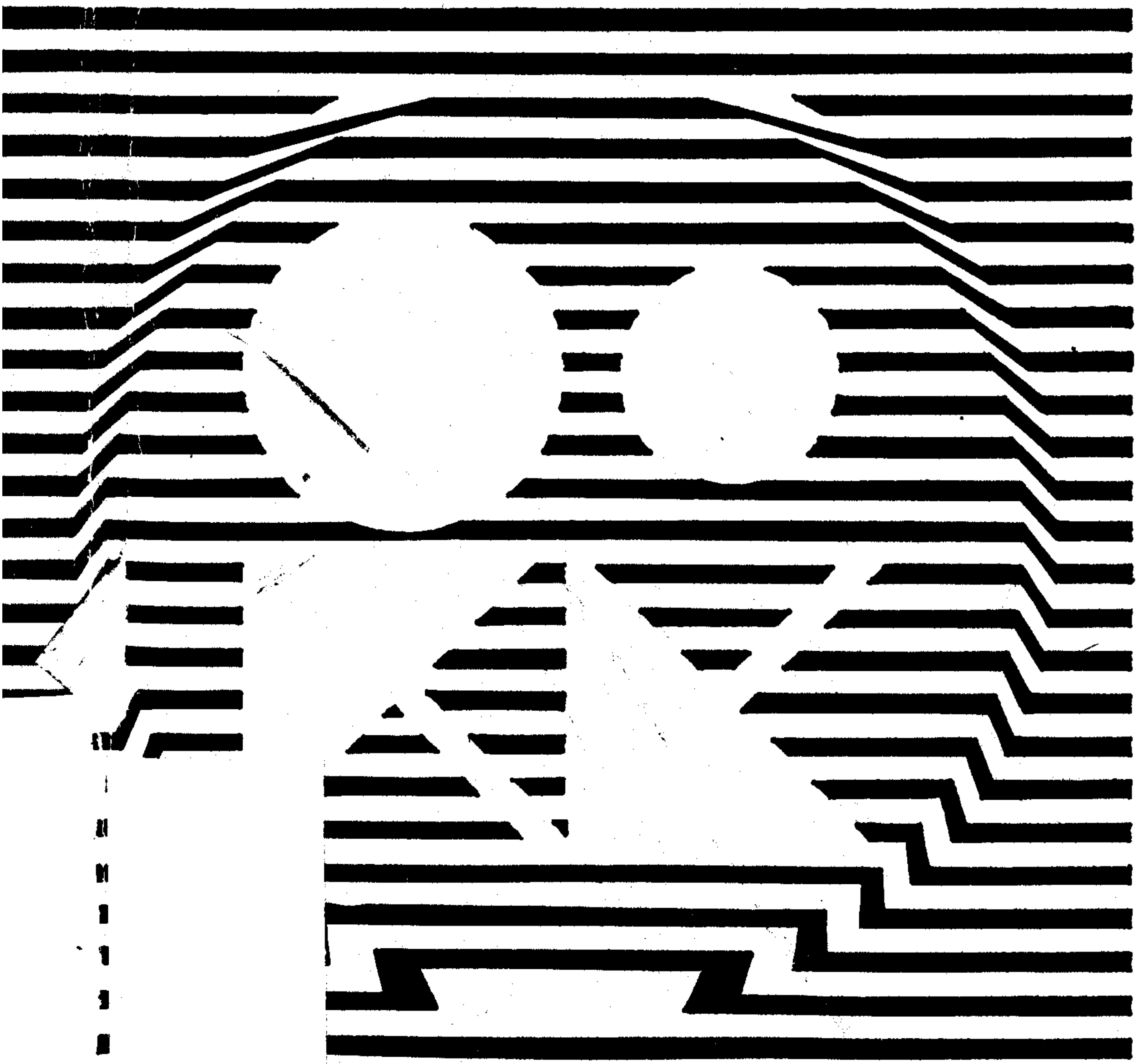
IOANA
CIORĂNESCU



Tatălui meu,
prof. NICOLAE CIORĂNESCU

Coperta de: **BARBACARU FLAVIU**

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

București, str. Gutenberg, 3 bis, sector 6

IOANA CIORĂNESCU

APLICAŢII DE DUALITATE ÎN ANALIZA FUNCŢIONALĂ NELINIARĂ

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA
BUCUREŞTI 1974

PREFAȚĂ

Probleme de analiză funcțională neliniară au apărut încă pe la începutul acestui secol, în lucrări ale lui Picard, Bernstein, Lyapunov, Lichtenstein, avînd în centrul lor operatorii compacți și găsirea de teoreme de punct fix pentru aceștia. Probleme la limită pentru ecuații cu derivate parțiale neliniare au făcut necesară crearea de teorii noi, pentru clase importante de operatori necompacți neliniari.

Astfel a fost inițiat de către Minty, Browder, Komura și Kato studiul sistematic, al clasei aplicațiilor monotone de la un spațiu Banach X în 2^{X^*}, importantă în teoria ecuațiilor cu derivate parțiale cît și al clasei aplicațiilor acretive de la X în 2^X, importantă în teoria semigrupurilor de operatori neliniare.

Instrumentul de bază în studiul acestor clase de operatori s-au arătat a fi aplicațiile de dualitate; de aceea ne-am propus să ne ocupăm cu studiul cît mai complet al proprietăților aplicațiilor de dualitate în spații Banach și, legat de acestea, cu studiul unor clase particulare de spații Banach, cum ar fi spațiile strict convexe și uniform convexe. Proprietățile geometrice ale acestor clase de spații Banach sînt frecvent utilizate și menționate în numeroase monografii și lucrări consacrate problemelor neliniare, dar nu apar nicăieri grupate; cu ele ne ocupăm în capitolele I și II. În prezentarea rezultatelor despre aplicațiile monotone și acretive din capitolele IV și V, am urmărit cu precădere pe acelea care pun în lumină rolul aplicațiilor de dualitate; tot sub acest aspect selectăm și rezultatele din teoria gradului topologic în spații Banach, amintind că pentru alt tip de probleme în care gradul topologic are rol hotărîtor, pot fi consultate volumele I și II ale Tratatului de *analiză funcțională al profesorului G. Marinescu [111, 112]. O expunere completă a teoriei ecuațiilor abstracte asociate operatorilor neliniari acretivi este dată în monografia lui V. Barbu [8], iar pentru o aprofundare a proprietăților operatorilor monotoni și ale aplicațiilor acestora recomandăm monografiile lui G. Dincă [65], D. Pascali [132] și Al. Schiop [171].*

În general s-a căutat ca această expunere să fie de sine stătătoare, pentru urmărirea ei fiind suficiente cunoștințe de analiză funcțională în limita unui curs general.

Orientarea mea spre problematica din această monografie o datorez anului de specializare la Universitatea din Roma, unde am lucrat cu profesorul U. Mosco; unele din problemele prezentate au constituit obiectul unor seminarii pe care le-am ținut în 1971—1972 la Universitatea din Roma și în 1973 la Institutul de Matematică din București.

Mulțumesc în încheiere profesorului G. Marinescu la îndemnul căruia am scris această carte cît și colegilor G. Godini și L. Zsidó cu care am purtat discuții utile.

IOANA CIORĂNESCU

TABLA DE MATERII

CAPITOLUL I

PROPRIETĂŢI ALE APLICAŢIILOR DE DUALITATE

§ 1. FUNCŢII CONVEXE

Fie X un spaţiu topologic; pentru $x_0 \in X$, notăm prin $\mathcal{V}(x_0)$ mulţimea tuturor vecinătăţilor punctului x_0.

DEFINIŢIA 1.1. *Funcţia* $f: X \to \mathbf{R}$ *este inferior semicontinuă în* $x_0 \in X$, *dacă*:

$$f(x_0) = \underline{\lim}_{x \to x_0} f(x) = \sup_{V \in \mathcal{V}(x_0)} \inf_{x \in V} f(x)$$

PROPOZIŢIA 1.1. *Pentru* $f: X \to \mathbf{R}$ *sînt echivalente*:

i) f *este inferior semicontinuă*,

ii) *mulţimea* $\{x / f(x) > \alpha\}$ *este deschisă*, $\forall \alpha \in \mathbf{R}$,

iii) *mulţimea* $\{x/f(x) \leqslant \alpha\}$ *este închisă*, $\forall \alpha \in \mathbf{R}$.

Demonstraţie. Să demonstrăm că i) $\Rightarrow$ ii). Fie $\alpha \in \mathbf{R}$ şi $x_0 \in X$ cu $f(x_0) > \alpha$; din $\sup_{V \in \mathcal{V}(x_0)} \inf_{x \in V} f(x) > \alpha$, rezultă că există $V_0 \in \mathcal{V}(x_0)$, astfel încît $\inf_{x \in V_0} f(x) > \alpha$; atunci $V_0 \subset \{x/f(x) > \alpha\}$.

Să arătăm că ii)$\Rightarrow$i). Fie $x_0 \in X$; are loc evident: $f(x_0) \geqslant \underline{\lim}_{x \to x_0} f(x)$.

Pentru a demonstra inegalitatea inversă fie $\varepsilon > 0$ şi

$$V_0 = \{x/f(x) > f(x_0) - \varepsilon\};$$

atunci $V_0 \in \mathcal{V}(x_0)$ şi $\inf_{x \in V} f(x) \geqslant f(x_0) - \varepsilon$ de unde şi $\underline{\lim}_{x \to x_0} f(x) \geqslant f(x_0) - \varepsilon$.

Cum ε este arbitrar, rezultă

$$\underline{\lim}_{x \to x_0} f(x) \geqslant f(x_0).$$

Faptul că ii) $\Leftrightarrow$ iii) este evident.

q.e.d.

COROLAR. *O funcție inferior semicontinuă pe un spațiu topologic compact este inferior mărginită și își atinge marginea inferioară.*

Demonstrație. Să presupunem că f nu ar fi inferior mărginită. Fie $X_n = \{x/f(x) \leqslant -n\}$; mulțimile X_n sînt închise, descrescătoare (față de incluziune) și nevide.

Atunci există un punct $x_0 \in \bigcap\limits_{n=1} X_n$ pentru care $f(x_0) = -\infty$, ceea ce nu se poate.

Fie deci $-\infty < \alpha = \inf\limits_{x \in X} f(x)$ și $Y_n = \left\{x/f(x) \leqslant \alpha + \frac{1}{n}\right\}$; familia de mulțimi $\{Y_n\}_{n \in N}$ are proprietatea intersecției finite, prin urmare există $x_0 \in \bigcap\limits_{n=1} Y_n$.

Pentru acest x_0 avem atunci evident $f(x_0) = \alpha$.

q.e.d.

DEFINIȚIA 1.2. *Fie $D \subset X$ o mulțime convexă a spațiului liniar X; funcția $f: D \to \mathbf{R}$ se numește convexă, dacă pentru orice $x, y \in D$ și $\lambda \in (0,1)$, are loc.*

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

Dacă pentru $x \neq y$ inegalitatea de mai sus este strictă, f se numește strict convexă.

O funcție $g: D \to \mathbf{R}$ este concavă dacă $-g$ este convexă.

Observația 1.1. Orice funcție convexă poate fi considerată ca definită pe întreg spațiul X, dacă punem $f(x) = +\infty$ pentru $x \in X \setminus D$. O funcție $f: X \to \widetilde{\mathbf{R}} = (-\infty, +\infty]$ se numește proprie dacă $f \not\equiv +\infty$.

Se numește domeniu de definiție propriu al lui f, mulțimea

$$D(f) = \{x/f(x) < +\infty\}.$$

În cele ce urmează vom considera submulțimi $D = D(f)$ iar X va fi un spațiu Banach real.

DEFINIȚIA 1.3. *Se numește epigraful funcției $f: D \to \mathbf{R}$, submulțimea din $X \oplus \mathbf{R}$:*

$$\operatorname{Epi} f = \{(x, t) \in D \oplus \mathbf{R}/t \geqslant f(x)\}.$$

Evident, f este o funcție convexă dacă și numai dacă Epi f este convexă.

Mai observăm că dacă f este inferior semicontinuă și D este închis, atunci Epi f este o mulțime închisă.

Într-adevăr, fie $(x_0, t_0) \notin$ Epi f; dacă $x_0 \in D$, atunci $t_0 < f(x_0)$. Fie ε astfel încît $t_0 + \varepsilon < f(x_0) = \sup\limits_{V \in \mathcal{V}(x_0)} \inf\limits_{x \in V} f(x)$; există $V_0 \in \mathcal{V}(x_0)$ astfel încît $\inf\limits_{x \in V} f(t) > t_0 + \varepsilon$ și prin urmare $V_0 \times [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \cap \text{Epi}\, f = \Phi$. Dacă $x_0 \notin D$, atunci $X \setminus D \times \mathbf{R}$ este o vecinătate a lui (x_0, t_0) disjunctă de Epi f.

PROPOZIȚIA 1.2. *Fie $f: D \to \mathbf{R}$ o funcție convexă; sînt echivalente:*

i) *f este tare inferior semicontinuă,*

ii) *f este slab inferior semicontinuă.*

Demonstrație. Se verifică ușor că mulțimea $\{x \in D / f(x) \leqslant \alpha\}$ este convexă, $\forall \alpha \in \mathbf{R}$; atunci afirmația rezultă din faptul că o mulțime convexă este închisă în normă dacă și numai dacă ea este slab închisă în X.

q.e.d.

TEOREMA 1.1. *Fie $f: D \to \mathbf{R}$ o funcție convexă pe D deschisă și convexă; dacă există $x_0 \in D$ astfel încît f să fie mărginită superior pe o vecinătate a lui x_0, atunci f este continuă pe întreg D.*

Demonstrație. Putem evident presupune că $x_0 = 0$ și că $f(0) = 0$. Fie $a \in \mathbf{R}$ și $V \in \mathcal{V}(0)$ simetrică, astfel încît $f(x) \leqslant a$, $\forall x \in V$; fie $0 < \varepsilon < 1$. Dacă $x \in \varepsilon V$, atunci:

$$f(x) = f\left((1-\varepsilon) \cdot 0 + \varepsilon\left(\frac{1}{\varepsilon} x\right)\right) \leqslant (1-\varepsilon) \cdot f(0) + \varepsilon f\left(\frac{1}{\varepsilon} x\right) \leqslant \varepsilon a \cdot$$

În plus, avem și:

$$0 = f(0) = f\left(\frac{1}{1+\varepsilon} x + \left(1 - \frac{1}{1+\varepsilon}\right)\left(-\frac{1}{\varepsilon} x\right)\right) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{1+\varepsilon} \cdot f(x) + \left(1 - \frac{1}{1+\varepsilon}\right) f\left(-\frac{1}{\varepsilon} x\right)$$

deci: $f(x) \geqslant -\varepsilon f\left(-\frac{1}{\varepsilon} x\right) \geqslant -\varepsilon a \cdot$

Prin urmare, am obţinut: $|f(x)| \leqslant \varepsilon a, \forall\, x \in \varepsilon V$ şi deci f este continuă în 0.

Fie acum $y \in D$; vom arăta că există o vecinătate a lui y pe care f este mărginită superior şi aceasta va încheia demonstraţia.

Cum D este deschisă, există $\rho > 1$, astfel încît $\rho y \in D$. Fie $x \in y + \left(1 - \frac{1}{\rho}\right) V$, unde V este vecinătatea de mai sus. Atunci

$$x = y + \left(1 - \frac{1}{\rho}\right) z = \frac{1}{\rho}(\rho y) + \left(1 - \frac{1}{\rho}\right) z \text{ cu } z \in V.$$

Dar cum $0 < \frac{1}{\rho} < 1$, rezultă că $x \in D$ şi prin urmare

$$y + \left(1 - \frac{1}{\rho}\right) V \subset D.$$

În plus, avem:

$$f(x) \leqslant \frac{1}{\rho} f(\rho y) + \left(1 - \frac{1}{\rho}\right) f(z) \leqslant \frac{1}{\rho} f(\rho y) + \left(1 - \frac{1}{\rho}\right) a$$

ceea ce arată că f este mărginită superior pe o vecinătate a lui y.

q.e.d.

Reamintim că X, Y fiind două spaţii Banach şi $F : D \to Y$ un operator neliniar pe mulţimea $D \subset X$, deschisă, dacă pentru $x \in D$ şi $h \in X$ există

$$\lim_{t \to 0} \frac{F(x + th) - F(x)}{t} = DF(x, y)$$

se spune că F este diferenţiabilă Gateaux în punctul x, în direcţia h. Dacă limita de mai sus există pentru orice $h \in X$, atunci se spune că F este diferenţiabilă Gateaux în x, iar $DF(x, h)$ se numeşte diferenţiala Gateaux a lui F în x. În general operatorul $DF(x, h)$ nu este liniar şi nici continuu în h, x fiind fixat.

Dacă $DF(x, \cdot)$ este un operator liniar şi continuu atunci el se numeşte derivată Gateaux a lui F în x.

Vom vedea în cele ce urmează că dacă F este o funcție convexă, diferențiabilă Gateaux în x, atunci $DF(x, \cdot)$ este liniar iar dacă F este convexă continuă și diferențiabilă Gateaux, atunci F are derivată Gateaux.

Dacă pentru $F : D \to Y$ și $x \in D$, există un operator liniar și continuu de la X în Y, $U(x,.)$, astfel încît:

$$\lim_{\|h\| \to 0} \frac{\| F(x+h) - F(x) - U(x,h) \|}{\|h\|} = 0$$

atunci se spune că F este diferențiabilă Fréchet în x iar $U(x,.)$ se numește derivată Fréchet în x.

Dacă F este diferențiabilă Fréchet în x, atunci F are derivată Gateaux în x și cele două derivate sînt egale. Invers, avem următorul rezultat [109]:

Dacă $F : D \to Y$ este diferențiabilă Gateaux cu $DF(x,.) \in \in \mathcal{L}(X, Y)$, $\forall x \in D$, iar aplicația $x \to DF(x,.)$ este continuă în topologiile normelor, atunci F este diferențiabilă Fréchet în orice $x \in D$.

Definiția 1.4. *Fie $f : D \to \mathbf{R}$ și x un punct interior al lui D; se numește derivată direcțională a lui f în punctul x, după direcția $h \in X$,*

$$\lim_{t \to 0+} \frac{f(x+th) - f(x)}{t} = f'_+(x, h)$$

dacă aceasta există.

Fie x un punct în care f are derivată direcțională după orice $h \in X$; observăm că dacă $f'_+(x, h) = -f'_+(x, -h)$ atunci funcția f are diferențială Gateaux în x; cum în general cele două cantități sînt diferite, vom pune:

$$f'_-(x, h) = -f'_+(x, -h).$$

Propoziția 1.3. *Derivata direcțională este o funcție pozitiv omogenă și subaditivă de h.*

Demonstrație. Prima proprietate rezultă direct din definiție, iar pentru subaditivitate, avem :

$$f'_+(x, h_1 + h_2) = \lim_{t\to 0_+} \frac{f\left(x + \frac{t}{2}\left(h_1 + h_2\right)\right) - f(x)}{t/2} =$$

$$= \lim_{t\to 0_+} \frac{2f\left(\frac{x + th_1}{2} + \frac{x + th_2}{2}\right) - 2f(x)}{t} \leqslant$$

$$\leqslant \lim_{t\to 0_+} \frac{f(x+th_1) - f(x)}{t} + \lim_{t\to 0_+} \frac{f(x + th_2) - f(x)}{t} =$$

$$= f'_+(x, h_1) + f'_+(x, h_2)$$

q.e.d.

Remarcăm că derivata direcțională este o funcție convexă de h.

