Л. Л. ЭСАКИА

# СЕМАНТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ БИМОДАЛЬНЫХ (ВРЕМЕННЫХ) ЛОГИЧЕСКИХ СИСТЕМ

§ 1. Введение. Рядом авторов (Г. Мойсил, А. Кузнецов, А. Мучник, С. Раушер [1]) были предложены „симметричные" формулировки интуиционистского пропозиционального исчисления, в которых у каждой связки &, $V$, $\rightarrow$, $\neg$ имеется дуальная $V$, &, $\leftarrow$, $\Gamma$ и в которых восстановлен принцип дуальности классической логики.

С другой стороны, еще в 1946 году в своей фундаментальной работе [2] Маккинси и Тарский указали, что класс структур Брауэра Brouw резко отличается как от объемлющего его класса ограниченных дистрибутивных структур $\mathrm{Dist}_o^1$, так и от своего подкласса булевых структур Bool, тем, что в Brouw нарушен принцип дуальности (см. [2], стр. 3) даже в своей слабой форме. В этой же статье ими введено понятие дважды-брауэровой алгебры, понятие, рассматривавшееся Т. Сколемом еще в 1919 году.

Учитывая это обстоятельство, мы назвали дважды-брауэровы алгебры—алгебрами Сколема [3].

Известная процедура погружения интуиционистского пропозиционального исчисления In в классическую модальную систему Льюиса $S4$ может быть распространена на симметричное исчисление $\mathrm{In}^2$. Именно, исчисление $\mathrm{In}^2$ погружается в бимодальную (временную) систему $\mathrm{K}^2\mathrm{C4T}$ [3].

Бимодальная система $\mathrm{K}^2\mathrm{C4T}$, введенная К. Сегербергом [4], которую мы предпочитаем обозначать через $\mathrm{S4}^2$, может быть сформулирована следующим образом: формулы системы $S4^2$ строятся обычным образом из пропозициональных переменных и связок &, $V$, $\supset$, —, $H$ (всегда было), $G$ (всегда будет); временные связки $F$ (будет), $P$ (было) вводятся обычным образом: $F\alpha \rightleftarrows -G-\alpha$ и $P\alpha = -H-\alpha$.

Аксиомные схемы:

(K1) $G(p\supset q)\supset(Gp\supset Gq)$ (K2) $H(q\supset q)\supset(Hp\supset Hq)$

(T1) $Gp\supset p$ (T2) $Hp\supset p$

(H1) $Gp\supset GGp$ (H2) $Hp\supset HHp$

(C1) $PGp\supset p$ (C2) $FHp\supset p$

Правила вывода системы $S4^2$:

$$(1)\ \frac{\vdash\alpha,\ \vdash\alpha\supset\beta}{\vdash\beta},\qquad (2)\ \frac{\vdash\alpha}{\vdash G\alpha},\qquad (3)\ \frac{\vdash\alpha}{\vdash H\alpha}.$$

Легко убедиться, что если из этой аксиоматики вычеркнуть все схемы, содержащие знак $H$ (и, тем самым, $P$) и отбросить правило (3), то получится стандартное определение модальной системы Льюиса S4. К тому результату приводит устранение схем, содержащих знак $G$ (и $F$) и удаление правила (2). Таким образом, $S4^2$ строится из двух „экземпляров" системы S4 „сплетенных" схемами (C1—C2).

Пусть $In^2$ — симметричное интуиционистское исчисление (или, в терминологии Раушер [1], H—B-исчисление), подробное определение которого дано в работе [1], на стр. 240—241. Для любой формулы $\alpha$ исчисления $In^2$ определим ее перевод (в стиле Таского) $tr(\alpha)$ в бимодальную систему $S4^2$, следующим образом: (1) если $\alpha$—пропозициональная переменная, то $tr(\alpha)=G\alpha$; (2) $tr(\alpha\vee\beta)=tr(\alpha)\vee tr(\beta)$; (3) $tr(\alpha\&\beta)=tr(\alpha)\&tr(\beta)$; (4) $t(\alpha\rightarrow\beta) = G(tr(\alpha)\supset tr(\beta))$; (5) $tr(\alpha\leftarrow\beta)=P(tr(\alpha)\&-tr(\beta)$; (6) $tr(\neg\alpha) = G(-tr(\alpha))$; (7) $tr(\Gamma\alpha)=P(-tr(\alpha))$.

