$ называют ([3]) N'-функциями, дополнительными друг к другу, если они представимы в виде

$$M(u) = \int_0^{|u|} p(t)\,dt, \quad N(v) = \int_0^{|v|} q(t)\,dt,$$

где $p(t)$ и $q(t)$ — положительные при $t > 0$, непрерывные справа неубывающие функции, удовлетворяющие условиям:

$$p(+0) = q(+0) = 0, \quad p(\infty) = q(\infty) = \infty,$$

и связанные соотношениями

$$q(s) = \sup_{p(t) \leqslant s} t, \quad p(t) = \sup_{q(s) \leqslant t} s.$$

Пусть G — компактное множество конечномерного евклидова пространства. Классом Орлича L_M называют совокупность измеримых на G функций $u(x)$, для которых

$$\rho(u;\ M) = \int_G M[u(x)]\,dx < \infty.$$

Линейная оболочка множества L_M образует полное банахово пространство L_M^* если в нем ввести норму равенством

$$\| u \|_M = \sup_{\rho(v; N) \leqslant 1} \left| \int_G u(x)\, v(x)\, dx \right|.$$

Говорят, что N'-функция $M(u)$ удовлетворяет Δ_2-условию, если

$$\varlimsup_{u \to \infty} \frac{M(2u)}{M(u)} < \infty.$$

2. Для случая, когда N'-функция $M(u)$ удовлетворяет Δ_2-условию, Орлич показал ([1]), что общий вид линейного непрерывного функционала на L_M^* дается формулой

$$l(u) = \int_G u(x)\, v(x)\, dx, \tag{1}$$

где $v(x) \in L_N^*$.

Теорема 1. *Пусть N'-функция $M(u)$ не удовлетворяет Δ_2-условию. Тогда существует непрерывный линейный функционал на L_M^*, не допускающий интегрального представления* (1).

3. Класс L_M совпадает с пространством L_M^* тогда и только тогда ([1]), когда N'-функция $M(u)$ удовлетворяет Δ_2-условию. В общем случае L_M образует выпуклую часть пространства L_M^*.

Обозначим через E_M максимальное линейное подпространство из L_M^*, лежащее в L_M.

Теорема 2. *Подпространство E_M — это замыкание в L_M^* множества ограниченных функций.*

Оказывается, что подпространство E_M позволяет охарактеризовать расположение класса L_M в пространстве Орлича L_M^*.

Теорема 3. *Каждая функция $u(x) \in L_M$ находится на расстоянии $\leqslant 1$ от E_M.*

Каждая функция $u(x) \in E_M$ содержится в L_M вместе с открытой шаровой окрестностью радиуса 1.

Из теоремы 3 вытекает, что

$$E_M = \bigcap_\alpha L_{M_\alpha}, \tag{2}$$

где L_{M_α} $(0 < \alpha < \infty)$ — классы Орлича, определенные N'-функциями $M_\alpha(u) = M(\alpha u)$.

Из (2), в свою очередь, следует, что $L_\Phi^* \subset E_M$, если N'-функция $\Phi(u)$ представима в виде $\Phi(u) = M[Q(u)]$, где $Q(u)$ — функция, удовлетворяющая условию

$$\lim_{u \to \infty} \frac{Q(u)}{u} = \infty.$$

Подпространство E_M играет существенную роль в приложениях теории пространств Орлича к исследованию некоторых операторных уравнений. Оказывается, что при естественных предположениях для линейных и нелинейных интегральных операторов подпространство E_M инвариантно. Это позволяет изучать операторные уравнения в сепарабельном пространстве E_M вместо изучения его в пространстве L_M^* „плохой“ структуры, так как ([4]) в нем нигде не плотно множество ограниченных функций (в случае, когда N'-функция $M(u)$ не удовлетворяет Δ_2-условию).

При рассмотрении теоремы 3 возникает естественный вопрос о том, принадлежат ли классу L_M те функции пространства L_M^*, расстояние от которых до E_M равно единице. Оказывается, что здесь могут встретиться оба возможных случая. Пусть, например, пространство L_M^* определено N'-функцией $M(u)$, при больших значениях u равной e^u. Определим последовательность непересекающихся множеств $G_n \subset G$, так, чтобы $\operatorname{mes} G_n = \dfrac{\operatorname{mes} G}{e^{(1+n)n}}$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Пусть

$$u_1(x) = \begin{cases} n^2, & \text{если } x \in G_n \quad (n = 1, 2, \ldots), \\ 0, & \text{если } x \in G \setminus \bigcup_1^\infty G_n; \end{cases}$$