Vom avea nevoie de următoarele rezultate din teoria funcțiilor convexe pe un interval pe dreapta reală :

LEMA 1.1. *Fie $f : I \to R$ o funcție convexă ; atunci în orice punct interior $a \in I$, f are derivate la dreapta și la stînga, este continuă în a, și are loc :*

(1) $$f'_+(a) \leqslant \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leqslant f'_-(b).$$

Demonstrație. Fie $t_1 < t_2$, $\theta = t_1/t_2$ și $t_0 = a + t_2$; atunci

$$\frac{f(a + t_1) - f(a)}{t_1} = \frac{f(a + \theta\, t_2) - f(a)}{t_1} = \frac{f(a + \theta\,(t_0 - a)) - f(a)}{t_1} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{(1 - \theta)f(a) + \theta f(t_0) - f(a)}{t_1} = \frac{f(a + t_2) - f(a)}{t_2}$$

deci funcția $t \to \dfrac{f(a + t) - f(a)}{t}$, pentru $t \to 0_+$, este descrescătoare şi mărginită inferior de orice raport de forma $\frac{f(a+t)-f(a)}{t}$ cu $t<0$; astfel există $f'_+(a) = \inf\limits_{t \to 0_+} \frac{f(a+t)-f(a)}{t}$ şi avem

$$\frac{f(a+t)-f(a)}{t} \leqslant f'_+(a), \forall t<0. \tag{2}$$

Analog se arată că există $f'_-(a)$ şi că:

$$f'_-(a) \leqslant \frac{f(a+t)-f(a)}{t}, \quad \forall t>0. \tag{3}$$

Trecînd la limită în 3), rezultă: $f'_-(a) \leqslant f'_+(a)$ iar (1) provine din (2) şi (3) prin triplă schimbare a notaţiilor.

q.e.d.

LEMA 1.2. *Orice funcţie crescătoare $f:[a,b]\to \mathbf{R}$ are primitiva convexă.*

Demonstraţie. Fie $F(x) = \int_a^x f(t)dt$; pentru $h>0$, avem

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt \geqslant f(x+0)$$

şi

$$\frac{F(x)-F(x\cdot h)}{h} = \frac{1}{h}\int_{x-h}^{x} f(t)\,dt \leqslant f(x-0).$$

Fie acum $a \leqslant x < y \leqslant b$, $\lambda \in [0,1]$ şi $z = \lambda x + (1-\lambda)y$, atunci

$$\lambda = \frac{y-z}{y-x} \text{ şi } 1-\lambda = \frac{z-x}{y-x}$$

Din inegalitățile de mai sus, transcrise convenabil, găsim :

$$F(y) - F(z) \geqslant (y - z) f(z + 0)$$

și

$$F(z) - F(x) \leqslant (z - x) f(z - 0).$$

Înmulțim prima inegalitate cu $(1 - \lambda)$ iar a doua cu $(-\lambda)$ și sumînd, găsim :

$$\lambda F(x) + (1 - \lambda) F(y) \geqslant F(z) + \frac{(y - z)\ (z - x)}{y - x}\Big[f(z + 0) - f(z - 0)\Big] \geqslant$$

$$\geqslant F(z)$$

q.e.d.

Propoziția 1.4. *Fie $D \subset X$ o mulțime convexă deschisă și $f : D \to \mathbf{R}$ o funcție convexă; atunci în orice punct $x \in D$ există derivata direcțională $f'_+(x, h)$ și avem :*

$$f'_-(x, h) \leqslant f'_+(x, h). \tag{4}$$

Demonstrație. Pentru orice $h \in X$ și $x \in D$, există $t_0 \in \mathbf{R}$ astfel încît $x + t_0 h \in D$. Să considerăm funcția : $\varphi(t) = f(x + th)$ pentru $t \in (-\varepsilon, t_0 + \varepsilon)$, unde ε este ales astfel încît $x + th \in D$, dacă t aparține segmentului de mai sus; atunci $\varphi(t)$ este evident și ea o funcție convexă pe $(-\varepsilon, t_0 + \varepsilon)$ și conform lemei 1.1, există $\varphi'_+(0)$ și $\varphi'_-(0)$. Aceasta înseamnă că pentru f există $f'_+(x, h)$ și $f'_-(x, h)$, iar relația 4) rezultă din $\varphi'_-(0) \leqslant \varphi'_+(0)$.

q.e.d.

Observația 1.2. Fie $f : X \to \mathbf{R}$, convexă, diferențiabilă Gateaux ; atunci $< Df(x), y > = \frac{d}{dt}\varphi(t)\Big|_{t=0}$, unde $\varphi(t) = f(x + ty)$.

Dacă f este de două ori diferențiabilă Gateaux, un calcul simplu arată că pentru $(D^2 f)(x) : X \to X^*$, avem

$$< (D^2 f)(x)(y), y > = \frac{d^2}{dt^2}\varphi(t)\Big|_{t=0}$$

și prin urmare $<(D^2f)(x)(y), y> \geqslant 0$, $\forall\, x, y \in X$, deoarece φ este o funcție convexă scalară și se știe că derivata ei de ordin II, cînd există, este $\geqslant 0$ (se verifică imediat că φ' este crescătoare).

PROPOZIȚIA 1.5. *Dacă $f: D \to \mathbf{R}$, D convexă, deschisă, este convexă pe D și continuă în $x_0 \in D$, atunci $f'_+(x_0, h)$ este o funcție convexă continuă de h.*

Demonstrație. Fie $x_0 \in D$ și o sferă $S_r(x_0) \subset D$, astfel încît $|f(x)| \leqslant M, \forall x \in S_r(x_0)$.

Fie $0 \neq h \in X$ și $\varphi(t) = f(x_0 + th)$, $t \in \left[-\frac{r}{h}, \frac{r}{h}\right]$. Folosind (1), găsim

$$|f'_+(x_0,h)| = |\varphi'_+(0)| \leqslant \frac{\varphi\left(\frac{r}{\|h\|}\right) - \varphi(0)}{r/\|h\|} =$$

$$= \frac{\left|f\left(x_0 + \frac{r}{\|h\|}\cdot h\right) - f(x_0)\right|}{r}\|h\| \leqslant \frac{2M}{r}\|h\|.$$

Prin urmare $f'_+(x_0,h)$ este continuă în $h=0$; ea fiind o funcție convexă, teorema 1.1 ne confirmă continuitatea lui $f'_+(x_0,h)$ în orice $h \in X$.

q.e.d.

DEFINIȚIA 1.5. *Fie $f: D \to \mathbf{R}$ și $x_0 \in D$; un element $x_0^* \in X^*$ se numește subgradient al lui f în x_0, dacă*

$$(5) \qquad f(x) - f(x_0) \geqslant <x_0^*, x - x_0>, \ \forall x \in D.$$

Mulțimea subgradienților lui f în x se notează prin $\partial f(x)$; dacă $\partial f(x) \neq \emptyset$, se spune că f este subdiferențiabilă în x iar aplicația multivocă (cu valori submulțimi din X) $x \to \partial f(x)$ se numește subdiferențiala lui f.

Se observă ușor că $\partial f(x)$ este o mulțime convexă și X-închisă în X^*.

Observația 1.3. Vom da o interpretare geometrică a noțiunii de subgradient. Pentru aceasta amintim că dualul lui $X \oplus R$ este $X^* \oplus R$ iar un hiperplan închis în $X \oplus R$ este de forma:

$$H = \{ (t, x) / < x_0^*, x > + t_0 \cdot t = \alpha_0 \}$$

cu $x_0 \in X^*$, $t_0, \alpha_0 \in \mathbf{R}$ determinați. Dacă $t_0 \neq 0$, hiperplanul se numește nevertical; împărțind prin $- t_0$, găsim: (cu alți x_0 și α_0)

$$H = \{ (x, t) / < x_0^*, x > - t = \alpha_0 \}.$$

Fie $f : D \to \mathbf{R}$ și Epi f, epigraful său; să presupunem că toate punctele lui Epi f se află într-unul din semispațiile determinate de H.

Atunci în mod necesar avem : $< x_0^*, x > - t \leqslant \alpha_0$ pentru $\forall (x,t) \in$ Epi f relația cu $\geqslant$ fiind imposibilă deoarece odată cu $(x, t) \in$ Epi f, și $(x, t + t') \in$ Epi f, pentru orice $t' \in R_+$.

Se numește hiperplan de sprijin în $(x_0, f(x_0))$ la epigraful lui f, un hiperplan nevertical H din $X \oplus R$ care trece prin $(x_0, f(x_0))$ iar toate punctele lui Epi f *se află într-unul din semispațiile determinate de H.*

Ecuația lui H este atunci :

$$H = \{(x,t) \,|\, < x_0^*, x - x_0 > + f(x_0) = t \}$$

și pentru orice $(x,t) \in$ Epi f, are loc : $< x_0^*, x - x_0 > + f(x_0) \leqslant t$.

Am obținut astfel :

PROPOZIȚIA 1.6. $f : D \to \mathbf{R}$ *are subgradient în x_0 dacă și numai dacă epigraful său are cel puțin un hiperplan de sprijin în $(x_0, f(x_0))$.*

Urmează să stabilim în ce caz o funcție are subgradient într-un punct și cînd acesta este unic. Dăm în prealabil :

PROPOZIȚIA 1.7. *Fie $D \subset X$ o mulțime deschisă și convexă $f : D \to R$ o funcție convexă, $x_0 \in D$ și $x_0^* \in X$; atunci sînt echivalente*

(i) *x_0^* este subgradient în x_0 al lui f*

(ii) *pentru orice $h \in X$, are loc :*

$$f'_-(x_0, h) \leqslant < x_0^*, h > \leqslant f'_+(x_0, h). \tag{6}$$

Demonstrație. Este evident din definiția subgradientului că (i) $\Rightarrow$ (ii). Să arătăm deci că (ii) $\Rightarrow$ (i).

Fie $x_0 \in D$ şi $y \in X$; fie $h = y - x_0$ şi fie $\varphi(t) = f(x_0 + th)$ pentru $t \in (-\varepsilon, 1+\varepsilon)$, căreia să-i aplicăm inegalităţile (1), cu $a = 0$ $b = 1$:

$$\varphi'_+(0) \leqslant \frac{\varphi(1) - \varphi(0)}{1 - 0} \leqslant \varphi'_-(1);$$

de aici, rezultă: $\varphi(1) - \varphi(0) \leqslant \varphi'_+(0)$, sau:

$$f(y) - f(x) = f(x_0 + h) - f(x_0) \geqslant f'_+(x_0, h) \geqslant < x_0^*, h >;$$

rezultă deci că x_0, este subgradient.

TEOREMA 1.2. *Pentru o funcţie convexă, continuă $f: D \to R$, pe D convexă şi închisă, există subgradient în orice punct $x \in D$.*

Demonstraţie. E suficient să arătăm că în orice punct $x_0 \in D$, există o funcţională $x_0^* \in X^*$ care verifică (6). Să fixăm $h_0 \in X$ şi o funcţională liniară τ, pe dreapta $z = \lambda h_0$, astfel încît $\tau(h_0) = f'_+(x_0, h_0)$. Cum $f'_+(x, h)$ este pozitiv omogenă în h, rezultă că avem:

$$\tau(\lambda h_0) = f'_+(x_0, h_0),\ \lambda \geqslant 0.$$

Pentru $\lambda < 0$, are loc:

$$\tau(\lambda h_0) = \lambda f'_+(x_0, h_0) = -|\lambda| f'_+(x_0, h_0) = |\lambda| f'_-(x_0 - h_0) \leqslant$$

$$\leqslant |\lambda| f'_+(x_0, -h_0) = f'_+(x_0, \lambda h_0).$$

Astfel pentru orice punct z al dreptei $z = \lambda h_0$, avem:

(7) $$\tau(z) \leqslant f'_+(x_0, z).$$

După propoziţia 1.5 şi teorema Hahn-Banach, funcţionala liniară τ, definită pe dreapta $z = \lambda h_0$ şi verificînd (7), poate fi prelungită la o funcţională, $x_0^* \in X^*$, pentru care:

$$< x_0^*, h > \leqslant f'_+(x_0^*, h) \text{ şi } < x_0^*, h_0 > = f'_+(x_0, h_0).$$

De aici rezultă : $< x_0^*, -h > \leqslant f'_+(x_0,-h)$ sau :

$$< x_0^*,h > = -< x_0^*,-h > \geqslant -f'_+(x_0,-h) = f'_-(x_0,h)$$

de unde rezultă (6).

q.e.d.

TEOREMA 1.3. *O funcție convexă continuă definită pe o mulțime convexă deschisă din X este diferențiabilă Gateaux în x_0 dacă și numai dacă ea are un subgradient unic în x_0.*

Demonstrație. Dacă f este diferențiabilă Gateaux atunci $f'_+(x_0,h)=f'_-(x_0,h)$ şi afirmaţia rezultă din teorema de existenţă 1.2 şi propoziţia 1.7.

Invers, dacă f are în x_0 un subgradient unic, în construcţia din teorema precedentă, trebuie să obţinem aceeaşi funcţională x_0^*, oricare ar fi h_0 cu care pornim iniţial, prin urmare şi pentru cuplul $x_0,-h_0$; aceasta înseamnă :

$$< x_0^*, h_0 > = f'_+(x_0,h_0) \text{ şi } < x_0^*, -h_0 > = f'_+(x_0,-h),$$

de unde $< x_0^*, h_0 > = f'_+(x_0,h_0) = -f'_+(x_0,-h_0) = f'_-(x_0,h_0)$.

q.e.d.

Observăm că dacă f nu este convexă, (6) nu mai are loc şi deci legătura cu diferenţiala Gateux nu mai există.

DEFINIŢIA 1.6. *Fie* $f : D \to \mathbf{R}$ *convexă şi*

$$D^* = \{x^* \in X^* / \sup_{x \in D} (< x^*, x > - f(x)) < +\infty\}$$

$$f^*(x^*) = \sup_{x \in D} (< x^*,x > - f(x))$$

Dacă $D^* \neq \emptyset$, f^* *se numeşte funcţie conjugată lui* f.
Se numeşte conjugată a funcţiei concave $g : D \to \mathbf{R}$ *funcţia* $g^*(x^*) = \inf_{x \in D} (< x^*,x > - g(x))$, *definită pe*

$$D^*(g^*) \neq \{x^* \in X^* / \inf_{x \in D} (< x^*, x > - g(x)) > -\infty\}$$

dacă $D^*(g^*) \neq \emptyset$.

PROPOZIŢIA 1.8. *Dacă funcţia convexă $f : D \to \mathbf{R}$ are conjugată, atunci*

a) $(f + \alpha)^* = f^* - \alpha, \qquad \alpha \in \mathbf{R}$

b) $(cf)^* = cf^*(\frac{\cdot}{c}) \qquad c > 0$

c) *dacă $f_1 : D^c \to R$ este astfel încît $f_1 \geqslant f$, atunci şi f_1 are conjugată şi $f_1^* < f^*$*

d) $(\inf_\alpha f_\alpha)^* = \sup_\alpha f_\alpha$ *unde $f_\alpha : D \to \mathbf{R}$ sînt convexe şi au conjugată.*

Demonstraţie. Toate aceste proprietăţi sînt o consecinţă directă a definiţiei 1.6.

Să verificăm de exemplu c) : fie $x^* \in D^*$; atunci :

$$f^*(x)^* = \sup_{x \in D} (< x^*, x > - f(x)) \geqslant \sup_{x \in D} (<x^*, x > - f_1(x))$$

şi deci $f_1^*(x^*)$ există şi $f_1^* \leqslant f^*$.

q.e.d.

PROPOZIŢIA 1.9. *O funcţie convexă $f : D \to \mathbf{R}$ are conjugată dacă şi numai dacă există în $X \oplus R$ un hiperplan nevertical astfel încît mulţimea* Epi f *să se afle într-unul din semispaţiile determinate de H.*

Demonstraţie. Fie f: $D \to \mathbf{R}$ avînd conjugată şi fie $(x_0^*, t_0) \in$ Epif^* ; atunci pentru orice $(x,t) \in$ Epi f avem :

$$t_0 \geqslant f^*(x_0^*) \geqslant < x_0^*, x > - f(x) \geqslant < x_0^*, \ x > - t$$

ceea ce înseamnă că $<x_0^*, x> - t = t_0$ este un hiperplan nevertical cu proprietatea cerută.

Fie invers, f şi $H = \{(x,t) / < x_0^*, x > - t = t_0\}$ cu proprietatea din propoziţie; atunci, pentru orice $(x, t) \in$ Epi f, avem : $< x_0^*, x > - t \leqslant t_0$. În particular :

$$< x_0^*, x > - f(x) \leqslant t_0, \forall x \in D \text{ şi deci } x_0^* \in D^*.$$

În plus, observăm că $f^*(x^*) \leqslant t_0$ şi astfel $(x_0^*, t_0) \in$ Epi f.

q.e.d.

Din cele de mai sus a rezultat că dacă f are conjugată, atunci $(x_0^*, t_0) \in \mathrm{Epi}\, f$ dacă şi numai dacă $< x_0^*, x > - t \leqslant t_0$, pentru orice $(x,t) \in \mathrm{Epi}\, f$.

Atunci are loc :

PROPOZIŢIA 1.10. *Pentru orice funcţie convexă $f : D \to \mathbf{R}$ care are conjugată, avem :*

(8) $$\mathrm{Epi} f^* = \bigcap_{(x,t) \in \mathrm{Epi} f} \{x, s) \,/ < x^*, x > - t \leqslant s\}$$

COROLAR. *Dacă funcţia convexă $f : D \to \mathbf{R}$ are conjugată, atunci D^* este convexă iar f^* este o funcţie convexă şi cu epigraful închis.*

Demonstraţie. Afirmaţia este o consecinţă a lui (8) care ne dă mulţimea Epi f ca o intersecţie de mulţimi convexe şi închise

q.e.d.

PROPOZIŢIA 1.11 a) *Dacă este o funcţie convexă şi inferior semicontinuă pe D închis, atunci f are conjugată.*

b) *Dacă f este o funcţie convexă şi continuă pe D deschis, atunci f este conjugată.*

Demonstraţie. În primul caz mulţimea $E = \mathrm{Epi}\, f$ este închisă iar în al doilea caz mulţimea $C = \{(x, t)/t > f(x), x \in D\}$ este deschisă. Fie $x_0 \in D$ şi $t_0 > 0$; punctul $(x_0, f(x_0) - t_0) \notin E$ şi deci nici lui C ; atunci există în ambele cazuri un hiperplan $\{(x,t)/ < x_0^*, x > + \alpha t = c\}$ care separă E, respectiv C, de acest punct. Cum $x_0 \in D$, rezultă $\alpha \neq 0$, deci acest hiperplan este nevertical. Acum a) şi b) rezultă din propoziţia 1.9.

q.e.d.

Vom da următorul exemplu simplu

PROPOZIŢIA 1.12. *Dacă* $f(x) = \dfrac{1}{2} \| x \|^2$, atunci

$$f^*(x) = \frac{1}{2} \| x^* \|^2. \quad \forall\, x^* \in X^*.$$

Demonstraţie. Din $< x^*, x > \leqslant \| x \| \, \| x^* \| \leqslant \dfrac{1}{2} (\| x \|^2 + \| x^* \|^2)$

rezultă : $< x^*, x > - \dfrac{1}{2} \| x \|^2 \leqslant \dfrac{1}{2} \| x^* \|^2$, $\forall\, x \in X$ şi $x^* \in X^*$.

Prin urmare:

$$f^*(x^*) = \sup_{x\in X} (< x^*, x > - \frac{1}{2} \|x\|^2) \leqslant \frac{1}{2} \|x^*\|^2$$

Fie acum $y_n \in X$ cu $\|y_n\| = 1$ și astfel încît

$$< x^*, y_n > \xrightarrow[n]{} \|x^*\| ; \text{ fie } x_n = \|x^*\| \cdot y_n ; \text{ avem :}$$

$$< x^*, x_n > - \frac{1}{2} \|x_n\|^2 = \|x^*\| < x^*, y_n > - \frac{1}{2} \|x_n\|^2 \xrightarrow[n]{} \frac{1}{2} \|x^*\|^2,$$

de unde

$$f^*(x^*) = \frac{1}{2} \|x^*\|^2.$$

q.e.d.