Как мы видим, интуиционистское отрицание $\neg\alpha$ формулы $\alpha$ понимается как „прогностическое", т. е. формула $\neg\alpha$ истинна в момент времени $t$, если (и только если) формула $\alpha$ ложна в любой точке $t'(t \leqslant t')$ будущего; „процедентное" отрицание $\Gamma\alpha$ формулы $\alpha$ истинно в момент $t$, если (и только если) в прошлом $t'(t' \leqslant t)$ имелся прецедент ее ложности.

Теорема о погружении [3]. Для любой формулы $\alpha$ исчисления $In^2$ справедливо утверждение: $In^2 \vdash \alpha$, если и только если $S4^2 \vdash tr(\alpha)$.

Таким образом, симметричное исчисление $\mathrm{In}^2$ связано с бимодальной системой $\mathrm{S4}^2$ аналогично тому, как интуиционистское исчисление In связано с модальной системой S 4.

Хотя после расширения „запаса" связок интуиционистского исчисления у нас имеются как & (конъюнкция), $\rightarrow$ (импликация), $\urcorner$ (отрицание), так и их дуалы, т. е. $\bigvee$ (дизъюнкция), $\leftarrow$ (компликация) и $\Gamma$ (костридание), моргановского соотношения между ними не имеется. Таким образом, если мы не хотим останавливаться на полпути, введем дополнительную одноместную связку $\sim$ (инволюция) и дополнительные аксиомные схемы, в которых постулируются моргановские соотношения для пар связок (&, $V$), $(\rightarrow, \leftarrow)$, $(\urcorner, \Gamma)$, исчисление, полученное этим способом, будем называть строго-симметричным интуиционистским исчислением и обозначать символом $\mathrm{In}^2$.

Для получения „внутренней связи" между временными операторами $F$ и $P$ ($G$ и $H$) расширим и бимодальную систему $\mathrm{S4}^2$, введя дополнительный одноместный оператор $\gamma$ и постулируя $\gamma P \gamma \equiv Fp$ и $\gamma H \gamma p \equiv Gp$. Мы не будем уточнять определение этих двух новых исчислений $\mathrm{In}^2_{\sim}$ и $\Gamma \cdot \mathrm{S4}$, предпочитая дальнейшее рассмотрение вести в алгебраических терминах.

§ 2. Алгебры с сопряженными замыканиями и структуры Сколема. Обозначим через $\mathrm{Dist}_0^1$ —класс всех ограниченных дистрибутивных структур и, одновременно, категорию ограниченных дистрибутивных структур $L = (L, \bigwedge, \bigvee, 0, 1)$ и структурных гомоморфизмов, сохраняющих выделенные элементы $0, 1 \in L$.

Определение 1. Структура $\mathrm{T} \in \mathrm{Dist}_0^1$ называется структурой Брауэра ([5[ или, более подробно [6], где предпочитается термин „псевдо-булева" алгебра), если для любых элементов $a, b \in T$ существует элемент $a \rightarrow b \in T$, такой, что $a \bigwedge x \leqslant \leqslant b <=> x \leqslant a \rightarrow b$.

С точки зрения универсальных алгебр, брауэрова структура может рассматриваться как алгебра $(T, \vee, \wedge, \rightarrow, 0, 1)$ с тремя бинарными операциями $\vee, \wedge, \rightarrow$ и двумя выделенными элементами $0, 1 \in T$. Брауэрово дополнение (псевдодополнение [6]) вводится в этом случае, как обычно, следующим образом: $\neg a = a \rightarrow 0$. Обозначим через Brouw класс (и категорию) брауэровых алгебр. Булевы алгебры [5] будут рассматриваться как алгебры $(B, \vee, \wedge, -, 0, 1)$, где $-a$ обозначает (булево) дополнение элемента $a \in B$. Ясно, что, если $(B, \vee, \wedge, -, 0, 1)$ — булева алгебра, то $(B, \vee, \wedge, \rightarrow, 0, 1)$ брауэрова алгебра, где $a \rightarrow b = -a \vee b$, тем самым категория булевых алгебр Bool является полной подкатегорией Brouw. Булеву алгебру $(B, \vee, \wedge, -, 0, 1)$ будем иногда обозначать, короче, через $B$, когда не опасна путаница.