$$u_2(x) = \begin{cases} n^2 + n, & \text{если } x \in G_n \quad (n = 1, 2, \ldots), \\ 0, & \text{если } x \in G \setminus \bigcup_1^\infty G_n. \end{cases}$$

$$u_1(x) = \begin{cases} n^2, & \text{если } x \in G_n \quad (n = 1, 2, \ldots), \\ 0, & \text{если } x \in G \setminus \bigcup_1^\infty G_n; \end{cases}$$

$$u_2(x) = \begin{cases} n^2 + n, & \text{если } x \in G_n \quad (n = 1, 2, \ldots), \\ 0, & \text{если } x \in G \setminus \bigcup_1^\infty G_n. \end{cases}$$

Можно показать, что обе функции $u_1(x)$ и $u_2(x)$ находятся на расстоянии, равном единице, от E_M. Однако функция $u_1(x)$ принадлежит классу L_M, в то время как функция $u_2(x)$ не принадлежит классу L_m.

4. Теорема 4. *Общий вид линейного непрерывного функционала на пространстве E_M дается формулой* (1), *в которой* $v(x) \in L_N^*$.

Эта теорема является непосредственным обобщением упомянутой выше теоремы Орлича, в условиях которой $E_M = L_M = L_M^*$.

Интересно заметить, что норма линейного функционала (1), рассматриваемого на всем пространстве L_M^*, совпадает с нормой этого же функционала, если он рассматривается только на подпространстве E_M.

Так как для N'-функции $M(u) = e^{|u|} - |u| - 1$ дополнительная N'-функция $N(v)$ равна $(1+|v|)\ln(1+|v|) - |v|$, то в этом случае общий вид линейного функционала на E_M дается формулой (1), в которой $v(x)$ удовлетворяет условию

$$\int_G |v(x)| \ln(|v(x)| + 1)\, dx < \infty.$$

В случае когда $M(u) = e^{u^2} - 1$, явное выражение для $N(v)$ неизвестно. Однако можно показать, что L_N^* состоит из таких функций $v(x)$, для которых

$$\int_G |v(x)| \sqrt{\ln(|v(x)|+1)}\, dx < \infty. \tag{3}$$

Поэтому в этом случае общий вид функционала на E_M также дается формулой (1), в которой $v(x)$ удовлетворяет условию (3).

Обе рассмотренных N'-функции $M(u)$ не удовлетворяют Δ_2-условию. Поэтому в каждом из приведенных примеров E_M не совпадает с L_M^*.

5. Будем говорить, что последовательность функций $u_n(x) \in L_M^*$ $(n = 1, 2, \ldots)$ (o)-слабо сходится, если последовательность чисел

$$\int_G u_n(x) v(x)\, dx \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

сходится при любой функции $v(x) \in E_N$. Это определение в силу теоремы 1 отличается, вообще говоря, от обычного. Отличается оно и от определения, данного нами в ([4]), которое в некоторых случаях оказалось неудобным.

Новое понятие сходимости оправдывается следующим утверждением.

Теорема 5. *Каждое пространство Орлича (o)-слабо компактно и (o)-слабо полно.*

Отметим кроме этого, что нормы элементов каждой (o)-слабо сходящейся последовательности ограничены в совокупности.

6. Используя теорему 5, можно обобщить одну теорему Цанена ([2]), которая была им установлена в предположении, что все N'-функции, фигурирующие в рассуждениях, удовлетворяют Δ_2-условию.

Теорема 6. *Пусть функция $K(x, y)$ $(x, y \in G)$ почти при всех $x \in G$ как функция от y принадлежит E_{N_1}, причем функция $w(x) = \| K(x, y) \|_{N_1}$ принадлежит E_{M_2}.*

Тогда линейный интегральный оператор

$$Au(x) = \int_G K(x, y) u(y)\, dy$$

действует из пространства Орлича $L^*_{M_1}$ *в пространство Орлича* $L^*_{M_2}$ *и вполне непрерывен.*

В этой теореме $N_1(v)$ — N'-функция, дополнительная к N'-функции $M_1(u)$.

Поступило
1 III 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] W. Orlicz, Bull. international de l'Acad. Pol., ser. A, Cracovie (1932). [2] A. C. Zaanen, Ann. of Math., 47, No. 4 (1946). [3] Z. W. Birnbaum, W. Orlicz, Stud. Math., 3, 1 (1931). [4] М. А. Красносельский, Я. Б. Рутицкий, ДАН, 81, № 4 (1951).