TEOREMA 1.4. *Fie $f : D \to \mathbf{R}$ convexă; atunci*

$x^* \in \partial f(x)$ dacă și numai dacă $x^* \in D^*$ și

(9) $$f(x) + f^*(x^*) = < x^*, x >, \forall x \in D.$$

Demonstrație. Fie $x^* \in \partial f(x)$; avem:

$$f(y) \geqslant f(x) + < x^*, y - x >, \forall y \in D, \text{ deci :}$$

$$f^*(x^*) = \sup_{y\in D} (< x^*, y > - f(y)) \leqslant \sup_{y\in D} (< x^*, y) >$$

$$- f(x) - < x^*, y - x >) = < x^*, x > - f(x).$$

Prin urmare $x^* \in D^*$ și $f^*(x^*) \leqslant < x^*, x > - f(x)$.
Cum inegalitatea inversă are loc întotdeauna, rezultă (8).
Fie acum $x^* \in D^*$ pentru care are loc (8); atunci:

$$< x^*, x > - f(x) = f^*(x^*) \geqslant < (x^*, y > - f(y), \forall y \in D,$$

sau

$$f(y) \geqslant f(x) - < x^*, y - x >, \text{ deci } x \in \partial f(x).$$

q.e.d.

Vom da următoarea versiune a teoremei de dualitate a lui Fenchel :

TEOREMA 1.5. *Fie* $f : D_1 \to R$ *o funcţie convexă continuă şi* $g : D_2 \to R$ *o funcţie concavă, unde* D_1 *şi* D_2 *sînt deschise, cu* $D_1 \cap D_2 \neq \emptyset$; *atunci are loc*

(10) $$\inf \{f(x) - g(x)\} = \max \{g^* (x^*) - f^* (x^*)\}.$$

Demonstraţie. Atragem atenţia că în (10) max înseamnă un suprem care este atins şi că f, g, f^*, g^* sînt extinse ca în observaţia 1.1.

Din definiţia funcţiilor conjugate, rezultă imediat :

(11) $$f(x) - g(x) \geqslant g^* (x^*) - f^*(x^*)$$

pentru orice $x \in D_1 \cap D_2$ şi $x^* \in D_1^* \cap D^*_2$.

Pentru $x_0 \in D_1 \cap D_2$, avem :

$$+ \infty > f(x_0) - g(x_0) \geqslant \inf_{x \in D_1 \cap D_2} (f(x) - g(x)) = \alpha.$$

Dacă $\alpha = -\infty$, din (11) rezultă imediat (10) şi prin urmare putem presupune $\alpha \in R$. Fie

$$\mathfrak{D}_1 = \{(x,t) / x \in D_1, \ t > f(x)\}$$

şi

$$\mathfrak{D}_2 = \{(x, t)/ x \in D_2, \ t < g(x) + \alpha\}.$$

Mulţimile $\mathfrak{D}_1$ şi $\mathfrak{D}_2$ sînt convexe şi disjuncte iar $\mathfrak{D}_1$ este deschisă, f fiind continuă ; atunci ele pot fi separate printr-un hiperplan în $X \oplus R$ care este nevertical, pentru că în caz contrar proiecţia sa pe X ar separa mulţimile D_1 şi D_2. Fie $< x_0^*, x > - \beta = t$, $\beta \neq 0$ ecuaţia acestui hiperplan, care poate fi luată astfel încît să avem :

(12) $$f(x) \geqslant < x_0^*, x > - \beta \qquad \forall x \in D_1$$

(13) $$< x_0^*, x > - \beta \geqslant g(x) + \alpha, \quad \forall x \in D_2.$$

Dar (12) şi (13) implică:

(14) $$\beta \geqslant f(x_0) \text{ şi } g^*(x_0^*) \geqslant \alpha + \beta$$

Atunci, din 11) şi 14), obţinem:

$$\alpha = (\alpha + \beta) \leqslant g^*(x_0^*) - f^*(x_0^*) \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{x^* \in D_1^* \cap D_2^*} (g^*(x^*) - f^*(x^*)) \leqslant \inf_{x \in D_1 \cap D_2} (f(x) - g(x)) = \alpha$$

adică exact (10).

Încheiem prin următorul rezultat important:

TEOREMA 1.6. *Fie f_1 şi f_2 două funcţii convexe pe D_1 respectiv D_2, mulţimi deschise şi convexe cu $D_1 \cap D_2 \neq \emptyset$; dacă f_1 este continuă, atunci:*

a) $(f_1 + f_2)^*(x^*) = \min\limits_{z^* \in X^*} \{(f_1^*(x^* - z^*) + f_2^*(z^*)\}$

b) $\partial(f_1 + f_2)(x) = \partial f_1(x) + \partial f_2(x)$.

Demonstrație. a) Fie $x^* \in D(f_1 + f_2)^*$ şi fie $f(x) = f_2(x)$

$g(x) = < x^*, x > - f_1(x)$; atunci g e concavă şi

$$f^*(z^*) = f_2^*(z^*) \text{ şi } g^*(z^*) = \inf_{x \in D_1} \{< z^*, x > - < x^*, x > + f_1(x)\} =$$

$$= - \sup_{x \in D_1} (< x^* - z^*, x > - f_1(x)) = - f_1^*(x^* - z^*).$$

Aplicăm teorema precedentă funcţiilor f şi g şi astfel:

(15) $$\inf_{x \in D_1 \cap D_2} [f_1(x) + f_2(x) - < x,^*, x >] =$$

$$= \max_{z^*} \{-f_1^*(x^* - z^*) - f_2^*(z^*)\} = - \min_{z^*} \{f_1(x - z) + f_2(z)\}.$$

Dar:

$$\inf_{x \in D_1 \cap D_2} [(f_1(x) + f_2(x) - < x^*, x >] = -(f_1 + f_2)^*(x^*)$$

şi prin urmare a rezultat a). Observăm că şi aici min înseamnă un infim care este atins.

b) Avem de arătat următorul fapt:

$x^* \in \partial(f_1 + f_2)(x)$ dacă şi numai dacă există $z_0^* \in X^*$ astfel încît $x^* - z_0^* \in \partial f_1(x)$ şi $z_0^* \in \partial f_2(x)$.

Fie z_0^* punctul din X^* în care minimul este atins. Teorema 1.4 ne spune că $x^* \in \partial(f_1 + f_2)(x)$ dacă şi numai dacă $x^* \in D_0^* \cap D_2^*$ şi

$$f_1(x) + f_2(x) + (f_1 + f_2)^*(x^*)(x) = < x^*, x >,$$

deci dacă şi numai dacă

$$(16)\qquad f_1(x) + f_2(x) + f_1^*(x^* - z_0^*) + f_2^*(z_0^*) = < x^*, x > = \\ = < x^* - z^*, x > + < z^*, x >.$$

Dar (16) este echivalentă cu

$$f_1(x) + f_1^*(x^* - z_0^*) = < x^* - z_0^*, x >$$

şi

$$f_2(x) + f_2^*(z_0^*) = < z_0^*, x >$$

şi deci cu faptul că $x^* - z_0^* \in \partial f_1(x)$ şi $z_0^* \in \partial f_2(x)$.

q.e.d.

Fie $K \subset X$, se numeşte *funcţie indicatoare a lui K*

$$\delta_k(x) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } x \in K \\ +\infty & \text{dacă } x \notin K. \end{cases}$$

Se observă uşor că δ_k este convexă dacă şi numai dacă mulţimea K este convexă iar

$$\delta_K^*(x^*) = \sup_{x \in K} < x^*, x > = \sup < x^*, K >$$

se numeşte *funcţie suport a lui K*.

DEFINIŢIA 1.7. *Se numeşte a doua conjugată a unei funcţii $f : D \to \mathbf{R}$, funcţia $f^{**} : D^{**} \to \mathbf{R}$ definită prin*

$$f^{**}(x) = \sup_{x^* \in D^*} (<x^*, x> - f^*(x^*))$$

$$\text{şi } D^{**} = \{x \in X / \sup_{x^* \in D^*} (< x^*, x > - f^* (x)^* < +\infty\}.$$

TEOREMA 1.7. *Fie $f : D \to R$; avem $f^{**} \leqslant f$ şi $D^{**} \subset \overline{conv\ D}$* (închiderea anvelopei convexe a lui D) *dacă f^{**} este proprie.*

Demonstraţie. Inegalitatea $f^{**} \leqslant f$ este o consecinţă a inegalităţii evidente : $< x^*, x > \leqslant f(x) + f^* (x^*)$.

Să presupunem că $x_0 \in D^{**}$ şi $x_0 \notin \overline{\text{conv } D}$; fie $x_0^* \in X^*$ astfel încît :

$$< x_0^*, x_0 > > \sup < x_0^*, \overline{\text{conv } D} > = \sup < x_0^*, D >.$$

Cum f^{**} este proprie, există $x_1^* \in X^*$ cu $|f^* (x_1^*)| < +\infty$; dacă $t > 0$, atunci :

$$f^*(x_1^* + tx_0^*) = \sup_{x \in D} \{ < x_1^* + tx_0^*, x > - f(x)\} \leqslant$$

$$\leqslant f^*(x_1^*) + t \sup < x_0^*, D >$$

şi deci

$$f^{**}(x_0) \geqslant < x_1^* + tx_0^*, x_0 > - f^* (x_1^* + tx_0^*) \geqslant$$

$$\geqslant < x_1^*, x_0 > - f^*(x_1^*) + t(< x_0^*, x_0^* > - \sup < x_0^*, D >)$$

care este nemărginit cînd $t \to +\infty$, ceea ce nu se poate.

q.e.d.

TEOREMA 1.8. *Fie $f : D \to \mathbf{R}$; atunci $f^{**} = f \Leftrightarrow f$ este o funcţie convexă inferior semicontinuă.*

Demonstraţie. Dacă $f = f^{**}$, atunci f este slab inferior semicontinuă, ca supremum de funcţii slab continue liniare ; deci este inferior semicontinuă.

Invers, fie f convexă, inferior semicontinuă; atunci după propoziţia 1.11 şi corolarul propoziţiei 1.10 rezultă că există f^{**}, deci putem aplica teorema precedentă pentru a obţine:

$$D \subset D^{**} \subset \overline{\mathrm{conv}\, D}. \tag{17}$$

Să presupunem că există $x_0 \in D^{**}$ cu $f^{**}(x_0) < f(x_0)$, atunci $(x_0, f^{**}(x_0)) \notin \mathrm{Epi}\, f$; există deci $x_0^* \in X^*$ şi $t_0 \in \mathbf{R}$ astfel încît:

$$t_0 f^{**}(x_0) + < x_0^*, x_0 > > \sup_{(x,t) \in \mathrm{Epi}\, f} (t_0 t + < x_0^*, x >).$$

Aceasta înseamnă că $t_0 \neq 0$ căci altfel (17) este contrazisă. Putem presupune $t_0 = -1$ şi atunci pentru $x \in D$, supremul este atins cînd

$$t = f(x).$$

Dar atunci:

$$< x_0^*, x_0 > - f^{**}(x_0^*) > \sup_{x \in D} \{< x_0^*, x > - f(x) >\} = f^*(x_0^*)$$

ceea ce contrazice definiţia lui f^*.

TEOREMA 1.9. *Fie* $f : D \to X$ convexă; atunci

$$f'_+ (x_0, \cdot\,)^* = \delta_{\partial f(x_0)}, \quad \forall x_0 \in X$$

Demonstraţie. Fie pentru $t > 0$, $F_t(x) = \dfrac{f(x_0 + tx) - f(x_0)}{t}$

Avem: $F_t^*(x^*) = \dfrac{f(x_0) + f^*(x^*) - < x^*, x_0 >}{t}$

şi deci $F_t^*(x^*) \geqslant 0$. Prin urmare

$$f'_+ (x_0, \cdot)^* = (\inf_t F_t)^* = \sup_t F_t^* = \sup_t \frac{f(x_0) + f^*(x^*) - < x^*, x_0 >}{t} = \\ = \delta_{\partial f(x_0)}$$

unde ultima egalitate este o consecinţă a teoremei 1.4.

q.e.d.

Referinţe. Pentru studiul funcţiilor convexe pe un interval trimitem la N. Bourbaki [15].

Noţiunea de subgradient a fost studiată recent de către G. Minty [117], [119], A. Brondsted — R.T. Rockafellar [25], R.T. Rockafellar [154] [156] [157] [158], J. Moreau [128], [129], U. Mosco [132], [133].

Rezultatele privind funcţiile convexe conjugate sînt luate din A. Brondsted [24] şi R.T. Rockefeller [153]; recomandăm şi cursul lui J. Moreau [130].

Pentru studiul funcţiilor convexe mai recomandăm pe J. Kachurovski [90], M. Vainberg [175] şi R. Holmes [85].

§ 2. DERIVABILITATEA NORMEI ÎN SPAŢII BANACH

În orice spaţiu Banach X, funcţia $f(x)=\|x\|$ este o funcţie convexă continuă, deci are în orice punct x_0 un subgradient; ne interesează să găsim condiţii necesare şi suficiente pentru ca acest subgradient să fie unic, deci pentru ca funcţia normă să fie diferenţiabilă Gateaux.

PROPOZIŢIA 2.1. *Fie* $f(x)=\|x\|$; $x_0^* \in X^*$ *este subgradient în* $x_0 \neq 0$ *pentru* f *dacă şi numai dacă*

$$\|x_0^*\| = 1 \quad \text{şi} \quad <x_0^*, x_0> = \|x_0\|. \tag{1}$$

Demonstraţie. Fie $x_0^* \in X^*$ subgradient al lui f în $x_0 \neq 0$; atunci are loc :

$$\|x\| - \|x_0\| \geqslant < x_0^*, x - x_0 >, \ \forall x \in X, \tag{2}$$

deci $< x_0^*, x - x_0 > \leqslant \|x - x_0\|$, ceea ce înseamnă că $\|x_0^*\| \leqslant 1$. Pe de altă parte făcînd în (2) $x = 0$, obţinem : $<x_0^*, x_0> \geqslant \|x_0\|$, de unde $\|x_0^*\| \geqslant 1$.

Astfel am găsit $\|x_0^*\| = 1$ şi $<x_0^*, x_0> = x_0$. Invers, dacă are loc (1), atunci :

$$< x_0^*, x - x_0 > = < x_0^*, x > - \|x_0\| \leqslant \|x\| - \|x_0\|.$$

q.e.d.

DEFINIȚIA 2.1. *Un spațiu Banach X se numește neted dacă pentru orice $x \in X \setminus \{0\}$, există o funcțională unică $x^* \in X^*$, astfel încît*

$$\|x^*\| = 1 \text{ şi } \langle x^*, x\rangle = \|x\|.$$

Ţinînd cont de teorema 1.3, §1 şi propoziţia precedentă, am obţinut deci:

TEOREMA 2.1. *Fie X un spațiu Banach; pentru ca norma să fie diferențiabilă Gateaux pe X, este necesar și suficient ca spațiul să fie neted.*

Vom da următoarea formă geometrică a acestui rezultat:

TEOREMA 2.2. *Fie X un spațiu Banach; pentru ca norma să fie diferențiabilă Gateaux în $x_0 \neq 0$, este necesar și suficient ca prin x_0 să treacă un hiperplan de sprijin unic la sfera $S_{\|x_0\|} = \{x / \|x\| \leqslant \|x_0\|\}$; ecuația acestui hiperplan este*

$$Df(x_0, x) - \|x_0\| = 0$$

Demonstrație. Dacă x_0^* este un subgradient în $x_0 \neq 0$ pentru $f(x) = \|x\|$, atunci pentru $x \in S_{\|x_0\|}$ rezultă din (1);

$$\langle x_0^*, x\rangle \leqslant \langle x_0^*, x_0\rangle, \tag{3}$$

ceea ce înseamnă că $\langle x_0^*, x\rangle = \langle x_0^*, x_0\rangle$ definește un hiperplan de sprijin în x_0 la sfera $S_{\|x_0\|}$.

Invers, dacă $x_0^* \in X^*$ definește un hiperplan astfel încît $\|x_0^*\| = 1$ și (3) să aibă loc, rezultă că pentru orice $\varepsilon > 0$, există x_ε, astfel încît

$$\langle x_0^*, x_\varepsilon\rangle \geqslant 1 - \varepsilon, \text{ şi } \|x_\varepsilon\| = 1$$

făcînd în (3) $x = \|x_0\| x_\varepsilon$, obținem:

$$\|x_0\| \langle x_0^*, x_\varepsilon\rangle \leqslant \langle x_0^*, x_0\rangle,$$

de unde $\|x_0\|(1 - \varepsilon) \leqslant \langle x_0^*, x_0\rangle \ \forall \varepsilon > 0$.

Prin urmare $\|x_0\| \leqslant \langle x_0^*, x_0\rangle$ și deci $\|x_0\| = \langle x_0^*, x_0\rangle$. Atunci, după propoziția precedentă x_0^* este subgradient în x_0 pentru funcția normă.

Acum teorema rezultă deoarece unicitatea subgradientului implică diferențiabilitatea normei și reciproc; evident $x_0^* = Df(x_0, \cdot)$

q.e.d.

Vom trece la studiul spațiilor în care norma este diferențiabilă Fréchet sau uniform diferențiabilă Fréchet; se spune că $f(x)=\|x\|$ este uniform diferențiabilă Fréchet dacă $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta(\varepsilon)>0$ astfel încît pentru $\|h\|\leqslant\delta$ și orice x cu $\|x\|\leqslant 1$, să avem:

$$(4)\qquad \big|\, \|x+h\|-\|x\|-Df(x,h)\big| \leqslant \varepsilon\|h\|.$$

Are loc

PROPOZIȚIA 2.2. *Funcția $f(x)=\|x\|$ este uniform diferențiabilă Fréchet dacă și numai dacă este diferențiabilă Fréchet iar derivata Fréchet este uniform continuă pe sfera unitate.*

Demonstrație. Fie $f=\|x\|$ uniform diferențiabilă Fréchet; atunci, pentru $\|x-y\|\leqslant\delta\varepsilon$ și $\|x\|,\ \|y\|\leqslant 1$ obținem:

$$\|Df(x,.)-Df(y,.)\| = \sup_{\|h\|\leqslant 1}\frac{1}{\delta}\,|Df(x,\delta h)-Df(y,\delta h)| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{\|h\|\leqslant 1}\frac{1}{\delta}\Big|Df(x,\delta h)+\|x\|-\|x+\delta h\|\Big| + \sup_{\|h\|\leqslant 1}\frac{1}{\delta}\Big|\,\|y+\delta h\|-\|y\|-$$

$$-Df(y,\delta h)\Big| + \frac{1}{\delta}\Big|\,\|x+\delta h\|-\|y+\delta h\|\Big| + \frac{1}{\delta}\Big|\,\|x\|-\|y\|\,\Big| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{\|h\|\leqslant 1}\frac{1}{\delta}\,(2\varepsilon\|\delta h\|+2\varepsilon\delta)\leqslant 4\varepsilon$$

Invers, dacă f are diferențiala Fréchet uniform continuă pe sfera unitate, din teorema lui Lagrange [109] găsim:

$$\|x+h\|-\|x\|=Df(x+\theta h,h)\qquad 0<\theta<1.$$

și astfel:

$$\big|\,\|x+h\|-\|x\|-Df(x,h)\big| = |Df(x+\theta h,h)-Df(x,h)| \leqslant$$

$$\leqslant \left\|Df\left(x+\theta h,\frac{h}{\|h\|}\right)-Df\left(x,\frac{h}{\|h\|}\right)\right\|\cdot\|h\|\leqslant\varepsilon\|h\|$$

dacă $\|h\|<\delta$ (din uniform continuitate).

q.e.d.