Определение 2. Алгебра $(B, \vee, \wedge, -, C\ 0, 1)$, или, короче $(B, C)$, называется алгеброй с замыканием [5], если (а) $(B, \vee, \wedge, -, 0, 1) \in$ *Bool* и (в) $a \leqslant Ca$, $CCa = Ca$, $C(a \vee b) = Ca \vee Cb$, $Co = 0$ для любых элементов $a, b \in B$. Интериор $I$, т. е. оператор, дуальный оператору замыкания $C$, вводится, как обычно: $Ia = -C-a$; ясно, что $Ca = -I-a$.

Обозначим через *Cal*—класс (и категорию) алгебр с замыканием. Напомним, что элемент $a \in (B, C)$ называется открытым (соот., замкнутым), если $Ia = a$ $(Ca = a)$.

Пусть $T$—множество всех открытых элементов алгебры $(B, C) \in Cal$; иначе говоря, $T = \{Ia: a \in B\}$. Множество $T$ содержит элементы 0, 1 и замкнуто по структурным операциям $\vee$, $\wedge$, т. е. $(T, \vee, \wedge, 0, 1)$ является подструктурой булевой структуры $(B, \vee, \wedge, -, 0, 1)$, содержащей 0 и 1. Если для любых $a, b \in T$ положить $a \rightarrow b = -C(a \wedge -b)$, то алгебра $(T, \vee, \wedge, \rightarrow, 0, 1)$ ([2], [7]) будет брауэровой алгеброй; более того, как известно, каждая брауэрова алгебра (конечно, с точностью до изоморфизма) может быть получена таким способом. Итак, с каждой алгеброй $(B, C) \in Cal$ ассоциируется брауэрова алгебра $T \in Brouw$ ее открытых элементов, которую мы будем называть **трафаретом** алгебры $(B, C)$. Известно, что отображение, сопоставляющее каждой алгебре с замыканием ее трафарет, можно расширить до функтора из категории $Cal$ в категорию $Brouw$ [7].

Алгебраическое исследование бимодальных систем приводит к понятию булевой алгебры с дополнительными операторами, восходящему к работе Ионсона и Тарского [8]. В частности, алгебраическими моделями бимодальной системы $S4^2$ являются алгебры с сопряженными замыканиями.

Определение 3. Алгебра $(B, \vee, \wedge, -, 0, 1, C_1, C_2)$ (короче, $(B, C_1, C_2)$) называется алгеброй с сопряженными замыканиями, если (1) $(B, \vee, \vee, -, 0, 1, C_1, C_2)$ при $k=1$, 2 и (2) для любого $a \in B$ имеют место условия сопряжения: $C_1 I_2 a \leqslant a$ и $C_2 I_1 a \leqslant a$, где, как обычно, $I_k a = -C_k - a$ $(k=1, 2)$. Классс алгебр с сопряженными замыканиями будем обозначать через $Cal^2$.

Определение 4. Сграниченная дистрибутивная структура $(T, \vee, \wedge, 0, 1) \in Dist_0'$ называется структурой Сколема [1], [3], если для любых $a, b \in T$ существует (1) относительное псевдодополнение $a$ по отношению к $b$, $a \to b$, определяемое как наименьшее $d \in T$, такое что $a \wedge d \leqslant b$ и, дуально, (2) псевдоразность $a$ и $b$, $a \dot{-} b$, определяемая как наименьшее $d \in T$, такое что $a \leqslant b \vee d$.

С точки зрения универсальных алгебр, структуры Сколема можно рассматривать как алгебры $(T, \vee, \wedge, \to, \dot{-}, 0, 1$. Соответственно, гомоморфизмы алгебр Сколема суть отображения, сохраняющие сигнатурные операции $\vee, \wedge, \to, \dot{-}, 0, 1$.
Класс (и категорию) алгебр Сколема будем обозначать через Skol. Напомним, что брауэрово дополнение и кодополнение вводятся следующими определениями: $\urcorner a = a \to 0$ и $\urcorner a = 1 \dot{-} a$.