DEFINIȚIA 2.1. *Un spațiu Banach X se numește uniform neted dacă* $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, *astfel încît pentru*

(5) $\quad \|x\| = 1$ și $\|h\| \leqslant \delta$ să avem $\|x+h\| + \|x-h\| \leqslant 2 + \varepsilon \|h\|$

Un spațiu Banach X se numește uniform neted în punctul x, dacă $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta(x) > 0$, *astfel încît pentru* $\|h\| < \delta(x)$ *să avem* $\|x+h\| + \|x-h\| \leqslant 2 + \|h\|$.

Un spațiu Banach X se numește local uniform neted dacă este uniform neted în orice punct $x \in X$.

Într-un spațiu Banach X se introduc:

$$\rho_X(\tau) = \frac{1}{2} \sup_{\|x\| = \|h\| = 1} (\|x + \tau h\| + \|x - \tau h\| - 2) \quad \tau \geqslant 0$$

$$\rho_X(\tau, x) = \frac{1}{2} \sup_{\|x\| = 1} (\|x + \tau h\| + \|x - \tau h\| - 2) \quad \tau \geqslant 0.$$

$\rho_X(\tau)$ se numește modulul de netezime al spațiului iar $\rho_X(\tau, x)$, modulul de netezime în punctul x.

Observăm că pentru $\tau > 0$ $\rho_x(\tau) \geqslant 0$, deoarece

$$\frac{\|x - \tau h\| - \|x\|}{-\tau} \leqslant \frac{\|x + \tau h\| - \|x\|}{\tau}.$$

PROPOZIȚIA 2.3. *Un spațiu Banach este uniform neted (respectiv local uniform neted) dacă și numai dacă*

$$\lim_{\tau \to 0} \frac{\rho_X(\tau)}{\tau} = 0 \text{ (resp. } \lim_{\tau \to 0} \frac{\rho_X(\tau, x)}{\tau} = 0).$$

Demonstrație. Fie X uniform neted; atunci $\forall \varepsilon > 0$, există $\delta(\varepsilon)$ încît pentru $0 < \tau < \delta(\varepsilon)$ și $\|x\| = \|h\| = 1$, să avem:

$$\|x + \tau h\| + \|x - \tau h\| \leqslant 2 + \varepsilon \tau,$$

$$\text{deci } \frac{\rho_X(\tau)}{\tau} \leqslant \varepsilon \text{ pentru } \tau \leqslant \delta(\varepsilon).$$

Fie acum $\lim\limits_{\tau\to 0}\frac{\rho_X(\tau)}{\tau}$ şi $\varepsilon>0$, există $\delta(\varepsilon)$ astfel încît $\rho_X(\tau)\leqslant$ $\leqslant\varepsilon\tau$ pentru $0\leqslant\tau\leqslant\delta$. Prin urmare, pentru $\|x\|=1$ şi $\|h\|\leqslant\delta$, avem :

$$\|x+h\|+\|x-h\|-2\leqslant\varepsilon\|y\|,$$

deci X este uniform neted. Analog se tratează şi cazul local uniform neted.

q.e.d.

TEOREMA 2.3. a) *Într-un spaţiu Banach X norma este diferenţiabilă Fréchet dacă şi numai dacă X este local uniform neted ;*

b) *Înrr-un spaţiu Banach X norma este uniform diferenţiabilă Fréchet dacă şi numai dacă X este uniform neted.*

Demonstraţie. a) Să presupunem că norma este diferenţiabilă Fréchet şi fie $x\in X$ cu $\|x\|=1$; atunci avem pentru orice $h\in X$ şi $\tau\geqslant 0$:

$$\frac{\|x-\tau h\|-\|x\|}{-\tau}\leqslant Df(x,h)\leqslant\frac{\|x+\tau h\|-\|x\|}{\tau}\tag{6}$$

deci pentru $\|h\|=1$ şi $\tau\leqslant\delta(\varepsilon,x)$ (corespunzător lui ε, la diferenţiabilitatea Fréchet)

$$\|x+\tau h\|+\|x-\tau h\|-2\leqslant(\|x+\tau h\|-\|x\|-Df(x,h))+$$
$$+(\|x-\tau h\|-\|x\|-Df(x,-\tau h)\leqslant 2\,\varepsilon\tau$$

deci spaţiul este uniform neted în x.

Invers, fie X local uniform neted şi fie x cu $\|x\|=1$, pentru $\varepsilon>0$, există $\delta(\varepsilon,x)$, astfel încît

$$\|x+\tau h\|+\|x-\tau h\|\leqslant 2+\varepsilon\,\tau,\forall\|h\|=1\qquad 0<\tau\leqslant\delta.$$

Pentru $f(x)=\|x\|$există derivatele direcţionale $f'_+(x,h)$ şi $f'_-(x,h)$ şi are loc;

$$\frac{\|x-\tau h\|-\|x\|}{-\tau}\leqslant f'_-(x,h)\leqslant f'_+(x,h)\leqslant\frac{\|x+\tau h\|-\|x\|}{\tau}$$

şi deci :

$$f'_+(x,h) - f'(x,h) \leqslant \frac{\|x+\tau h\| + \|x-\tau h\| - 2}{\tau} \leqslant \frac{\varepsilon\tau}{\tau} = \varepsilon$$

Prin urmare $f'_+(x,h) = f'_-(x,h) = Df(x,h)$.
În plus din (6) rezultă, făcînd $\tau = 1$:

$$\|x+h\| - \|x\| - Df(x,h) \leqslant \|x+h\| + \|x-h\| - 2 \leqslant \varepsilon\|h\|$$

pentru orice $\|h\| \leqslant \delta(\varepsilon, x)$, deci f este diferenţiabilă Fréchet.

b) Se procedează analog, observîndu-se peste tot că δ nu depinde decît de ε şi nu şi de punctul x.

q.e.d.

COROLAR. *Orice spaţiu Banach local uniform neted este neted.*

Referinţe. Rezultatele prezentate aici pot fi găsite, parţial în G. Köthe [102]. Studiul proprietăţilor spaţiilor Banach, legate de proprietăţile de diferenţiabilitate ale normei a fost iniţiat de Mazur [114], V.L. Smulian [166] şi continuat de G. Köthe, I. Lindenstrauss [104], M. Day [60]—[64], D.F. Cudia [55] [56], G. Godini [75]. Modulele de netezime introduse s-au dovedit a fi utile în studierea spaţiilor uniform convexe, ele fiind, cum vom vedea, dualele modulelor de convexitate pe X^*.

§ 3. APLICAŢII DE DUALITATE

Fie T o aplicaţie de la un spaţiu Banach X în dualul său X^* satisfăcînd următoarele două condiţii :

I) $$\langle Tx, x\rangle = \|Tx\| \, \|x\| \qquad \forall x \in X.$$

II) Există o funcţie crescătoare $\varphi : R_+ \to R_+$ astfel încît

$$\varphi(\|x\| - 0) \leqslant \|Tx\| \leqslant \varphi(\|x\| + 0)$$

unde s-a pus $\varphi(0-0) = 0$.

Fie funcția :

(1) $$\psi(t) = \int_0^t \varphi(u)\mathrm{d}u$$

primitiva funcției φ introdusă mai sus; ψ este o funcție convexă (lema 1.2), pozitivă, crescătoare și continuă.

Avem următoarea teoremă a lui E. Asplund [3]:

TEOREMA 3.1. *O aplicație $T : X \to X^*$ verifică condițiile I) și II) relativ la o funcție φ dacă și numai dacă pentru orice $x_0 \in X$, Tx_0 este subgradient al funcției $\psi(\|x\|)$ în punctul x_0, adică:*

(2) $$\psi(\|x\|) - \psi(\|x_0\|) \geqslant \langle Tx_0, x - x_0 \rangle, \ \forall x \in X.$$

Demonstrație. Să presupunem că T verifică (2) și fie $x \in X$, astfel încît $\|x\| = \|x_0\|$; atunci:

$$\langle Tx_0, x \rangle \leqslant \langle Tx_0, x \rangle$$

și deci

$$\|Tx_0\| \ \|x_0\| \leqslant \langle Tx_0, x_0 \rangle.$$

Inegalitatea inversă are loc întotdeauna și deci T verifică (I).

Să luăm acum în (2) $x = ty$ și $x_0 = t_0 y$ cu $\|y\| = 1$, cu $t, t_0 \in R_+$; avem:

$$\psi(t) - \psi(t_0) \geqslant \frac{t - t_0}{t_0} \langle T(t_0 y), t_0 y \rangle = (t - t_0) \|T(t_0 y)\|$$

de unde rezultă, dacă $t > t_0$ (resp. $t < t_0$):

$$\|T(t_0 y)\| \leqslant \varphi(t_0 + 0) \quad (\text{resp } \|T(t_0 y)\| \geqslant \varphi(t_0 - 0))$$

adică T verifică și (II).

Să presupunem acum că T verifică (I) și (II) și fie $x, x_0 \in X$ cu $\|x\| > \|x_0\|$; avem, utilizînd (II) și lema 1.1:

$$\|Tx_0\| \leqslant \varphi(\|x_0\| + 0) = \psi'_+(\|x_0\|) \leqslant \frac{\psi(\|x\|) - \psi(\|x_0\|)}{\|x\| - \|x_0\|}$$

și prin urmare:

$$\psi(\|x\|) - \psi(\|x_0\|) \geqslant \|Tx_0\| (\|x\| - \|x_0\|) \geqslant \langle Tx_0, x - x_0 \rangle$$

(unde în ultima inegalitate s-a utilizat (I)).

Analog se arată că această inegalitate are loc şi pentru $\|x\| < < \|x_0\|$.

q.e.d.

Această teoremă, ne permite, printre altele, să dăm următorul rezultat al lui Beurling — Livingston :

TEOREMA 3.2. *Fie* $\varphi : R_+ \to R_+$ *o funcţie crescătoare cu convenţia* $\varphi(0-0) = 0$ *şi* $\lim\limits_{t\to+\infty} \varphi(t) = +\infty$ *şi* Y *un subspaţiu reflexiv al lui* X. *Fie* $Y^\perp$ *anulatorul lui* Y *în* X^*, $z_0 \in X$ *şi* $z_0^* \in X^*$ *daţi ; atunci există o aplicaţie* $T : X \to X^*$ *satisfăcînd* (I) *şi* (II), *astfel încît*

$$T(Y + z_0) \cap (Y^\perp + z^*) = \emptyset.$$

Demonstraţie. Fie funcţia convexă

$$f(x) = \psi(\|x + z_0\|) - < z_0^*, x >$$

restrînsă la Y şi fie $M > 0$ astfel încît

$$\varphi\left(\frac{\|x\| - \|z_0\|}{2}\right) \geqslant 2\,(\|z_0^*\| + 1) \text{ pentru } \|x\| > M;$$

atunci, pentru orice $x \in Y$ cu $\|x\| > M$, avem :

$$f(x) \geqslant \psi\,(\|x + z_0\|) - \|z_0^*\|\,\|x\| \geqslant$$

$$\geqslant (\|x\| - \|x_0\|) - \|z_0^*\|\ \|x\| \geqslant \int_{\frac{\|x\| - \|x_0\|}{2}}^{\|x\| - \|z_0\|} \varphi(u)\,du - \|z_0^*\|\,\|x\| \geqslant$$

$$\geqslant \varphi\left(\frac{\|x\| - \|z_0\|}{2}\right) \cdot \frac{\|x\| - \|z_0\|}{2} - \|z_0^*\|\ \|x\| \geqslant$$

$$2\ (\|z_0^*\| + 1)\,\frac{\|x\| - \|z_0\|}{2} - \|z_0^*\|\,\|x\| =$$

$$= \|x\| - (\|z_0^*\| + 1)\|z_0\|.$$

Astfel $\lim\limits_{\|x\|\to+\infty} f(x) = +\infty$; atunci f, care este slab inferior semicontinuă, își atinge minimul într-un punct $y_0 \in Y$. Într-adevăr, fie $x_0 \in Y$; există $C > 0$ astfel încît $f(y) > f(x_0)$ pentru $\|y\| > C$; dacă punem $K = \{y \in Y / \|y\| \leqslant C\}$, K este o mulțime slab compactă în Y și deci f își atinge minimul pe K într-un punct $y_0 \in K$; atunci:

$$f(y_0) \leqslant f(x_0) \leqslant f(y) \ \forall y \in Y.$$

Vom arăta în continuare că funcția f, definită fie întreg X, are în y_0 un subgradient în $Y^{\perp}$.

Fie $K_0 = \mathrm{Epi}\,(f - f(y_0)) = \{(x, t)/t > f(x) - f(y)\}$ și $K_1 = Y \oplus \{0\}$; cum $K_0 \cap K_1 = \varnothing$, există un hiperplan H astfel încît $H \supset Y \oplus \{0\}$ și $H \cap K_0 = \varnothing$; atunci putem alege ecuația acestui hiperplan: $x^* = x_0^* + \alpha = 0$, cu $x_0^* \in X^*$ și $\alpha \in R$, astfel încît $\alpha \neq 0$ și $x^* > 0$ pe K_0.

Pentru orice $y \in Y$, avem:

$$< x_0^*, y > = x(y \oplus 0) = 0, \ \text{deci} \ x_0^* \in Y^{\perp}.$$

Rămîne să arătăm că $y_0^* = -\dfrac{x_0^*}{\alpha} \in \partial f(y_0)$; într-adevăr, dacă $\varepsilon > 0$, atunci $(x^*, f(x) - f(y_0) + \varepsilon) \in K_0$, $\forall x \in X$ și deci

$$< x_0^*, x > + \alpha(f(x) - f(y_0)) + \alpha\varepsilon > 0.$$

În particular, pentru $x = y_0$, rezultă $\alpha > 0$ și făcînd $\varepsilon \to 0$, obținem:

$$f(x) - f(y) \geqslant < -\frac{x_0^*}{\alpha}, x > = < -\frac{x_0^*}{\alpha}, x - y_0>$$

Fie $T' : X \to X^*$ aplicația care face să corespundă la orice $x \in X$, $x \neq y$, un subgradient x^* al lui f în acest punct iar $T'(y_0) = y_0^*$; avem:

$$f(y) - f(x) \geqslant < T'(x), y - x >, \forall y \in X,$$

de unde:

$$\psi(\|y + z_0\|) \geqslant \psi(\|x + z_0\|) + < T'(x) + z_0^*, y - x >.$$

Dacă punem $Tx = T'(x - z_0) + z_0^*$, rezultă :

$$\psi(\|y\|) - \psi(\|x\|) \geqslant < T(x), y - x >, \forall y \in Y$$

şi prin urmare $T(x)$ este subgradient în x pentru funcţia $\psi(\|x\|)$, $\forall x \in X$. După teorema 3.1, rezultă că $T : X \to X^*$ definit ca mai sus verifică condiţiile (I) şi (II) şi în plus : $T(y_0 + z_0) - z_0^* \in Y^{\perp}$.

q.e.d.

DEFINIŢIA 3.1. *Se numeşte funcţie pondere o funcţie* $\varphi : R^+ \to R^+$, *continuă, strict crescătoare, astfel încît* : $\varphi(0) = 0$ şi $\lim\limits_{t \to +\infty} \varphi(t) = +\infty$.

Un exemplu simplu de funcţie pondere este $\varphi(t) = t^p$, $p \geqslant 1$.

DEFINIŢIA 3.2. *Se numeşte aplicaţie de dualitate pe X cu pondere* φ, *o aplicaţie* $\mathfrak{I} : X \to 2^{X^*}$ *astfel încît* :

$$\mathfrak{I}x = \{x^* \in X^* / < x^*, x > = \|x^*\| \, \|x\|, \|x^*\| = \varphi(\|x\|)\}.$$

Aplicaţia de dualitate cu ponderea $\varphi(t) = t$ se va numi *aplicaţie de dualitate normalizată.*

În acest caz :

$$x^* \in \mathfrak{I}x \Leftrightarrow < x^*, x > = \|x\|^2 = \|x^*\|^2.$$

Observaţia 3.1. O primă constatare este faptul că pentru orice $x \in X$, $\mathfrak{I}\, x$ este definit, adică mulţimea $\mathfrak{I}\, x \neq \emptyset$.

Într-adevăr, dacă L este subspaţiul l-dimensional generat de $x_0 \in X$, fixat, putem defini funcţionala liniară τ pe L, astfel :

$$\tau(x_0) = \varphi(\|x_0\|)\|x_0\| \quad \text{şi} \quad \tau(x) = \lambda\tau(x_0) \quad \text{pentru} \quad x = \lambda x_0 ;$$

Avem : $\|\tau\| = \varphi(\|x\|)$; după teorema lui Hahn-Banach, putem extinde funcţionala τ la o funcţională $x_0^* \in X^*$, cu aceeaşi normă. O astfel de extensie nu e în general unică şi $\mathfrak{I}\, x_0$ este evident mulţimea acestor extensii.

Observaţia 3.2. Vom numi secţiune a unei aplicaţii de dualitate o aplicaţie univocă

$$\tilde{\mathfrak{I}} : X \to X^*, \text{ astfel încît } \tilde{\mathfrak{I}}\, x \in \mathfrak{I}\, x, \ \forall x \in X.$$

Orice astfel de secțiune este o aplicație verificînd condițiile (I) și (II); atunci teorema 3.1 ne spune că mulțimea $\mathcal{J}x$ coincide cu mulțimea $\partial\psi(\|x\|)$, adică cu mulțimea subgradienților în x ai funcției convexe $\psi(\|x\|)$, cu ψ dat de (1). Astfel, ori de cîte ori această mulțime se reduce la un singur punct, ceea ce revine la faptul că atît ψ cît și funcția normă pe X să fie diferențiabile, $\mathcal{J}$ este univocă (coincide cu toate secțiunile sale).

În plus, teorema 3.1 a lui Asplund ne permite să calculăm practic în acest caz aplicația de dualitate. Vom ilustra aceasta cu un exemplu simplu, urmînd ca altele să fie date ulterior.

Fie X un spațiu Hilbert; știm că în acest caz norma este diferențiabilă Gateux.

Fie $\varphi(t) = t$ și $\psi(t) = \dfrac{t^2}{2}$; avem:

$$<\mathcal{J}x_0, x> = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} <x_0 + tx, x_0 + tx>|_{t=0} =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\|x_0\|^2 + 2t<x_0, x> + t^2\|x\|^2)|_{t=0} = <x_0, x>.$$

Prin urmare reținem că în spații Hilbert aplicația de dualitate normalizată este operatorul identic.

Observația 3.3. Fie $x_0^* \in \mathcal{J}x_0$; avem următoarea interpretare geometrică; dacă notăm prin

$$H = \{x / <x_0^*, x> = \varphi(\|x_0\|)\|x_0\|\},$$

aceasta este un hiperplan de sprijin pentru sfera $S_{\|x_0\|}$; întradevăr, dacă $x \in S_{\|x_0\|}$, atunci avem

$$< \frac{x_0^*}{\varphi(\|x_0)\|x_0\|}, x> \leqslant \frac{\|x_0\|\,\|x\|}{\varphi(\|x_0\|)\|x_0\|} = \frac{\|x\|}{\|x_0\|} \leqslant 1.$$

Înainte de a trece la alte proprietăți ale aplicațiilor de dualitate, dăm :

DEFINIȚIA 3.3. *Vom spune că aplicația* $A : X \to 2^{X^*}$ *este monotonă, dacă :*

$$<x^* - y^*, x - y> \geqslant 0, \ \forall x, y \in X \text{ și } x^* \in Ax, \ y^* \in Ay.$$

Aplicația A este strict monotonă dacă pentru $x \neq y$, *inegalitatea de mai sus este strictă.*

PROPOZIȚIA 3.1. *Fie* $\mathfrak{J}$ *o aplicație de dualitate cu pondere* φ; *atunci au loc :*

a) *Pentru orice* $x \in X$, $\mathfrak{J}\, x$ *este o mulțime nevidă, convexă și închisă în X-topologia pe X și*

$$\mathfrak{J} x = \partial \psi(\| x \|)$$

b) $\mathfrak{J}$ *este o aplicație monotonă*

c) $\mathfrak{J}$ *este o aplicație impară, adică* $\mathfrak{J}(-x) = -\mathfrak{J}\, x, \forall x \in X$

d) $$\mathfrak{J} = \frac{\varphi(\lambda \| x \|)}{\varphi(\| x \|)} \mathfrak{J} x \quad \forall x \in X \text{ și } \lambda > 0;$$

în particular, orice secțiune a unei aplicații de dualitate normalizată este omogenă.

e) *Aplicația de dualitate normalizată este liniară dacă și numai dacă spațiul X este Hilbert.*

f) *Dacă* $x^* \in \mathfrak{J}\, x$, *atunci* $x \in \mathfrak{J}^* x^*$, *unde* $\mathfrak{J}^*$ *este aplicația de dualitate pe* X^* *cu ponderea* φ^{-1}.

g) *Dacă* $\mathfrak{J}$ *și* $\mathfrak{J}_0$ *sînt două aplicații de dualitate cu ponderile* φ *și* φ_0 *respectiv, atunci există o funcție* μ, *cu valori reale nenegative, astfel încît :*

$$\mathfrak{J} x = \mu(\| x \|) \mathfrak{J}_0\, x.$$

Demonstrație. a) Conform observației 3.1, $\mathfrak{J} x \neq \emptyset$ iar conform observației 3.2, $\mathfrak{J} n = \partial \psi(x)$, prin urmare, orice $x^* \in \mathfrak{J}\, x$, verifică

$$\psi(\| y \|) - \psi(\| x \|) \geqslant < x^*, y - x > \quad \forall\, y \in X$$

de unde convexitatea şi închiderea lui $\mathfrak{J}x$ rezultă uşor.

b) Fie $x, y \in X$ şi $x^* \in \mathfrak{J}\, x$, $y^* \in \mathfrak{J}\, y$; avem:

$$< x^* - y^*, x - y > = < x^*, x > + < y^*, y > - < x^*, y > - < y^*, x > \geqslant$$

$$\geqslant \varphi(\|x\|)\|x\| + \varphi(\|y\|)\|y\| - \varphi(\|x\|)\,\|y\| - \varphi(\|y\|)\|x\| =$$

$$= (\varphi(\|x\|) - \varphi(\|y\|))\,(\|x\| - \|y\|) \geqslant 0$$

(datorită faptului că φ este strict crescătoare).

c) Fie $x^* \in \mathfrak{J}x$; să arătăm că $-x^* \in \mathfrak{J}(-x)$.

Avem:

$$< -x^*, -x > = < x^*, x > = \|x^*\|\,\|x\| = \|-x^*\|\,\|-x\|$$

şi

$$\|-x^*\| = \|x^*\| = \varphi(\|x\|) = \varphi(\|-x\|).$$

d) Fie $x^* \in \mathfrak{J}x$; să arătăm că $\dfrac{\varphi(\|x\|)}{\varphi(\|x\|)}\, x^* \in \mathfrak{J}(\lambda\, x)$, $\lambda > 0$.

Avem

$$< \frac{\varphi(\|\lambda\, y\|)}{\varphi(\|x\|)}\, x^*, \lambda\, x > = \frac{\varphi(\|\lambda x\|)}{\varphi(\|x\|)} \cdot \lambda \|x\|\,\|x^*\| = \left\| \frac{\varphi(\|\lambda\, x\|)}{\varphi(\|x\|)}\, x^* \right\| \|\lambda x\|$$

şi

$$\left\| \frac{\varphi(\|\lambda x\|)}{\varphi(\|x\|)}\, x^* \right\| = \frac{\varphi(\|\lambda x\|)}{\varphi(\|x\|)}\, \|x^*\| = \varphi(\|\lambda x\|).$$

Analog se arată şi incluziunea inversă. Ţinînd cont de c) rezultă şi afirmaţia relativ la secţiuni.

e) Fie $\mathfrak{J}$ liniară, $x^* \in \mathfrak{J}\, x$, $y^* \in \mathfrak{J} y$; atunci $x^* + y^* \in \mathfrak{J}\,(x + y)$ şi $x^* - y^* \in \mathfrak{J}\,(x - y)$ şi avem

$$\|x + y\|^2 = <x^* + y^*,\ x + y> = \|x\|^2 + <x^*,\ y> + <y^*,\ x> + \|y\|^2$$

$$\|x - y\|^2 = <x^* - y^*,\ x - y> = \|x\|^2 - <x^*,\ y> - <y^*,\ x> + \|y\|^2.$$

Sumînd, obţinem relaţia:

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\,(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

care caracterizează spaţiile cu produs scalar.

Dacă spaţiul X este Hilbert, am observat deja $\mathfrak{J} = I$ care evident este liniară.

f) Dacă $x^* \in \mathfrak{J}\, x$, atunci:

$$<x^*, x> = \|x^*\|\,\|x\| = \varphi\,(\|x\|)\,\|x\| = \|x^*\|\ \varphi^{-1}\,(\|x^*\|)$$

deci $x \in \mathfrak{J}^* x^*$.

g) E suficient să luăm $\mu\,(t) = \varphi_0(t)/\varphi(t)$

q.e.d.

PROPOZIŢIA 3.2. *Fie* $\mathfrak{J}$ *aplicaţia de dualitate normalizată şi fie* $t \to x(t)$ *o funcţie cu valori în* X *avînd derivată în topologia slabă* $x'(t)$ *şi pentru care* $t \to \|x(t)\|$ *este derivabilă; atunci avem*

$$\|x(t)\|\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\|x(t)\|) = <x^*,\ x'(t)>,\ \forall\, x \in \mathfrak{J}\, x(t). \tag{3}$$

Demonstraţie. Cum $<x^*, x\,(s)> \leqslant \|x(s)\|\ \|x^*\| = \|x(s)\|\ \|x(t)\|$ şi $<x^*, x(t)> = \|x(t)\|^2$, avem:

$$<x^*, x(s) - x(t)> \leqslant \|x(t)\|\ (\|x\,(s)\| - \|x(t)\|). \tag{4}$$

Fie $s > t$; împărțind inegalitatea (4) prin $s-t$ și făcînd $s \to t$, obținem:

$$< x^*, x'(t) > \leqslant \|x(t)\| \frac{d}{dt} \|x(t)\|.$$

Analog, pentru $s < t$, se obține inegalitatea inversă.

q.e.d.

PROPOZIȚIA 3.3. *Fie $x, y \in X$; avem $\|x\| \leqslant \|x + \lambda y\|$, $\forall \lambda > 0$, dacă și numai dacă există $x^* \in \mathfrak{J}x$ astfel încît $< x^*, y > \geqslant 0$, unde $\mathfrak{J}$ este aplicația de dualitate normalizată pe X.*

Demonstrație. Să presupunem că există $x^* \in \mathfrak{J}x$ cu $< x^*, y > \geqslant 0$, putem presupune $x \neq 0$, proprietatea fiind trivială pentru $x = 0$. Atunci

$$\|x\|^2 = < x^*, x > \leqslant < x^*, x > + \lambda < x^*, y > = < x^*, x + \lambda y > \leqslant$$

$$\leqslant \|x^*\| \|x + \lambda y\|, \quad \forall \lambda > 0.$$

Cum $\|x\| = \|x^*\|$, rezultă $\|x\| \leqslant \|x + \lambda y\|$.

Fie invers $\|x\| \leqslant \|x + \lambda y\|$, $\forall \lambda > 0$ și fie $x_\lambda^* \in \mathfrak{J}(x + \lambda y)$ iar $y_\lambda^* = x_\lambda^* / \|x_\lambda^*\|$; atunci $\|y_\lambda^*\| = 1$ și

$$\|x\| \leqslant \|x + \lambda y\| = < x_\lambda^*, x + \lambda y > \frac{1}{\|x_\lambda^*\|} = < y_\lambda^*, x + \lambda y > =$$

$$= < y_\lambda^*, x > + \lambda < y_\lambda^*, y > \leqslant \|x\| + \lambda < y_\lambda^*, y >.$$

De aici rezultă că:

$$\lim_{\lambda \searrow 0} < y_\lambda^*, x > \geqslant \|x\| \text{ și } < y_\lambda^*, y > \geqslant 0.$$

Mulțimea $\{y_\lambda^*\}_\lambda$ are un punct limită $y^* \in X^*$, în X topologia pe X^*; pentru y^* avem: $\|y^*\| \leqslant 1$, $< y^*, x > \geqslant \|x\|$ și $< y^*, y > \geqslant 0$, Cum : $\|x\| \leqslant \langle y^*, x\rangle \leqslant \|x\|\,\|y^*\| \leqslant x\|$, rezultă

$$\langle y^*, x\rangle = \|x\| \text{ şi deci } \|y^*\| = 1.$$

Punînd $x^* = y^*.\|x\|$, atunci $x^* \in \mathfrak{J}\, x$ şi $\langle x^*, y\rangle \geqslant 0$.

q.e.d.

PROPOZIŢIA 3.4. *Fie* $\mathfrak{J}$ *o aplicaţie de dualitate cu ponderea* φ *şi un şir* $x_n \xrightarrow[n]{} x_0$ *şi* $x_n^* \in \mathfrak{J}\, x_n$, $\forall_n \in N$; *atunci există un subşir* $\{x_{n'}^*\} \subset \{x_n^*\}$ *cu* $x_{n'}^* \in \mathfrak{J}\, x_{n'}$ şi $x_0^* \in \mathfrak{J}\, x_0$, *astfel încît* $\langle x_{n'}^*, x_{n'}\rangle \xrightarrow[n']{} \langle x_0^*, x_0\rangle$ şi $\langle x_{n'}^*, x\rangle \xrightarrow[n']{} \langle x_0^*, x\rangle$, $\forall x \in X_0 =$ *subspaţiul liniar generat de* x_1, $x_2, \ldots,$ şi x_0.

Demonstraţie. Orice $x^* \in X^*$ restricţionat la X_0 determină un element din X_0^* ; astfel $\{x_n^*|_{X_0}\}_n$ formează un şir mărginit în X_0^*, unde, X_0 fiind separabil, topologia sferei unitate este compactă şi metrizabilă în X_0 — topologia pe X_0^*.

Atunci există $x_0^* \in X_0$ şi un subşir $\{x_{n'}^*|_{X_0}\}_{n'} \subset \{x_n^*|_{X_0}\}_n$, astfel încît

$$\langle x_{n'}^*\, x_0\rangle \xrightarrow[n']{} \langle x_0^*, x\rangle,\ \forall x \in X_0.$$

Cum

$$\langle x_{n'}^*, x_{n'}\rangle - \langle x_0^*, x_0\rangle = \langle x_{n'}^*, x_{n'}\rangle - \langle x_{n'}^*, x_0\rangle + \langle x_{n'}^*, x_0\rangle - \langle x_0^*, x_0\rangle,$$

cînd $n' \to \infty$, obţinem $\langle x_{n'}^*, x_{n'},\rangle \xrightarrow[n']{} \langle x_0^*, x_0\rangle$.

Prin teorema Hahn-Banach, x_0^* se poate extinde la un element din X^*, pe care îl vom nota la fel. Atunci

$$\|x_0^*\| \leqslant \lim_{n'} \|x_{n'}^*\| = \lim_{n'} \varphi(\|x_{n'}\|) = \varphi(\|x_0\|)$$

deci $\|x_0^*\| \leqslant \varphi(\|x_0\|)$ şi în plus :

$$\langle x_0^*, x_0\rangle = \lim_{n'} \langle x_{n'}^*, x_{n'}\rangle = \lim_{n'} \varphi(\|x_{n'}\|)\|x_{n'}\| = \varphi(\|x_0\|)\|x_0\|$$

ceea ce înseamnă că $\|x_0^*\| = \varphi(\|x_0\|)$, deci $x_0^* \in \mathfrak{J}\, x$.

q.e.d.

DEFINIȚIA 3.4. *Vom spune că o aplicație* $A : X \to 2^{X^*}$ *este superior semicontinuă într-un punct* $x_0 \in X$, *dacă pentru orice vecinătate* V *a lui* Ax_0, *există o vecinătate* U *a lui* x_0, *astfel încît* $A(U) \subset V$.

Observăm că dacă aplicația A este univocă, atunci definiția de mai sus nu înseamnă altceva decît faptul că A este continuă în punctul x_0.

PROPOZIȚIA 3.5. *Aplicația de dualitate* $\daleth$ *cu ponderea* φ *este superior semicontinuă de la* X *cu topologia normei în* 2^{X^*}, *cu* X*-topologia pe* X^*.

Demonstrație. Să presupunem prin absurd că această proprietate nu ar avea loc; există atunci $x_0 \in X$, o vecinătate (în X-topologia pe X^*) V a lui $\daleth x_0$, două șiruri $x_n \to x_0$ și $x_n^* \in \daleth x_n$ pentru care $x_n^* \notin V$, $\forall n \in N$. Fie F_n închiderile în X-topologia pe X^* a mulțimilor $\{x_n^*, x_{n+1}^*, \ldots\}$; avem $F_n \neq \emptyset$ și $F_1 \supset F_2 \ldots$; există atunci $x_0^* \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$. Cum $x_0^* \in F_n$ și $F_n \cap V = \emptyset$, rezultă că $x_0^* \notin V$; în plus, pentru orice $n \in N$, există $x_{n'}^* \in \{x_j\}_{j \in N}$ cu $n' \geqslant n$, astfel încît: $|<x_0^*, x_0> - <x_{n'}^*, x_0>| < \frac{1}{n}$.

Atunci:

$$|<x_0^*, x_0> - \varphi(\|x_{n'}\|)\|x_{n'}\| \; | \leqslant$$

$$\leqslant |<x_0^*, x_0> - <x_{n'}^*, x_0>| + |<x_{n'}^*, x_0> - <x_{n'}^*, x_{n'}>| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{n} + \|x_{n'}^*\| \; \|x_0 - x_{n'}\| = \frac{1}{n} + \varphi(\|x_{n'}\|) \; \|x_0 - x_{n'}\| \underset{n'}{\to} 0.$$

Prin urmare $<x_0^*, x_0> = \varphi(\|x_0\|)\|x_0\|$.

Dar: $x_0 \in F_n \subset \{x^* / \|x^*\| < \sup\limits_{k \geqslant n} \|x_k^*\|\} =$

$$= \{x^* \mid \|x^*\| \leqslant \sup_{k \geqslant n} \varphi(\|x_k\|)\} \qquad \forall n \in N.$$

Prin urmare $\|x_0^*\| \leqslant \sup\limits_{k \geqslant n} \varphi(\|x_k\|)$ și deci $\|x_0^*\| \leqslant \varphi(\|x_0\|)$. Aceasta înseamnă că $x^*_0 \in \daleth x_0$, ceea ce este contradicție.

q.e.d.

PROPOZIŢIA 3.6. *Dacă aplicaţia de dualitate nu este univocă în $x \in X$, atunci nu există nici o secţiune a sa continuă în X-topologia pe X^*.*

Demonstraţie. Să presupunem că ar exista o secţiune $\tilde{\mathfrak{J}}$ continuă, de la X cu topologia normei în X^*, cu X-topologia şi fie $x^* \in \mathfrak{J}\, x$ cu $x^* \neq \tilde{\mathfrak{J}}\, x$. Cum $\mathfrak{J}$ este monotonă, avem pentru orice $y \in X$ şi $t \geqslant 0$:

$$< \tilde{\mathfrak{J}}\,(x + ty) - x^*, x + tx - x > \geqslant 0, \text{ adică}$$

$$< \tilde{\mathfrak{J}}\,(x + ty) - x^*, y > \geqslant 0$$

Cînd $t \to 0$, rezultă $< \tilde{\mathfrak{J}}\, x - x^*, y > \geqslant 0$, $\forall\, y \in X$. Prin urmare $\tilde{\mathfrak{J}}_x = x^*$, ceea ce este o contradicţie.

q.e.d.

Referinţe. Conceptul de aplicaţie de dualitate a fost introdus de Beurling-Livingston [12] şi studiat apoi de către F. Browder [27], [30], [39], F. Browder-de Figueiredo [40]. Caracterizarea aplicaţiei de dualitate ca subdiferenţială de funcţie convexă aparţine lui E. Asplund [3].

Teorema 3.2 este o generalizare a unui rezultat al lui Beurling-Livingston [12], ea a fost demonstrată şi de F. Browder [28] iar sub forma generală dată aici, apare în [3]. Această teoremă va fi completată cu o teoremă de unicitate în capitolul următor.

Proprietăţi ale aplicaţiei de dualitate se găsesc în lucrarea lui Figueiredo [74]. Propoziţia 3.3 este luată din [96], propoziţia 3.4 din [148], propoziţia 3.5 din [39] iar propoziţia 3.6 din [77].

CAPITOLUL II

CARACTERIZAREA UNOR CLASE DE SPAŢII BANACH PRIN APLICAŢIILE DE DUALITATE

§ 1. SPAŢII BANACH STRICT CONVEXE

În continuare vom nota prin $\to$ convergenţa în topologia normei şi prin $\rightharpoonup$,convergenţa slabă pe X.

DEFINIŢIA 1.1. *Un spaţiu Banach X se numeşte strict convex dacă :*

$$\forall\ x,y \in X,\ x \neq y, \|x\| = \|y\| = 1 \Rightarrow \|\lambda x + (1-\lambda)y\| < 1,$$
$$\forall\ \lambda \in (0,1).$$

Are loc :

PROPOZIŢIA 1.1. *Următoarele afirmaţii într-un spaţiu Banach X sînt echivalente :*
i) *X este strict convex*
ii) *Frontiera sferei unitate nu conţine nici un segment.*
iii) *Din* $\|x-y\| = \|x-z\| + \|z-y\|$ *rezultă că există* $\lambda \in (0,1)$ astfel *încît* $z = \lambda x + (1-\lambda)y$.

iv) *Orice $x^* \in X^*$ îşi atinge maximul pe sfera unitate în cel mult un punct.*

Demonstraţie. Evident i)$\Rightarrow$ii).

ii)$\Rightarrow$i). Fie $x,\ y, \in X$ cu $\|x\| = \|y\| = 1$ şi $\lambda_0 \in (0,1)$ astfel încît $\|\lambda_0 x + (1-\lambda_0)y\| = 1$; vom arăta că tot segmentul $[x, y]$ este pe sferă.

Fie $\lambda_0 < \lambda < 1$; cum $\dfrac{\lambda_0}{\lambda} < 1$, putem scrie :

$$\lambda_0 x + (1-\lambda_0)y = \frac{\lambda_0}{\lambda}[\lambda x + (1-\lambda)y] + \left(1 - \frac{\lambda_0}{\lambda}\right)y,$$

de unde :

$$1 = \| \lambda_0 x + (1 - \lambda_0)y \| \leqslant \frac{\lambda_0}{\lambda} \| \lambda x + (1 - \lambda)y \| + 1 - \frac{\lambda_0}{\lambda}$$

sau

$$\frac{\lambda_0}{\lambda} \leqslant \frac{\lambda_0}{\lambda} \| \lambda x + (1 - \lambda)y \|$$

deci

$$\| \lambda x + (1 - \lambda)y \| \geqslant 1, \text{ adică } \| \lambda x + (1 - \lambda)y \| = 1.$$

Analog se tratează şi cazul $0 < \lambda < \lambda_0$.

i)$\Rightarrow$iii) Fie $x, y, z \in X$ cu $\| x - y \| = \| x - z \| + \| z - y \|$.