Пусть $(T, \wedge, \vee, 0, 1)$—произвольная ограниченная структура класса $\mathrm{Dist}_0^1$ и пусть $\leqslant$—отношение структурного порядка на $T$, т. е. пусть $a \leqslant b <=> a \wedge b = a$; „перевернём“ структуру $(T, \leqslant)$, т. е. переупорядочим множество следующим образом: $a \leqslant^* b \longleftrightarrow b \leqslant a$. Легко проверить, что множество $T$, снабженное новым отношением $\leqslant^*$ (т. е. множество $(T_1 \leqslant^*)$) вновь будет ограниченной дистрибутивной структурой; таким образом, класс Distó устойчив по отношению к операции переворота. Класс $Bool$—булевых структур обладает свойством строгой—устойчивости; если $(B, \leqslant) \in Bool$, то перевернутая булева структура $(B, \leqslant^*)$ не только остается в классе $Bool$, но и изоморфна исходной, т. е. $(B, \leqslant^*) \simeq (B, \leqslant)$.

С другой стороны, класс $Brouw$ структур брауэра не обладает свойством устойчивости. Действительно, пусть $X$ произвольное топологическое пространство, $\Omega$—семейство всех его открытых множеств. Хорошо известно, что семейство $\Omega$ по включению $\subseteq$ образует структуру Брауэра, т. е. $(\Omega, \subseteq) \in Brouw$. Однако структура $(\Omega, \leqslant^*)$, полученная в результате переворота, изоморфна структуре всех замкнутых множество пространства $X$ и, в общем случае, не является брауэровой структурой, т. е. $(\Omega, \leqslant^*) \overline{\in} Brouw$.

В терминах устойчивости класс структур Сколема $Skol$ можно определить следующим образом: структура $(T, \leqslant) \in Brouw$ является структурой Сколема (т. е. $(T, \leqslant) \in Skol$), если $(T, \leqslant^*) \in Brouw$. Таким образом, $Skol$ есть наибольший устойчивый подкласс класса $Brouw$. Заметим, что поскольку любая конечная дистрибутивная структура является—брауэровой и переворот конечной структуры дает конечную структуру, классу $Skol$ принадлежат все конечные дистрибутивные структуры.

Не менее естественным представляется рассмотрение и класса $Skol_{\sim}$ инволютивных структур Сколема (строгое определение см. ниже), т. е. таких структур $(T, \leqslant) \in Skol$, переворот которых дает структуру $(T, \leqslant^*)$ изоморфную исходной. Итак, мы имеем 5 различных классов: $Bool \subset Skol_{\sim} \subset Skol \subset Brouw \subset \subset Dist'_0$, причем I и II (слева) классы—строгоустойчивы, III и V—устойчивы, а IV—даже не устойчив.

Пусть $(B, C_1, C_2) \in Gal^2$, $T_k$—трафарет алгебры $(B, C_k)$ $(k=1, 2)$. Спираясь на условия сопряжения, можно показать, что $T_1 = \{I_1 a : a \in B\} = \{C_2 a : a \in B\}$ и $T_2 = \{I_2 a : a \cdot B\} = \{C_1 a : a \in B\}$.

Имеет место

Теорема о трафаретах. Трафареты $T_k$ $(k=1, 2)$ алгебры $(B, C_1, C_2) \in Cal^2$ образуют алгебру Сколема.

Для определенности, мы ограничимся рассмотрением первого трафарета $T_1$ и будем иногда опускать индекс „1“. Мы уже знаем, что $T$ является подструктурой булевой структуры $B$, снабженной операцией относительного псевдодополнения $\rightarrow$: $a \rightarrow b = -C_1(a \wedge -b)$. Определим $a \dot{-} b = C_2(a \wedge - b)$. Простая проверка показывает, что операция $\dot{-}$ является операцией псевдоразности и что $(T, \vee, \wedge, 0, 1, \rightarrow, \dot{-})$ есть алгебра Сколема.

Таким образом, с каждой алгеброй с сопряженными замыканиями $(B, C_1, C_2) \in Cal^2$ можно ассоциировать алгебру Сколема $(T, \vee, \wedge, \dot{-}, 0, 1)$ (совпадающую с ее трафаретом); так же как для браэровых алгебр, можно показать, что каждая алгебра Сколема может быть получена (с точностью до изоморфизма) из трафарета подходящей алгебры с сопряженными замыканиями. Опираясь на этот факт, несложно доказать упомянутую во введении теорему о погружении симметричного интуиционистского исчисления $I_n^2$ в бимодальную систему $S4^2$.