Putem presupune $\| z - z \| \neq 0$ $\| z - y \| \neq 0$ şi $\| x - z \| \leqslant \| z - y \|$.
Avem :

$$\left\| \frac{1}{2} \cdot \frac{x - z}{\| x - z \|} + \frac{1}{2} \frac{x - y}{\| z - y \|} \right\| \geqslant \left\| \frac{1}{2} \frac{x - z}{\| x - z \|} + \frac{1}{2} \frac{z - y}{\| x - z \|} \right\| -$$

$$- \left\| \frac{1}{2} \cdot \frac{z - y}{\| x - z \|} - \frac{1}{2} \frac{z - y}{\| z - y \|} \right\| = \frac{1}{2} \frac{\| x - y \|}{\| x - z \|} - \frac{1}{2} -$$

$$- \frac{\| z - y \| - \| x - z \|}{\| x - z \| \; \| z - y \|} \cdot \| z - y \| = \frac{1}{2} \frac{\| x - y \| - \| z - y \| + \| x - z \|}{\| x - z \|} =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\| x - z \| + \| z - y \| - \| z - y \| + \| x - z \|}{\| x - z \|} = 1.$$

Prin urmare :

$$\left\| \frac{1}{2} \cdot \frac{x - z}{\| x - z \|} + \frac{1}{2} \cdot \frac{z - y}{\| z - y \|} \right\| = 1,$$

ceea ce implică : $\dfrac{x-z}{\|x-z\|} = \dfrac{z-y}{\|z-y\|}$, adică

$$\left(\frac{1}{\|x-y\|}+\frac{1}{\|z-y\|}\right)z = \frac{1}{\|x-z\|}\cdot x + \frac{1}{\|z-y\|}\cdot y,$$

de unde punînd $\lambda = \dfrac{\dfrac{1}{\|x-z\|}}{\dfrac{1}{\|x-z\|}+\dfrac{1}{\|z-y\|}}$, rezultă iii).

iii)$\Rightarrow$i). Fie $x, y \in X$ cu $\|x\| = \|y\| = \|\frac{1}{2}(x+y)\| = 1$;

atunci avem : $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$ și iii) pentru $z = 0$ implică existența unui $\lambda \in (0,1)$ astfel încît : $\lambda x + (1-\lambda)y = 0$; de aici rezultă evident $x=y$.

i)$\Rightarrow$iv). Fie X strict convex și $x^* \in X^*$ pentru care ar exista $x_1 \neq x_2, \|x_1\| = \|x_2\|$, astfel încît $<x^*, x_1> = <x^*, x_2> = \|x^*\|$.

Fie $\lambda \in (0,1)$; cum :

$$<x^*, \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2> = \lambda(x^*, x_1> + (1-\lambda)<x^*, x_2> = \|x^*\|,$$

rezultă : $\|\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2\| = 1$ și deci $\|\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2\| = 1$, ceea ce nu se poate.

iv)$\Rightarrow$ii). Să presupunem că există un segment $[x_1, x_2]$ pe sfera unitate; fie $x^* \in X^*$, astfel încît

$$<x^*, \frac{x_1+x_2}{2}> = \frac{\|x_1+x_2\|}{2} = 1 \text{ și } \|x^*\| = 1;$$

aceasta înseamnă că : $<x^*, x_1> + <x^*, x_2> = 2$ și cum :

$<x^*, x_1> \leqslant 1$ și $<x^*, x_2> \leqslant 1$, rezultă : $<x^*, x_1> = <x^*, x_2> =$

$= \|x^*\| = 1$, ceea ce nu se poate.

q.e.d.

COROLAR. *X este strict convex dacă şi numai dacă*

$$\|x\| = \|y\| = 1 \text{ şi } \|x + y\| = \|x\| + \|y\| \Rightarrow x = y.$$

PROPOZIŢIA 1.2. *Dacă X^* este neted, respectiv strict convex, atunci X este strict convex, respectiv neted.*

Demonstraţie. Fie X^* neted şi să presupunem că X nu ar fi strict convex; atunci după propoziţia 1.1 iv), ar exista $x^* \in X^*$ şi $x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$, $\|x_1\| = \|x_2\| = 1$, astfel încît: $<x^*, x_1> = <x^*, x_2> = \|x^*\|$; dar cum $x_1, x_2 \in X^{**}$, aceasta nu se poate.

Fie X^* strict convex şi să presupunem că X nu ar fi neted; înseamnă că există $x \in X$ şi $x^*, y^* \in X^*$, $x^* \neq y^*$, astfel încît $\|x^*\| = \|y^*\| = 1$ şi $<x^*, x> = <y^*, x> = \|x\|$; atunci funcţionala $x \in X^{**}$ contrazice iv) pentru X^*.

PROPOZIŢIA 1.3. *Spaţiul X este strict convex dacă şi numai dacă funcţia $h(x) = \|x\|^2$ este strict convexă.*

Demonstraţie. Vom arăta pentru început că funcţia h este convexă. Pentru $x, y \in X$ şi $\lambda \in (0,1$, avem:

$$(1) \|\lambda x + (1-\lambda)y\|^2 \leqslant (\lambda\|x\| + (1-\lambda)\|y\|)^2 =$$

$$= \lambda^2\|x\|^2 + 2\lambda(1-\lambda)\|x\|\|y\| + (1-\lambda)^2\|y\|^2 \leqslant$$

$$< \lambda^2\|x\|^2 + \lambda(1-\lambda)(\|x\|^2 + \|y\|^2) + (1-\lambda)^2\|y\|^2 =$$

$$= \lambda\|x\|^2 + (1-\lambda)\|y\|^2.$$

Fie acum X strict convex şi să presupunem că ar exista $x \neq y$ cu: $\|\lambda_0 x + (1-\lambda_0)y\|^2 = \lambda_0\|x\|^2 + (1-\lambda_0)\|y\|^2$ pentru un $\lambda_0 \in (0,1)$. Atunci din (1), dacă capetele inegalităţilor sînt egale, rezultă: $2\|x\| \, \|y\| = \|x\|^2 + \|y\|^2$ şi deci $\|x\| = \|y\| = \|\lambda_0 x + (1-\lambda_0)x\|$ ceea ce nu se poate.

Invers, dacă h este strict convexă şi presupunem că pentru $x \neq y$ $\|x\| = \|y\| = 1$, avem:

$$\|\lambda x + (1-\lambda)y\| = 1, \text{ atunci:}$$

$\|\lambda x + (1-\lambda)y\|^2 = 1 = \lambda\|x\|^2 + (1-\lambda)\|y\|^2$, ceea ce nu se poate.

q.e.d.

Observaţia 1.1. A reieşit din cele de mai sus că:

$$h(\lambda x + (1-\lambda)y) < \lambda h(x) + (1-\lambda)h(y) \Leftrightarrow \|x\| = \|y\| \tag{2}$$

şi deci dacă pentru h există o singură valoare $\lambda \in (0,1)$ pentru care (2) are loc, atunci h este strict convexă.

Un exemplu simplu de spaţiu strict convex este cel al spaţiilor Hilbert, într-adevăr, se verifică uşor că h este strict convexă, deoarece dacă

$$2h\left(\frac{x+h}{2}\right) = h(x) + h(y), \text{ adică } \|x+y\|^2 = 2\,(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

atunci rezultă că $x = y$.

Un alt exemplu important de spaţiu strict convex este $c_0(\Gamma)$.

DEFINIŢIA 1.2. *Fie* Γ *o mulţime; notăm prin* $c_0(\Gamma)$ *spaţiul Banach al funcţiilor* f *pe* Γ, *astfel încît mulţimea* $\{\gamma \,|\, |f(\gamma)| > \varepsilon\}$ *este finită pentru orice* $\varepsilon > 0$, *cu norma* $f = \sup\limits_{\gamma\in\Gamma} |f(\gamma)|$.

TEOREMA I.I. *Pe spaţiul* $c_0(\Gamma)$ *există o normă echivalentă strict convexă.*

Demonstraţie. Vom încerca să definim o aplicaţie a lui $c_0(\Gamma)$ în $l^2(\Gamma)$ cu proprietăţi convenabile.

Fie $f \in c_0(\Gamma)$ şi fie $E_1(f) = \{\gamma / |f(\gamma)| = \|f\|\}$; $E_1(f) \neq \varnothing$ şi dacă $f \not\equiv 0$ atunci are un număr finit de puncte; într-adevăr, luînd un $\varepsilon_0 < \|f\|$, $\{\gamma / |f(\gamma)| = \|f\|\} \subset \{\gamma / |f(\gamma)| > \varepsilon_0\}$ care este finită.

Fie $f_1 = \chi_{\Gamma\setminus E_1} \cdot f$, unde $\chi_{\Gamma\setminus E_1}$ este funcţia caracteristică a mulţimii $\Gamma\setminus E_1$; evident $f_1 \in c_0(\Gamma)$. Fie $E_2(f) = \{\gamma / |f_1(\gamma)| = \|f_1\|\}$ $E_2(f)$ are un număr finit de puncte şi $E_1(f) \cap E_2(f) = \varnothing$; vom defini funcţia $f_2 = \chi_{\Gamma\setminus E_1\cup E_2} \cdot f$. Continuăm construcţia prin inducţie şi obţinem astfel un şir de mulţimi disjuncte, finite $\{E_i(f)\}$ $i \in N$.

Dacă notăm prin $E(f) = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} E_i(f)$, atunci f este nulă pe $\Gamma\setminus E(f)$.

Într-adevăr, dacă pentru un $\gamma_0 \in \Gamma$ avem $f(\gamma_0) \neq 0$, mulţimea $\{\gamma \,|\, |f(\gamma)| > |f(\gamma_0)|\}$ este finită şi fiecare punct al ei va intra într-o mulţime de forma $E_i(f)$, deci şi γ_0.

Punem acum elementele lui $E(f)$ într-un şir, $\{\gamma_j\}_{j\in N}$, astfel încît dacă $\gamma_j \in E_n$ şi $\gamma_k \in E_{n+1}$, atunci $j < k$; prin urmare au loc:

$$|f(\gamma_{j+1})| < |f(\gamma_j)|, \quad j \in N.$$

Definim aplicaţia :

$$(Tf)(\gamma_j) = \frac{f(\gamma_j)}{2^j} \qquad j \in N$$

$$(Tf)(\gamma) = 0 \qquad \gamma \notin E(f).$$

Atunci $Tf \in l^2(\Gamma)$, deoarece

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} (Tf)^2(\gamma) = \sum_{\gamma \in E(f)} (Tf)^2(\gamma) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{f^2(\gamma_j)}{2^{2j}} \leqslant \|f\|^2_{c_0(\Gamma)}.$$

A rezultat în plus şi faptul că : $\| Tf \|_{l^2(\Gamma)} \leqslant \|f\|_{c_0(\Gamma)}$ pentru orice $f \in c_0(\Gamma)$. Evident : $\| T(af)\|_{l^2(\Gamma)} = a \| Tf \|_{l^2(\Gamma)}$.

Să arătăm că : $\| T(f+g)\|_{l^2(\Gamma)} \leqslant \|Tf\|_{l^2(\Gamma)} + \| Tg \|_{l^2(\Gamma)}$. Fie pentru aceasta, $\{\gamma_j\}_{j \in N}$ şirul corespunzător prin construcţia de mai sus lui $f+g$, deci astfel încît prin definiţie

$$\| T(f+g)\|_{l^2(\Gamma)} = \left\{ \sum \left(\frac{(f(\gamma_j) + g(\gamma_j)}{2j} \right)^2 \right\}^{1/2}.$$

Datorită inegalităţii lui Minkovski, avem :

$$\| T(f+g)\|_{l^2(\Gamma)} \leqslant \left\{ \sum_j \left[\frac{f(\gamma_j)}{2^j} \right]^2 \right\}^{1/2} + \left\{ \sum_j \left[\frac{g(\gamma_j)}{2^j} \right]^2 \right\}^{1/2}$$

şi totul va fi demonstrat dacă arătăm că fiecare termen al sumei de mai sus este majorat de $\| Tf \|_{l^2(\Gamma)}$, respectiv $\| Tg \|_{l^2(\Gamma)}$. Să arătăm de exemplu că avem :

$$\left\{ \sum_j \left[\frac{f(\gamma_j)}{2^j} \right]^2 \right\}^{1/2} \leqslant \| Tf \|_{l^2(\Gamma)}.$$

Să presupunem că $\{\lambda_k\}_{k\in N}$ este şirul din Γ asociat lui f, deci astfel încît:

$$\|Tf\|_{l^2(\Gamma)} = \left[\sum_k \left(\frac{f(\lambda_k)}{2^k}\right)^2\right]^{1/2}.$$

Notăm pentru simplitate prin $a_j = f(\gamma_j)$ şi $b_k = f(\lambda_k)$; vrem să arătăm că

$$\sum_j \left(\frac{a_j}{2^j}\right)^2 \leqslant \sum_k \left(\frac{b_k}{2^k}\right)^2.$$

Dacă $m<n$ şi $|a_m|<|a_n|$, avem:

$$\frac{a_m^2}{2^{2m}} + \frac{a_n^2}{2^{2u}} = 2^{-2n}\,[2^{2n-2m}\,a_m^2 + a_n^2] =$$

$$= 2^{-2n}\,[a_m^2 + a_n^2 + 2^{2n-2m-1}\,a_m^2] < 2^{-2n}\,[a_m^2 + a_n^2 + 2^{2n-2m-1}\,a_n^2] =$$

$$= 2^{-2n}\,[2^{2n-2m}\,a_n^2 + a_m^2] = \frac{a_n^2}{2^{2m}} + \frac{a_m^2}{2^{2n}};$$

prin urmare dacă permutăm pe a_n şi a_m, membrul drept creşte. Atunci, dacă şirul $\{a_j\}_{j\in N}$ este descrescător, îl lăsăm neschimbat în caz contrar, putem permuta termenii săi încît să formeze un şir $\{c_n\}_{n\in N}$ descrescător, pentru care, datorită observaţiei de mai sus:

$$\sum_j \left(\frac{a_j}{2^j}\right)^2 \leqslant \sum_n \left(\frac{c_n}{2^n}\right)^2.$$

Dar valorile lui a_j diferite de 0, se află printre termenii şirului b_k (datorită observaţiei că f este nulă pe $\Gamma\setminus E(f)$ şi atunci evident $c_1 \leqslant b_1$; dacă $c_2 < c_1$, atunci $c_2 \neq b_1$ şi deci $c_2 \leqslant b_2$; dacă $c_2 = c_1$ şi $c_1 \leqslant b_1$, atunci $c_2 = c_1 \leqslant b_2$ iar dacă $c_1 = b_1$, atunci $c_2 = b_2$, deci oricum $c_2 \leqslant b_2$. Raţionînd inductiv în acest mod, găsim $c_n \leqslant b_n$, $\forall n$, deci:

$$\sum_n \left(\frac{c_n}{2^n}\right)^2 \leqslant \sum_n \left(\frac{b_n}{2^n}\right)^2.$$

Să definim acum o normă echivalentă pe $c_0(\Gamma)$ prin $\|f\|_0 = \|f\|_{c_0(\Gamma)} + \|Tf\|_{l^2(\Gamma)}$ despre care vom arăta că este strict convexă.

Într-adevăr, fie $\|f\|_0 = \|g\|_0$ şi $\|f+g\|_0 = \|f\|_0 + \|g\|_0$; atunci

$$\|f+g\|_{c_0(\Gamma)} = \|f\|_{c_0(\Gamma)} + \|g\|_{c_0(\Gamma)}$$

şi

$$\|T(f+g)\|_{l^2(\Gamma)} = \|Tf\|_{l^2(\Gamma)} + \|Tg\|_{l^2(\Gamma)}.$$

Din cunoscuta condiţie pentru egalitate în inegalitatea lui Minkovski, rezultă că dacă $\{\gamma_j\}_{j\in N}$ este şirul asociat lui $f+g$, avem: $f(\gamma_j) \neq g(\gamma_j)$, $j \in N$. Dar s-a văzut mai sus că dacă $\{\gamma_j\}$ nu este un şir obţinut prin permutarea şirului $\{\lambda_k\}$ asociat lui f atunci $\left[\sum_j \left(\frac{f(\gamma_j)}{2^j}\right)^2\right]^{1/2} < \|Tf\|_{l^2(\Gamma)}$ şi o observaţie analoagă este valabilă pentru g. Prin urmare: $\|T(f+g)\|_{l^2(\Gamma)} = \|Tf\|_{l^2(\Gamma)} + \|Tg\|_{l^2(\Gamma)}$ implică faptul că $\{\gamma_j\}_{j\in N}$ este şirul asociat atît lui f cît şi lui g şi $f(\gamma_j) = g(\gamma_j)$.

Atunci evident $f = g$.

q.e.d.

TEOREMA 1.2. *Fie X un spaţiu Banach cu dualul strict convex; atunci pentru orice pondere φ, aplicaţia de dualitate corespunzătoare este univocă şi continuă considerînd pe X topologia normei şi X-topologia pe X^*.*

Demonstraţie. Prima afirmaţie rezultă din faptul că în acest caz X este neted, deci $\mathfrak{J}\, x$ are exact un singur element. Continuitatea aplicaţiei de dualitate este o consecinţă a propoziţiei 3.5. cap. I deoarece în cazul nostru, $\mathfrak{J}$ fiind univocă, superior-semicontinuitatea coincide cu continuitatea.

q.e.d.

PROPOZIȚIA 1.4. *Fie X un spațiu Banach cu X^* strict convex, $\mathfrak{J}$ o aplicație de dualitate cu pondere φ și $K \subset X$ închisă și convexă; atunci*

$$\|x_0\| = \inf_{x \in K} \|x\| \Leftrightarrow < \mathfrak{J} x_0, x_0 > \leqslant < \mathfrak{J} x_0, x >, \forall x \in K.$$

Demonstrație. Fie $< \mathfrak{J} x_0, x_0 > \leqslant < \mathfrak{J} x_0, x > \forall x \in K$; atunci $\|x_0\| \|\mathfrak{J} x_0\| \leqslant \|x\| \|\mathfrak{J} x_0\|$, adică $\|x_0\| \leqslant \|x\| \forall x \in K$, deci $\|x_0\| = \inf_{x \in K} \|x\|$.

Să presupunem acum că $\|x_0\| = \inf_{x \in K} \|x\|$; atunci pentru orice $x \in K$ avem: $\|x_0 + t(x - x_0)\| \geqslant \|x_0\|$.

Atunci dacă ψ este funcția introdusă în capitolul precedent, rezultă: $\psi(\|x_0 + t(x - x_0)\|) \geqslant \psi(\|x_0\|)$ iar din faptul că $\mathfrak{J} x$ este subgradient al funcției $\psi(\|x\|)$, avem:

$$\psi(\|x_0\|) - \psi(\|x_0 + t(x - x_0)\|) \geqslant < \mathfrak{J}(x_0 + t(x - x_0)), t(x_0 - x) >$$

$$\text{Atunci: } < \mathfrak{J}(x_0 + t(x - x_0)), x_0 - x > \leqslant 0, \forall t \in [0,1]$$

și făcînd pe $t \to 0$, obținem: $< \mathfrak{J} x_0, x_0 > \leqslant < \mathfrak{J} x_0, x >$, $\forall x \in K$.

q.e.d.

Dăm acum următoarea caracterizare a spațiilor strict convexe cu ajutorul aplicațiilor de dualitate.

TEOREMA 1.3. *Fie X un spațiu Banach și $\mathfrak{J}$ o aplicație de dualitate cu pondere φ; pentru ca X să fie strict convex este necesar și suficient ca $\mathfrak{J}$ să fie strict monotonă.*

Demonstrație. Necesitatea. Fie $x^* \in \mathfrak{J} x$ și $y^* \in \mathfrak{J} y$ atunci, după cum s-a văzut în demonstrarea propoziției 3.1 capitolul I, avem:

$$(3) \quad < x^* - y^*, x - y > \geqslant (\varphi(\|x\|) - \varphi(\|y\|))(\|x\| - \|y\|).$$

Să presupunem prin absurd că ar exista $x^* \in \mathfrak{J} x$ și $y^* \in \mathfrak{J} y$, astfel încît

$$(4) \qquad < x^* - y^*, x - y > = 0 \text{ cu } x \neq y.$$

Atunci din (3) rezultă că $\|x\| = \|y\|$.

Din $< x^*, x > = \|x^*\| \|x\|$ rezultă că $\|x^*\| = < x^*, \frac{x}{\|x\|} >$ şi atunci propoziţia 1.1 iv) aplicată funcţionalei x^* implică faptul că :

$$<x^*, \frac{y}{\|y\|} > < \|x^*\|, \text{ adică } <x^*, y> \leqslant \|x^*\| \|y\|.$$

Analog găsim că : $< y^*, x > < \|y^*\| \|x\|$
şi atunci

$$<x^* - y^*, x - y> = \|x^*\| \|x\| + \|y^*\| \|y\| -$$

$$- <x^*, y> - <y^*, x>>$$

$$> \|x^*\| \|x\| + \|y^*\| \|y\| - \|x^*\| \|y\| - \|y^*\| \|x\| = 0$$

ceea ce contrazice (4).

Suficienţa. Fie $x, y \in X$ şi $t_n \in (0,1)$; atunci pentru $x^* \in \mathfrak{J}\, x$ are loc :

$$\psi(\|x + t_n y\|) - \psi(\|x\|) \geqslant < x^*, t_n y>$$

analog, dacă $x_n^* \in \mathfrak{J}\,(x + t_n y)$, avem :

$$\psi(\|x\|) - \psi(\|x + t_n y\|) \geqslant <x_n^*, -t_n y>.$$

Prin urmare, avem :

$$< x^*, y> \leqslant \frac{\psi(\|x + tn\, y\|) - \psi(\|x\|)}{t_n} \leqslant <x_n^*, y>. \tag{5}$$

Să presupunem prin absurd că X nu ar fi strict convex ; atunci ar exista $x_1, x_2 \in X$, cu $x_1 \neq x_2$ şi $\|x_1\| = \|x_2\| = 1$, astfel încît $\|\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2\| = 1$, $\forall\, \lambda \in (0,1)$; în particular am avea pentru orice şir $t_n \underset{n}{\to} 0$, $t_n \in (0,1)$:

$$\|x_2 + t_n(x_1 - x_2)\| = 1. \tag{6}$$

Să scriem (5) pentru $x_2^* \in \mathfrak{J} x_2$ și $x_n^* \in \mathfrak{J}(x_2 + t_n(x_1 - x_2))$; vom găsi

$$< x_2^*, x_1 - x_2 > \leqslant \frac{\psi(\|x_2 + t_n(x_1 - x_2)\|) - \psi(\|x_2\|)}{t_n} \leqslant$$

$$\leqslant < x_n^*, x_1 - x_2 >.$$

Dar din (6) și din strict monotonia lui ψ rezultă că termenul din mijloc din inegalitatea de mai sus este nul și prin urmare avem:

$$(7) \qquad < x_2^*, x_1 - x_2 > \leqslant 0 \text{ și } < x_n^*, x_1 - x_2 > \geqslant 0.$$

Să punem $x_n = x_2 + t_n(x_1 - x_2)$; atunci

$x_n \underset{n}{\to} x_2$ și după lema 3.1, §3, capitolul I, există un subșir $\{x_{n'}^*\}_{n'} \subset$

$\subset \{x_n^*\}_n$, cu $x_{n'}^* \in \mathfrak{J} x_n$ și $y^* \in \mathfrak{J} x_2$, astfel încît:

$$< x_{n'}^*, x_1 - x_2 > \underset{n'}{\to} < y^*, x_1 - x_2 >;$$

din (7) rezultă atunci $< y^*, x_1 - x_2 > = 0$.

Schimbînd în raționamentul de mai sus rolurile lui x_1 și x_2 între ele, se obține existența unui $x^* \in \mathfrak{J} x_1$ astfel încît:

$$< z^*, x_2 - x_1 > = 0.$$

Astfel vom avea: $< y^* - z^*, x_1 - x_2 > = 0$ și $x_1 \neq x_2$, ceea ce contrazice ipoteza de strict monotonie a lui $\mathfrak{J}$.

q.e.d.

COROLAR. *Fie X un spațiu Banach strict convex cu dualul X^* strict convex; atunci orice aplicație de dualitate pe X este injectivă.*

Vom completa acum teorema 3.2 capitolul I (Beurling — Livingston) cu un rezultat de unicitate, anume:

Teorema 1.4. *Fie un spaţiu Banach strict convex cu dualul X^* strict convex, $\mathfrak{J}$ o aplicaţie de dualitate pe X şi Y un subspaţiu reflexiv al lui X iar $Y^{\perp}$ anulatorul său : atunci pentru orice $z_0 \in X$ şi $z_0^* \in X^*$, mulţimea :*

$$\mathfrak{J}(Y + z_0) \cap (Y^{\perp} + z)$$

conţine un singur element.

Demonstraţie. Să presupunem că ar exista două elemente y_0 şi y_0' în Y, astfel încît :

$$\mathfrak{J}(y_0 + z_0) - z_0^* \in Y^{\perp} \text{ şi } (y_0' + z_0) - z_0^* \in Y^{\perp}.$$

Atunci ; $\mathfrak{J}(y_0 + z_0) - \mathfrak{J}(y_0' + z_0) \in Y^{\perp}$, adică

$$< \mathfrak{J}(y_0 + z_0) - \mathfrak{J}(y_0' + z_0), y > = 0 \qquad \forall y \in Y.$$

În particular, avem :

$$< \mathfrak{J}(y_0 + z_0) - \mathfrak{J}(y_0' + z_0), (y_0 + z_0) - (y_0' + z_0) > = 0.$$

După teorema precedentă $\mathfrak{J}$ este strict monotonă şi deci :

$$y_0 + z_0 = y_0' + z_0, \text{ adică } y_0 = y_0'.$$

q.e.d.

Propoziţia 1.5. *Într-un spaţiu Banach cu dualul strict convex, pentru orice aplicaţie de dualitate $\mathfrak{J}$ cu ponderea φ, are loc :*

$$\psi(\|x + y\|) = \psi(\|x\|) + \int_0^1 < \mathfrak{J}(x + ty), y > \mathrm{d}t.$$

Demonstraţie. Datorită teoremei lui Asplund, avem :

$$< \mathfrak{J}x, y > = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \psi(\|x + ty\|)|_{t=0}$$

de unde :

$$\frac{d}{dt}\psi(\|x+ty\|)\Big|_{t=t_0} = \frac{d}{ds}\psi(\|x_0+t_0y+sy\|)\Big|_{s=0} =$$

$$= < \mathfrak{J}(x_0+t_0y), y >.$$

Cum după teorema 1.2 funcția $t \to < \mathfrak{J}(x+ty), y >$ este continuă rezultă :

$$\int_0^1 < \mathfrak{J}(x+ty), y > dt = \int_0^1 \frac{d}{dt}\psi(\|x+ty\|)\,dt = \psi(\|x+y\|) - \psi(\|x\|).$$

q.e.d.

Referințe. Spațiile strict convexe au fost introduse de I.A. Clarkson [45]; el a arătat că orice spațiu Banach separabil are o normă echivalentă strict convexă.

Spațiile netede au fost introduse de Krein [103]; aceste clase de spații au fost studiate de V. Klee [99], M. Day [63], G. Köthe [102]

Teorema 1.1 este a lui M. Day [63] iar caracterizarea spațiilor strict convexe cu aplicația de dualitate aparține lui V.W. Petryshyn [148].

§ 2. SPAȚII BANACH UNIFORM CONVEXE ȘI LOCAL UNIFORM CONVEXE

DEFINIȚIA 2.1. *Un spațiu Banach X se numește uniform convex dacă pentru orice* $\varepsilon > 0$, *există* $\delta(\varepsilon) > 0$, *astfel încît dacă* $\|x\| = \|y\| = 1$ și $\|x-y\| \geq \varepsilon$, *atunci* $\|x+y\| \leq 2(1-\delta(\varepsilon))$.

Un spațiu Banach X se numește local uniform convex dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ *și orice* x *cu* $\|x\| = 1$, *există* $\delta(\varepsilon, x) > 0$, *astfel încît dacă* $\|x-y\| \geq \varepsilon$, *atunci* $\|x+y\| \leq 2(1-\delta(\varepsilon, x))$, $\forall y \in X$, *cu* $\|y\| = 1$.

Un spațiu Banach se numește slab uniform convex, dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ *și* $x^* \in X^*$, *cu* $\|x^*\| = 1$, *există* $\delta(\varepsilon, x) > 0$, *astfel încît dacă* $\|x-y\| \geq \varepsilon$, *atunci* $< x^*, x+y > \leq 2(1-\delta(\varepsilon, x))$, $\|x\| = \|y\| = 1$.

În orice spaţiu Banach se introduc:
modulul de uniform convexitate:

$$\Delta_X(\varepsilon) = \frac{1}{2} \inf_{\substack{\|x\|=\|y\|=1 \\ \|x-y\|\geqslant\varepsilon}} (2 - \|x+y\|) \qquad 0 < \varepsilon \leqslant 2.$$

modulul de local uniform convexitate

$$\Delta_X(\varepsilon, x) = \frac{1}{2} \inf_{\substack{\|y\|=1 \\ \|x-y\|\geqslant\varepsilon}} (2 - \|x+y\|) \quad 0 < \varepsilon \leqslant 2.$$

modulul de slab uniform convexitate:

$$\Delta'_X(\varepsilon, x^*) = \frac{1}{2} \inf_{\substack{\|x\|=\|y\|=1 \\ \|x-y\|\geqslant\varepsilon}} (2 - \langle x^*, x+y \rangle) \; 0 < \varepsilon \leqslant 2.$$

Rezultă direct din definiţie:

PROPOZIŢIA 2.1. *Un spaţiu Banach X este uniform convex (local uniform convex, resp. slab uniform convex) dacă şi numai dacă*

$$\Delta_X(\varepsilon) > 0 \; (\Delta_X(\varepsilon, x) > 0 \text{ resp. } \Delta_X(\varepsilon; x^*) > 0).$$

Observaţia 2.1. Evident orice spaţiu Banach uniform convex este local uniform convex şi în acelaşi timp şi slab uniform convex în orice $x^* \in X^*$. A.R. Lovaglia [108] a dat un exemplu de spaţiu local uniform convex care nu este izomorf cu nici un spaţiu uniform convex.

PROPOZIŢIA 2.2. a) *Un spaţiu Banach este uniform convex dacă şi numai dacă din*

$$\|x_n\| = \|y_n\| = 1, \; n \geqslant 1 \text{ şi } \|x_n + y_n\| \underset{n}{\to} 2, \text{ rezultă } \|x_n - y_n\| \underset{n}{\to} 0.$$

b) *Un spaţiu Banach este local uniform convex dacă şi numai dacă pentru orice*

$$\|x\| = 1 \text{ şi } \|x_n\| = 1, n \geqslant 1, \text{ cu } \|x_n + x\| \underset{n}{\to} 2, \text{ rezultă } \|x_n - x\| \underset{n}{\to} 0.$$

Demonstrație. Evident $\Delta_X(\varepsilon)>0$ pentru orice $\varepsilon\leqslant 2$, implică proprietatea a). Să presupunem invers că ar exista $\varepsilon>0$, astfel încît pentru orice $\delta=\frac{1}{n}$, există $\|x_n\|=\|y_n\|=1$, $\|x_n-y_n\|\geqslant\varepsilon$, dar

$$\|x_n+y_n\|\leqslant 2\left(1-\frac{1}{n}\right).$$

Atunci $\|x_n+y_n\|\xrightarrow[n]{}2$, dar $\|x_n-y_n\|\not\xrightarrow[n]{}0$, ceea ce nu se poate.

b) Se demonstrează analog.

q.e.d.

Observația 2.2. Orice spațiu local uniform convex este strict convex. Într-adevăr, dacă $\|x\|=\|y\|=1$ și $x\neq y$, atunci $\|x-y\|\geqslant\varepsilon$, pentru un anumit $\varepsilon>0$; există prin urmare $\delta(\varepsilon,x)$ astfel încît $\|x+y\|\leqslant 2(1-\delta))<2$, deci $\|x+y/2\|\leqslant 1$.

Un exemplu de spațiu uniform convex îl constituie spațiul Hilbert. Într-adevăr, avem:

$$\|x_n+y_n\|^2+\|x_n-y_n\|^2=2\ \|x_n\|^2+2\|y_n\|^2$$

și dacă $\|x_n+y_n\|\xrightarrow[n]{}2$ și $\|x_n\|=\|y_n\|=1$, evident $\|x_n-y_n\|\xrightarrow[n]{}0$.

Observația 2.3. Noțiunea de uniform convexitate are următoarea interpretare geometrică: dacă mijlocul unei coarde variabile în sfera unitate tinde către frontiera sferei, atunci lungimea coardei tinde la zero. La local uniform convexitate se cere ca unul din capetele coardei să rămînă fix.

TEOREMA 2.1. *Fie X un spațiu Banach local uniform convex; atunci pentru orice șir din X cu:*

(1) $x_n\xrightarrow[n]{\ }x$ și $\|x_n\|\xrightarrow[n]{}\|x\|$, rezultă $x_n\xrightarrow[n]{}x$.

Demonstrație. Fie $\{x_n\}_n$ un șir cu proprietatea (1); putem presupune $\|x\|>0$ și fie atunci $y_n=\frac{x_n}{\|x_n\|}$ și $y=\frac{x}{\|x\|}$. Avem: $\|y_n\|=\|y\|=1$ și $y_n\xrightarrow[n]{\ }y$ iar $y_n+y\xrightarrow[n]{\ }2y$. Atunci:

$$2=2\|y\|\leqslant\underline{\lim_n}'\|y_n+y\|\leqslant\overline{\lim_n}\|y_n+y\|\leqslant\|y\|+\lim_n\|y_n\|=2$$

şi deci $\lim\limits_n \|y_n+y\| = 2$. Rezultă atunci din local uniform convexitatea lui X că $\lim\limits_n \|y_n - y\| = 0$ şi deci $\frac{x_n}{\|x_n\|} \to \frac{x_n}{\|x\|}$. De aici, cum $\|x_n\| \underset{n}{\to} \|x\|$, rezultă faptul că $x_n \underset{n}{\to} x$.

q.e.d.

PROPOZIŢIA 2.3. *Un spaţiu Banach reflexiv şi local uniform convex este slab uniform convex.*

Demonstraţie. Observăm că mulţimea :
$B = \{(x,y)/\|x\| = \|y\| = 1, \|x-y\| \geqslant \varepsilon\} \subset \{x/\|x\| = 1\} x \{y/\|y\| = 1\}$ este închisă în topologia slabă pe X; într-adevăr, dacă $x_n, y_n \in B$ şi $x_n \underset{n}{\rightharpoonup} x$, $y_n \underset{n}{\rightharpoonup} y$, există subşirurile $\|x_{nk}\| \underset{k}{\to} \|x\|$ şi $\|y_{nk}\| \underset{k}{\to} \|y\|$, deci $\|x\| = \|y\| = 1$ şi în plus după teorema de mai sus rezultă : $x_{nk} \underset{k}{\to} x$ şi $y_{nk} \underset{k}{\to} y$, deci $\|x - y\| = \lim\limits_k \|x_{nk} - y_{nk}\| \geqslant \varepsilon$.

Atunci această mulţime este compactă în topologia slabă şi pentru $\forall x^* \in X$. $\|x^*\| = 1$ funcţia $(x,y) \to \langle x^*, x+y \rangle$ îşi atinge minimul pe B; există deci $\|x_0\| = \|y_0\| = 1$, $\|x_0 - y_0\| \geqslant \varepsilon$, astfel încît : $\Delta_X(\varepsilon, x^*) = 2 - \langle x^*, x_0 + y_0 \rangle = 2 - \|x_0 + y_0\| \geqslant \Delta_X(\varepsilon, x_0)$

q.e.d.

TEOREMA 2.2. *Orice spaţiu Banach uniform convex este reflexiv.*

Demonstraţie. Facem mai întîi următoarea observaţie : dacă $\{x_\alpha\}_{\alpha \in I}$ este un şir generalizat din X care converge în X^*—topologia pe X^{**} către $x^{**} \in X^{**}$ şi $\|x_\alpha\| \underset{\alpha}{\to} \|X^{**}\|$, atunci $x^{**} \in X$ şi $x_\alpha \underset{\alpha}{\to} x$ în topologia normei. Într-adevăr, putem presupune $\|x^{**}\| \neq 0$ şi notăm prin : $y_\alpha = \frac{x_\alpha}{\|x_\alpha\|}$, $y = \frac{x^{**}}{\|x^{**}\|}$.

Vom avea :

$$2 = 2\|y^{**}\| \leqslant \underline{\lim}_{\alpha,\beta} \|y_\alpha + y_\beta\| \leqslant \overline{\lim}_{\alpha,\beta} \|y_\alpha + y_\beta\| \leqslant 2.$$

Există deci $\lim\limits_{\alpha,\beta} \|y_\alpha + y_\beta\| = 2$ şi de aici se verifică uşor folosind uniform convexitatea spaţiului că $\|y_\alpha - y_\beta\| \underset{\alpha,\beta}{\to} 0$, deci $x_\alpha - x_\beta \to 0$. Acum reflexivitatea lui X rezultă astfel : fie $x^{**} \in X^{**}$, cu $\|x^{**}\| = 1$; după teorema lui H. Goldstine [70], există $\{x_\alpha\}_\alpha \subset X$, $\|x_\alpha\| \leqslant 1$, astfel încît $x_\alpha \underset{\alpha}{\to} x^{**}$ în X^* — topologia pe X. Avem :

$$1 = \|x^{**}\| \leqslant \underline{\lim}_{\alpha} \|x_\alpha\| \leqslant \overline{\lim}_{\alpha} \|x_\alpha\| \leqslant 1$$

deci $\|x_\alpha\| \xrightarrow[\alpha]{} \|x\|$ şi atunci după cele de mai sus rezultă $x^{**} \in X$; astfel $X^{**} = X$.

Propoziţia 2.4. *Fie într-un spaţiu Banach uniform convex x,y şi $z_n \in X$, $n \in N$, astfel încît: există* $\lim\limits_n \|x - z_n\|$, $\lim\limits_n \|z_n - y\|$ *şi* $\lim\limits_n \|x - z_n\| + \lim\limits_n \|z_n - y\| = \|x - y\|$; *atunci*: $\lim\limits_n z_n = z$, *unde* $z = \lambda x + (1-\lambda)y$, $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$.

Demonstraţie. Cum $\|z_n\| \leqslant \|x - z_n\| + \|x\|$, rezultă că $\{\|z_n\|\}_{n \in N}$ este mărginit; spaţiul X fiind reflexiv, există un subşir $z_{n_k} \xrightarrow[k]{} z \in X$. Avem: $\|x - z\| \leqslant \lim\limits_k \|x - z_{n_k}\|$ şi $\|y - z\| \leqslant \lim\limits_k \|y - z_{n_k}\|$ şi prin urmare:

$$\|x - y\| = \lim_k \|x - z_{n_k}\| + \lim_k \|z_{n_k} - y\| \geqslant \|x - z\| + \|y - z\| \geqslant$$
$$\geqslant \|x - y\|.$$

Deci a rezultat că: $\lim\limits_k \|z_{n_k} - y\| = \|z - y\|$ şi $\|x - z\| + \|y - z\| = \|x - y\|$. Spaţiul fiind strict convex, conform propoziţiei 1.1, rezultă: $z = \lambda x + (1-\lambda)y$.