Пусть $(B, C_1, C_2) \in Cal^2$; обозначим через $\mathbf{F}(B)$—семейство всех фильтров булевой алгебры $B \in Bool$.

Определение 5. Фильтр $F \in \mathbf{F}(B)$ назовем биоткрытым, если из $a \in F$ следует $I_1 a \wedge I_2 a \in F$.

Теорема о биоткрытых фильтрах. Структура биоткрытых фильтров алгебры $(B, C_1, C_2)$ изоморфна структуре конгруенций $\Theta(B, C_1, C_2)$ алгебры $(B. C_1, C_2) \in Cal^2$.]

Пусть $(B, C_1, C_1) \in Cal^2$, $T$—ее (первый) трафарет. Фильтр $F$ структуры $T$ называется сколемовым, если $a \in F =>$ $=> \urcorner \dot{\urcorner} a \in F$ (см. [1]).

Теорема о сколемовых фильтрах. Если $(B, C_1, C_2) \in$ $\in Cal^2$, $T$—сколемова алгебра ее трафарета, то структура сколемовых фильтров алгебры $T$ изоморфна структуре биоткрытых фильтров алгебры.

Пусть $(X, R)$—квазиупорядоченное множество [5]. Будем говорить, что подмножество $A \subseteq X$ есть верхний (соот., нижний) конус, если из $x \in A$ и $xRy$ (соот., $yRx$) следует $y \in A$. Верхние конусы формы $R(x) = \{y: xRy\}$, $x \in X$, будем называть острыми; ясно, что верхние (нижние) конусы суть множества вида $R(A)(R^{-1}(A))$, где $A \subseteq X$, причем $R(A) = \bigcup_{x \in A} R(x)$ и $R^{-1}(A) = \bigcup_{x \in A} R^{-1}(x)$. Множество $A \subseteq X$, являющееся одновременно и верхним конусом, будем называть биконусом. Сгустками квазиупорядоченного множества $(X, R)$ называются множества формы $R(x) \cap R^{-1}(x)$, $(x \in X)$. Заметим, что классы $x/E$ естественного разбиения множества $X$, индицируемого отношением эквивалентности $xEy \rightleftarrows xRy \& yRx$ и являются сгустками, т. е. $x/E = R(x) \cap R^{-1}(x)$, $(x \in X)$. Соответствующее частично-упорядоченное фактор-множество $(X/E, R_E)$, где $x/E \, R_E \, y/E \rightleftarrows$ $\rightleftarrows (Ex' \in x/E)(\exists y' \in y/E)(x'Ry')$, будет называться скелетом квазиупорядоченного множества $(X, R)$.

С каждым квазиупорядоченным множеством $(X, R)$ можно связать специальную алгебру с сопряженными замыканиями $(P(X), \cap, \cup, -, \varnothing, X, C_1, C_2)$ и алгебру Сколема $(ConX, \cup, \cap, \rightarrow, \dot{-}, \varnothing, X)$, где $P(X)$ (соот., $ConX$)—семейство всех подмножеств (соот. всех верхних конусов) множества $X$, $-$, $\cap$, $\cup$—теоретико-множественные операции дополнения, пересечения и объединения, $C_1$, $C_2$—операторы замыкания, определяемые следующим образом: $C_1A = R^{-1}A$, $C_2A = RA$, $A \subseteq X$. Определение операций $\rightarrow$, $\dot{-}$—таково: $x \in (A \rightarrow B) <=> A \cap R(x) \subseteq B$, $x \in (A \dot{-} B) <=> \overline{A \cap R^{-1}(x) \subseteq B}$, для $A, B \in ConX$. Ясно, что брауэрово (и кобрауэрово) дополнения $\urcorner A = A \rightarrow \varnothing$ и $\dot{\urcorner} A = X \dot{-} A$, можно определить условиями: $x \in \urcorner A <=> A \cap R(x) = \varnothing$ и $x \in \dot{\urcorner} A <=> \overline{R^{-1}(x) \subseteq A}$. Заметим также, что сколемова алгебра $T \simeq ConX$ является трафаретом алгебры $(P(x), C_1, C_2)$.

Пусть $(X, \leqslant)$, $(X', \leqslant')$—квазиупорядоченные множества, отображение $f: X \rightarrow X'$ назовем интервальным (в [3] мы использовали иной термин), если $x \leqslant' f(z) \leqslant' y <=> (\exists x', y')$ $(x' \leqslant z \leqslant y'$ и $f(z') = x$ и $f(y') = y)$. Напомним, что модель Крипке $(X, R)$, т. е. непустое множество $X$ („миров") с отношением квазипорядка („отношение достижимости") $R$, называется совершенной [7], если $X$—0—мерный компакт (пространство Стоуна), множества $R(x)$ $(x \in X)$ замкнуты в пространстве $X$ и $RclA = clRA$ для любого $A \subseteq X$, где $cl$—операция топологического замыкания. (О совершенных моделях и их применениях см. [7], [9], [10]).

Определение 6. Совершенную модель $(X, R)$ назовем симметричной, если $(X, \breve{R})$ также является совершенной моделью, где $x\breve{R}y <=> yRx$. Имеет место

Теорема о симметричных моделях. Пусть $(X, R)$—совершенная модель; тогда $(X, R)$—симметрична, если и только если $R^{-1}clA = clR^{-1}A$ для любого множества $A \subseteq X$.

Обозначим через $Sym$ категорию симметричных совершенных моделей $(X, R)$ и непрерывных, интервальных отображений, а через $Sym_0$—ее полную подкатегорию, состоящую из объектов $(X, R)$, у которых отношение $R$ есть отношение частичного порядка.

Теорема о категориях $Cal^2$, $Skol$. Категория $Cal^2$ (соот., $Skol$) дуально эквивалентна категории $Sym$ (соот., $Sym_0$).

Характеристику структур конгруенций алгебр Сколема дает

Теорема о биконусах. Пусть $T$—алгебра Сколема, $(X, R)$—соответствующая ей симметричная совершенная модель. Тогда структура конгруенций $\theta(T)$ алгебры $T$—антиизоморфна структуре (по $\subseteq$) всех замкнутых биконусов модели $(X, R)$.

§ 3. Инволютивные алгебры Сколема и Г—алгебры. Алгебраическое рассмотрение бимодальной системы Г.$S4$ приводит к следующему классу алгебр.

Определение 7. Алгебру $(B, C, \gamma)$ назовем Г—алгеброй, если (1) $B \in Bool$, (2) $(B, C) \in Cal$ и (3) отображение $\gamma: B \to B$ является булевым автоморфизмом периода два $(\gamma\gamma a = a$, $a \in B)$, удовлетворяющим условию: $C\gamma I\gamma a \leqslant a$.

Класс (и соответствующую категорию) Г—алгебр обозначим Г.

Имеет место следующая

Теорема о Г—сопряжении. Пусть $(B, C, \gamma) \in \Gamma$; если на множестве $B$ определить оператор $C_2 a = \gamma C \gamma a$ (Г—сопряженный к оператору $C$), то алгебра $(B, C_1, C_1)$, где $C_1 a = Ca$, будет алгеброй с сопряженными замыканиями.

Пусть задана Г—алгебра $(B, C, \gamma) \in \Gamma$ и фильтр $F \in \mathbf{F}(B)$ булевой алгебры $B$. Фильтр $F$ называется открытым, если из $a \in F$ следует $Ia \in F$. Открытый фильтр $F$ назовем Г—фильтром, если для любого $a$, $a \in F => \gamma a \in F$.

Теорема о Г—фильтрах. Структура конгруенций $\theta(B, C, \gamma)$ Г—алгебры $(B, C, \gamma)$ изоморфна структуре всех ее Г—фильтров.

Пусть задана Г—алгебра $(B, C, \gamma)$ и пусть $T$—ее трафарет. Поскольку $(B, C) \in Cal$, трафарет образует алгебру Брауэра $(T, \vee, \wedge, \rightarrow, 0, 1)$. Определим на множестве операцию инволюции $\sim$: $\sim a = -\gamma a$ $(a \in T)$. Можно показать, что операция инволюции удовлетворяет условиям: (1) $\sim\sim a = a$, (2) $\sim 0 = 1$, $\sim 1 = 0$ (3) $\sim(a \vee b) = \sim a \wedge \sim b$, $\sim(a \wedge b) = \sim a \vee \sim b$, (4) для любых $a$, $b \in T$, элемент $b \dot{-} a = \sim(\sim a \rightarrow \sim b)$ является псевдоразностью элементов $b$ и $a$, (5) для любого элемента $a \in T$, элемент $\dot{\urcorner} a = 1 \dot{-} a = \sim \urcorner \sim a$ есть кобрауэрово дополнение элемента $a$. Из свойства (4) следует, что $(T, \vee, \wedge, \rightarrow, \dot{-}, 0, 1)$ является алгеброй Сколема. Примем следующее

Определение 8. Алгебру $(T, \vee, \wedge, \rightarrow, \dot{-}, 0, 1, \sim)$ назовем инволютивной алгеброй Сколема, если (1) $(T, \vee, \wedge, \rightarrow, \dot{-}, 0, 1) \in Skol$, (2) $\sim\sim a = a$ и (3) операция $\sim$ устанавливает моргановские соотношения между любой из операций $\vee, \wedge, \rightarrow, \dot{-}, 0, 1$ и ее дуалом, т. е. (A) $\sim(a \vee b) = \sim a \wedge \sim b$, $\sim(a \wedge b) = \sim a \vee \sim b$, (B) $\sim(a \rightarrow b) = \sim b \dot{-} \sim a$, $\sim(a \dot{-} b) = \sim b \rightarrow \sim a$ (C) $\sim 0 = 1$, $\sim 1 = 0$.

Класс инволютивных алгебр Сколема обозначим через $Skol$. Очевидно, что инволютивные алгебры Сколема можно определить более „экономно“: например, инволютивные алгебры Сколема можно рассматривать как алгебры вида $(T, \wedge, \vee, \rightarrow, 0, 1, \sim)$ (или, даже, вида $(T, \wedge, \rightarrow, 0, \sim)$), вводя недостающие операции (моргановскими) определениями.

Теорема о трафаретах Г—алгебр. Пусть $(B, C, \gamma)$—произвольная Г—алгебра, $T$—ее трафарет; тогда $T$ является инволютивной алгеброй Сколема. Более того, каждая инволютивная алгебра Сколема изоморфна трафарету подходящей Г—алгебры.

На основе этой теоремы можно доказать следующую теорему о погружении строго—симметричного интуиционистского исчисления $In^2_{\sim}$ в бимодальную систему Г.$S4$, уточнив предварительно формулировку системы Г.$S4$. Например, систему Г$\cdot S4$ можно получить из бимодальной системы $S4^2$, добавив правило $\frac{\vdash\alpha}{\vdash\gamma\alpha}$ и (1) аксиомные схемы, выражающие тот факт, что $\gamma$—булев автоморфизм, (2) схемы $\gamma P\gamma p = Fp$, $\gamma H\gamma p \equiv Gp$, $\gamma\gamma p \equiv p$, где $\alpha \equiv \beta$ есть сокращение для формулы $(\alpha \supset \beta) \& (\beta \supset \alpha)$.

Заметим, что правило $\frac{\vdash\alpha}{\vdash\gamma\alpha}$ представляет в системе Г.$S4$ „правило зеркального отражения“ [11], позволяющего в предположении $\vdash\alpha$ принять в качестве доказанной формулы—формулу $\alpha'$, полученную из $\alpha$ заменой всех (входящих в $\alpha$) временных операторов „прошлого“ $P$, $H$ на операторы „будущего“ $F$, $G$ и, наоборот.

При оформлении семантики системы Г.$S4$ в терминах временной шкалы (или „возможных миров“) $(X, \leqslant)$ индуктивный шаг определения истинности, касающийся оператора $\gamma$, выглядит так: формула вида $\gamma\alpha$ верна в точке („мире“) $x \in X$, если (и только если) формула $\alpha$ верна в „зеркальном образе“ точки („антимире“) $g(x) \in X$ (определение отображения $g: X \rightarrow X$ смотри ниже).

Пусть $T \in Skol_{\sim}$; сколемов фильтр $F$ алгебры $T$ назовем инволютивным, если $a \in F => \neg \sim a \in F$.

Теорема об инволютивных фильтрах. Структура конгруенций $\theta(T)$ алгебры $T \in Skol_{\smile}$ изоморфна структуре ее инволютивных фильтров.

Отметим также, что если $(B, C, \gamma)$—Г-алгебра, $T$—ее трафарет, то структуры $\theta(T)$, $\theta(B, C, \gamma)$—изоморфны.

Пусть $(X, R)$—совершенная, симметричная модель, т. е. пусть $(X, R) \in Sym$; пусть, кроме того, на множестве $X$ определено отображение $g{:}X \to X$, являющееся гомеоморфизмом, причем для любых $x, y \in X$ $gg(x) = x$ и $xRy <=> g(y)Rg(x)$. Полученную тройку $(X, R, g)$ будем называть строго-симметричной, совершенной моделью и считать объектом категории $\Gamma^*$. Пусть теперь $(X, R, g)$ и $(X', R', g')$—объекты категории $\Gamma^*$; отображение $f{:}X \to X'$ назовем морфизмом категории $\Gamma^*$, если $f$ является непрерывным, интервальным отображением удовлетворяющим условию $f(g(y)) = x <=> f(y) = g'(x)$ для любых $y \in X$, $x \in X'$. Пусть, кроме того, $\Gamma_0^*$—полная подкатегория категории $\Gamma^*$, полученная рассмотрением объектов $(X, R, g)$, у которых $R$—отношение частичного порядка.

Теорема о категории Г—алгебр. Категория Г Г—алгебр (соот., $Skol_{\smile}$) дуально эквивалентна категории $\Gamma^*$ (соот., $\Gamma_0^*$).

Можно показать, что многообразия $Skol$, $Skol_{\smile}$, $Cal^2$ и Г (также как и многообразия алгебр с замыканием $\widetilde{Cal}$ и брауэровых алгебр $Brouw$)—финитно-аппроксимируемы, однако конечные алгебры многообразий имеют следующую специфичную черту.

Пусть $(B, C_1, C_2)$—произвольная алгебра с сопряженными замыканиями, $T_1 = \{-C_1 a : a \in B\}$ и $T_2 = \{-C_2 a : a \in B\}$ ее трафареты. Обозначим через $C(B)$ пересечение множеств $T_1$ и $T_2$, т. е. $C(B) = T_1 \cap T_2$. Легко проверить, что множество совпадает с центрами структур $T_1$, $T_2$ (т. е. с множествами всех элементов $a \in T_k$, имеющих дополнение в $T_k$, $k = 1, 2$) и, тем самым, образует булеву подалгебру алгебры $B \in Bool$.

Пусть теперь $(B, C_1, C_2)$ — конечная алгебра с сопряженными замыканиями, $T_1$ и $T_2$ — ее трафареты (алгебры Сколема); тогда их структуры конгруенций $\theta(T_1)$, $\theta(T_2)$, $\theta(B, C_1, C_2)$ изоморфны структуре конгруенций $\theta(C(B))$ булевой алгебры $C(B)$. Таким образом, в отличие от алгебр с замыканием и брауэровых структур, каждая конечная алгебра с сопряженными замыканиями и каждая конечная алгебра Сколема является полупростой, т. е. разложимой в подпрямое произведение простых алгебр. Заметим также, что простота указанных алгебр равносильна двухэлементности центра.

## ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА


1. Rauszer C. «Semi-Boolean algebras and their applications to intuitionistic Logic with dual operations». Fund. Math., 1974, 83, № 3, 219—249.
2. McKinsey J. C. C., Torskia. «On closed elements in Closure algebras». Ann. Math., 1946, 47, 122—162.
3. Esakia L. «The problem of dualism in the intuitionistic logic and Browerian lattices». V. Inter. Congress of Logic, Methodology and Philosophy of Science, Canada, 1975, p. 7—8.
4. Segerberg K. «Modal logics with alternative relations», Theoria, 1970, 36, № 3.
5. Birkhoff G. «Lattice theory» (3 ed.), Providence, 1967.
6. Rasiowa H. «An algebraic approach to non-classical logic», PAN, Varszawa, 1974.
7. Эсакиа Л. Л. «О топологических моделях Крипке». Доклады АН СССР, 1974, 214, № 2, 298—301.
8. Jónsson B., Tarski A. «Boolean algebras with operators». Amer. I. Math. 1951, 73, 891—939.
9. Esakia L., Meskhi V. «Five critical modal systems», Theoria, 1974, 43, № 1, 52—69.
10. Esakia L., Grigolia R. «Christmass trees. On the free cyclic algebras in some varieties of closure algebras». Bull. of Sect. Log. 1975, 4, № 3, 95—102.
11. Prior A. «Past, Present and Future». Clarendon Press, Oxford, 1967.