De aici avem: $\lambda = \|z - y\|/_{\|x-y\|} = \lim\limits_n \|z_n - y\|/_{\|x-y\|}$ deci este unic determinat. Prin urmare orice subşir al şirului $\{z_n\}_n \subset X$, conţine un subşir convergent la o limită fixă; aceasta înseamnă că există $\lim\limits_n z_n$ şi demonstraţia este completă.

q.e.d.

Definiţia 2.2. *O funcţie convexă $f: X \to R$ se numeşte local uniform strict convexă în $x \in X$, dacă*

$$(2) \qquad \inf_{\|x - y\| \geqslant \varepsilon} \left\{ f(x) - 2f\left(\frac{x+y}{2}\right) + f(y) \right\} > 0 \textit{ pentru } \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Ea se numeşte uniform strict convexă dacă:

$$(3) \qquad \inf_{\substack{\|x - y\| \geqslant \varepsilon \\ \|x\| = 1}} \left\{ f(x) - 2f\left(\frac{x+y}{2}\right) + f(y) \right\} > 0 \textit{ pentru } \quad \forall \varepsilon > 0.$$

PROPOZIȚIA 2.5. *Un spațiu Banach X este (local) uniform convex dacă și numai dacă funcția $h(x)=\frac{1}{2}\|x\|^2$ este (local) uniform strict convexă.*

Demonstrație. Să presupunem că (2) are loc; atunci se verifică ușor că spațiul X este local uniform convex.

Fie acum X local uniform convex și fie $\varepsilon>0$ și $x,y\in X$, cu $\|x-y\|\geqslant\varepsilon$ x fixat; fie $u=x/\|x\|$, $v=y/\|y\|$. Pentru u și $\varepsilon_0=\frac{\varepsilon}{\|x\|}$ există $\delta=\delta(\varepsilon_0,u)>0$ astfel încît:

$$\|z\|=1 \text{ și } \|u-z\|\geqslant\varepsilon_0 \text{ să implice } 1-\left\|\frac{u+z}{2}\right\|>\delta.$$

Vom distinge 3 cazuri:

I) $\left|\,\|x\|-\|y\|\,\right|\geqslant\frac{\varepsilon}{2}$

II) $0\leqslant\|x\|-\|y\|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}$;

III) $0<\|y\|-\|x\|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}$.

Cazul I. Avem:

$$\frac{1}{2}\|x\|^2-\left\|\frac{x+y}{2}\right\|^2+\frac{1}{2}\|y\|^2\geqslant\frac{1}{2}\|x\|^2-\frac{1}{4}(\|x\|+\|y\|)^2+$$

$$+\frac{1}{2}\|y\|^2=\frac{1}{4}(\|x\|-\|y\|)^2\geqslant\frac{\varepsilon}{16}$$

și deci inferiorul în (2) este strict pozitiv.

Cazul II. Fie $\alpha=\frac{\|x\|}{\|y\|}\geqslant 1$; atunci $x+y=\|y\|(u+v+(\alpha-1)u)$.

Atunci

$$E(x,y) = \frac{1}{2}\|x\|^2 - \left\|\frac{x-y}{2}\right\|^2 + \frac{1}{2}\|y\|^2 =$$

$$= \|y\|^2\left[\left(\frac{1+\alpha^2}{2} - \left(\left\|\frac{u+v}{2}\right\| + \frac{\alpha-1}{2}\right)^2\right]\right. =$$

$$= \|y\|^2\left[\left(\frac{1+\alpha^2}{2}\right)^{1/2} + \left(\left\|\frac{u+v}{2}\right\| + \frac{\alpha-1}{2}\right)\right]$$

$$\left[\left(\frac{1+\alpha^2}{2}\right)^{1/2} - \left(\left\|\frac{u+v}{2}\right\| + \frac{\alpha-1}{2}\right)\right] \geqslant \|y\|^2\left(1 - \left\|\frac{u+v}{2}\right\|\right) =$$

$$= \|x\| \; \|y\| \left(1 - \left\|\frac{u+v}{2}\right\|\right) \geqslant \|y\|^2\left(1 - \left\|\frac{u+v}{2}\right\|\right)$$

deoarece $\left(\frac{1+\alpha^2}{2}\right)^{1/2} + \frac{\alpha-1}{2} \geqslant \alpha$ și $\left(\frac{1+\alpha^2}{2}\right)^{1/2} - \frac{\alpha-1}{2} \geqslant 1.$

Putem evalua pe $\|u-v\|$, astfel:

$$\|u-v\| = \frac{1}{\|x\|}\left\|x-y-\frac{\|y\|-\|x\|}{\|y\|}\cdot y\right\| \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{\|x\|}[\|x-y\| + (\|x\| - \|y\|)] \geqslant \frac{\varepsilon}{\|x\|} = \varepsilon_0.$$

Atunci: $1 - \left\|\frac{u+v}{2}\right\| > \delta.$

În plus, din $\|x-y\| \geqslant \varepsilon$, rezultă că cel puțin una din relațiile $\|x\| > \frac{\varepsilon}{2}$, $\|y\| > \frac{\varepsilon}{2}$, are loc. Dacă $\|y\| > \frac{\varepsilon}{2}$, înseamnă că $E(x,y) > \frac{\varepsilon^2\delta}{4}$; dacă $\|y\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$, atunci $\|x\| > \frac{\varepsilon}{2}$ și deci $\|y\| \geqslant \|x\| - \frac{\varepsilon}{2}$.

Prin urmare $E(x, y) > \left(\| x \| - \frac{\varepsilon}{2} \right)^2 \delta > 0$.

Cazul III se tratează analog.

Analog se demonstrează şi afirmaţia privitoare la uniform convexitate.

q.e.d.

Vom stabili acum legătura care există între noţiunile de uniform convexitate într-un spaţiu Banach şi diferitele condiţii de diferenţiabilitate satisfăcute de norma din X. Pentru aceasta vom stabili relaţiile dintre modulele de convexitate introduse şi cele de netezime.

PROPOZIŢIA 2.6. Au loc relaţiile :

$$\rho_{X^*}(\tau) = \sup_{0<\varepsilon\leqslant 2} \left[\frac{\tau\varepsilon}{2} - \Delta_X(\varepsilon) \right] \tag{4}$$

$$\rho_{X^*}(\tau, x) = \sup_{0<\varepsilon\leqslant 2} \left[\frac{\tau\varepsilon}{2} - \Delta_X(\varepsilon, x^*) \right]. \tag{5}$$

Demonstraţie. Vom demonstra doar (4) deoarece (5) se demonstrează analog.

Arătăm întîi că : $\rho_{X^*}(\tau) \geqslant \frac{\tau\varepsilon}{2} - \Delta_X(\varepsilon), \quad \forall \varepsilon \leqslant 2.$

Fie $\| x \| = \| y \| = 1$, $\| x - y \| \geqslant \varepsilon$ şi $x_0^*, y_0^* \in X^*$ astfel încît $\| x_0^* \| = \| y_0^* \| = 1$, $< x_0^*, x + y > = \| x + y \|$, $< y_0^*, x - y > = \| x - y \|$. Avem :

$$2\rho_{X^*}(\tau) = \sup_{\|x^*\| = \|y^*\| = 1} (\| x^* + \tau y^* \| + \| x^* - \tau y^* \| - 2) \geqslant$$

$$\geqslant \| x_0^* + \tau y_0^* \| + \| x_0^* - \tau y_0^* \| - 2 \geqslant < x_0^* + \tau y_0, x > + < x_0^* - \tau y_0^*, y > - 2 =$$

$$= < x_0^*, x + y > + \tau < y_0^*, x - y > - 2 =$$

$$= \| x + y \| + \tau \| x - y \| - 2 \geqslant \| x + y \| + \tau\varepsilon - 2$$

adică :

$$2 - \| x + y \| \geqslant \tau\varepsilon - 2\rho_{X^*}(\tau).$$

Rezultă că:

$$\Delta_X(\varepsilon) \geqslant \frac{\tau\varepsilon}{2} - \rho_{X^*}(\tau).$$

Reciproc, fie $x^*, y^* \in X^*$ cu $\|x^*\| = \|y^*\| = 1$ şi $\eta > 0$. Atunci există $x_0, y_0 \in X$, $\|x_0\| = \|y_0\| = 1$, astfel încît:

$$\|x^* + \tau y^*\| \leqslant <x^*, x_0> + \tau <y^*, x_0> + \eta$$

şi

$$\|x^* - \tau y^*\| \leqslant <x^*, y_0> - \tau <y^*, y_0> + \eta.$$

În plus $|<y^*, x_0 - y_0>| \leqslant 2$. Prin urmare:

$$\|x^* + \tau y^*\| + \|x^* - \tau y^*\| - 2 \leqslant <x^*, x_0 + y_0> + \tau <y^*, x_0 - y_0> -$$
$$-2 + 2\eta \leqslant \|x_0 + y_0\| - 2 + \tau |<y^*, x_0 - y_0>| + 2\eta \leqslant$$
$$\leqslant \tau |<y^*, x_0 - y_0>| - 2\Delta_X(|<y^*, x_0 - y_0>|) + 2\eta \leqslant$$
$$\leqslant 2 \sup_{0<\varepsilon\leqslant 2} \left[\frac{\tau\varepsilon}{2} - \Delta_X(\varepsilon)\right] + 2\eta.$$

Deoarece η este un număr pozitiv arbitrar, rezultă:

$$\rho_{X^*}(\tau) \leqslant \sup_{0<\varepsilon\leqslant 2} [\tau\varepsilon/2 - \Delta_x(\varepsilon)].$$

q.e.d.

TEOREMA 2.3. a) *Un spațiu Banach X este uniform convex dacă și numai dacă X^* este uniform neted;*

b) *Un spațiu Banach X este slab uniform convex dacă și numai dacă X^* este local uniform neted.*

Demonstrație. Vom demonstra doar a) deoarece pentru b) se procedează analog.

Să presupunem X uniform convex, adică $\Delta_X(\varepsilon) > 0$, pentru $0 < \varepsilon \leqslant 2$ şi că ar exista un şir de numere pozitive $\{\tau_n\}_{n\in N}$, astfel încît $\lim_n \tau_n = 0$ şi $\rho_X^*(\tau_n)/\tau_n > \alpha > 0$.

După (4) există un şir de numere pozitive $\{\varepsilon_n\}_{n\in N}$, $0 < \varepsilon_n \leqslant 2$, astfel încît $\frac{\tau_n \varepsilon_n}{2} - \Delta_X(\varepsilon_n) > \alpha\, \tau_n$.

De aici, rezultă : $0 < \Delta_X(\varepsilon_n) \leqslant \tau_n\left(\frac{\varepsilon_n}{2} - \alpha\right)$ şi prin urmare $\varepsilon_n \geqslant \varepsilon_0 = 2\alpha > 0$.

Fie $\{\varepsilon_{n_i}\}_{i\in N}$ un subşir convergent al lui $\{\varepsilon_n\}_{n\in N}$; atunci :

$$\Delta_X(\varepsilon_0) \leqslant \lim_i \Delta_X(\varepsilon_{n_i}) \leqslant \lim_i \left[\tau_{n_i}\left(\frac{\varepsilon n_i}{2} - \alpha\right)\right] = 0$$

ceea ce contrazice ipoteza.

Fie acum X uniform neted, deci $\lim_\tau \frac{\rho_X^*(\tau)}{\tau} = 0$ şi să presupunem că pentru un ε_0, $0 < \varepsilon_0 \leqslant 2$, avem $\Delta_X(\varepsilon_0) = 0$. Atunci :

$$\frac{\rho_X^*(\tau)}{\tau} \geqslant \frac{\varepsilon_0}{2} - \frac{\Delta_X(\varepsilon_0)}{\tau} = \frac{\varepsilon_0}{2}$$

ceea ce nu se poate.

q.e.d.

Corolar. *Un spaţiu Banach X este uniform neted dacă şi numai dacă X^* este uniform convex.*

Se poate arăta că avem $\rho_X(\tau, x) = \sup_{0<\varepsilon\leqslant 2}\left[\frac{\tau\varepsilon}{2} - \Delta_X^*(\varepsilon, ix)\right]$ unde i este injecţia canonică a lui X în X^{**} şi atunci rezultă la fel ca mai sus :

Teorema 2.4. *Un spaţiu Banach X este local uniform neted dacă şi numai dacă X^* este slab uniform convex în $i(x)$, $\forall\, x \in X$.*

Folosind acum rezultatele din capitolul I, §2 referitoare la diferenţiabilitatea normei, obţinem următorul rezultat al lui V.L. Smulian :

Teorema 2.5. *În spaţiul Banach X (respectiv X^*) norma este uniform diferenţiabilă Fréchet dacă şi numai dacă X^* (resp. X) este uniform convex,*

precum şi rezultatul lui D.F. Cudia [56]:

Teorema 2.6. *În spaţiul Banach X (resp. X^*) norma este diferenţiabilă Fréchet dacă şi numai dacă X^* (resp. X) este slab uniform convex în $\forall\, x \in X$ (resp. slab uniform convex).*

Folosind acum propoziţia 2.3, obţinem :

COROLAR. *Dacă X este un spațiu Banach reflexiv local uniform convex, atunci norma în X^* este diferențiabilă Fréchet.*
Vom aminti acum următorul rezultat al lui M. I. Kadec [93]:

Orice spațiu Banach separabil este izomorf cu un spațiu Banach local uniform convex.

Acest rezultat a fost generalizat recent de către S.L. Troianski la spațiile Banach cu bază necondiționată și apoi la o clasă de spații Banach incluzînd spațiile Banach reflexive. Pentru început ne ocupăm de spațiul $c_0(\Gamma)$ introdus în paragraful precedent.

Fie $f \in c_0(\Gamma)$; atunci dacă notăm prin χ_γ funcția caracteristică a mulțimii $\{\gamma\}$, $\gamma \in \Gamma$,

$$f = \sum_{\gamma \in \Gamma} f(\gamma)\, \chi_\gamma .$$

Observăm că dacă f_1 și $f_2 \in c_0(\Gamma)$ sînt astfel încît suporturile lor sînt disjuncte, atunci

$$\|f_1 + t f_2\| = \sup_\gamma |f_1(\gamma) + t f_2(\gamma)| = \sup_\gamma \max\, (|f_1(\gamma)|\ |t|\ |f_2(\gamma)|)$$

$$= \max\, (\|f_1\|,\ |t|\ \|f_2\|)$$

și deci funcția $\varphi(t) = \|f_1 + t f_2\|$ este o funcție crescătoare de $|t|$, $t \in R$.

Fie $\sigma = \{\gamma_i\}_{i \in N} \subset \Gamma$; vom pune

$$R_k^\sigma(f) = \sum_{\gamma \in \Gamma_k} f(\gamma)\, \chi_\gamma, \text{ unde } \Gamma_k = \Gamma - \{\gamma_i\}_{1 \leqslant i \leqslant k}$$

$$F_k^\sigma(f) = 2 \sum_{i=1}^{k} |f(\gamma_i)| \quad S_k^\sigma(f) = \sum_{i=1}^{k} f(\gamma_i)\, \chi_{\gamma_i}$$

$$R^\sigma(f) = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} \|R_k^\sigma(f)\|\ ;\ F^\sigma(f) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} F_k^\sigma(f).$$

Introducem o nouă normă pe $c_0(\Gamma)$;

$$\|f\|_1 = \sup_{\sigma < \Gamma} [R^\sigma(f) + F^\sigma[(f)].$$

Evident

$$\|f\| \leqslant \|f\|_1 \leqslant \|f\| \left(\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} + 2 \sum_{k=0}^{\infty} k\, 2^{-k} \right) = 6 \|f\|.$$

Observăm că avem :

$$(6) \qquad \|f - S_k^\sigma(f)\| \geqslant \|S_m^\sigma(f) - S_k^\sigma(f)\| \;\forall\, m \geqslant k \geqslant 0.$$

Alegerea mulțimii σ se numește normală pentru funcția $f \in c_0(\Gamma)$, dacă din relația

$$|f(\gamma)| \geqslant 2|f(\gamma_k)|, \text{ rezultă } \gamma \in \{\gamma_i\}_{1 \leqslant i \leqslant k-1}.$$

LEMA 2.1. *Pentru orice* $\sigma \subset \Gamma$, *există* σ^* *normală pentru* f *și astfel încît* :

$$R^\sigma(f) + F^\sigma(f) \leqslant R^{\sigma*}(f) + F^{\sigma*}(f).$$

Demonstrație. Fie $\sigma = \{\gamma_i\}_{i \in N} \subset \Gamma$ și k primul indice pentru care există $\gamma \in \Gamma$, astfel încît

$$(7) \qquad |f(\gamma)| > 2\,|f(\gamma_k)| \text{ și } \gamma \notin \{\gamma_i\}_{1 \leqslant i \leqslant k-1}.$$

Dacă $\gamma = \gamma_n$, atunci punem :

$$\sigma_1 = \{\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{k-1}, \gamma_n, \gamma_{k+1}, \ldots, \gamma_{n-1}, \gamma_k, \gamma_{n+1}, \ldots\}.$$

Evident :

$$\|R_i^\sigma(f)\| + F_i^\sigma(f) = \|R_i^{\sigma_1}(f)\| + F_i^{\sigma_1}(f) \quad (i < k,\ i \leqslant n).$$

Dacă $k \leqslant i < n$, avem :

$$\|R_i^\sigma(f)\| \leqslant \|R_i^{\sigma_1}(f) - f(\gamma_k)\chi_{\gamma_k}\| + |f(\gamma)| \leqslant \|R_i^{\sigma_1}(f)\| + |f(\gamma)|,$$

unde am utilizat proprietatea de monotonie a funcției φ introdusă mai sus.

Rezultă acum utilizînd (7) :

$$\|R_i^\sigma(f)\| + F_i^\sigma(f) \leqslant \|R_i^{\sigma_1}(f)\| + F_i^{\sigma_1}(f) \quad k \leqslant i < n$$

Astfel :

$$R^{\sigma}(f) + F^{\sigma}(f) \leqslant R^{\sigma_1}(f) + F^{\sigma_1}(f_1).$$

Dacă $\gamma \notin \sigma$, vom pune $\sigma_1 = \{\beta\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{k-1}, \gamma, \gamma_{k+1}, \ldots\}$; se verifică și în acest caz ușor că are loc inegalitatea din lemă.

Considerînd acum pe σ_1, fie k_1 primul indice pentru care are loc (7) (cu k_1 în loc de k); se construiește analog o mulțime σ_2 și continuînd în acest mod, găsim mulțimea σ^*.

q.e.d.

LEMA 2.2. *Fie* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset c_0(\Gamma)$ *și* $f \in c_0(\Gamma)$, *pentru care* :

$$\lim_n f_n(\gamma) = f(\gamma) \ \forall \gamma \in \Gamma \tag{8}$$

Atunci a) $\lim\limits_n (\|f_n - f\| - \|R_k^{\sigma}(f_n - f)\| = 0 \quad k \geqslant 0$

b) $\lim\limits_n \|R_k^{\sigma}(f)\| \geqslant \|R_k^{\sigma}(f)\| k \geqslant 0.$

Demonstrație. a) Putem presupune $f \equiv 0$. Din (8) rezultă că pentru orice $k \geqslant 1$ avem : $\lim S_k^{\sigma}(f_n) = 0$, de unde a) rezultă ținînd cont de inegalitatea :

$$\|R_k^{\sigma}(f_n)\| - \|f_n\| \leqslant \|S_k^{\sigma}(f_n)\|.$$

Să demonstrăm acum b); fie f și k fixați și fie $m > k$, astfel încît pentru $\varepsilon > 0$, arbitrar, să avem

$$\|R_m^{\sigma}(f)\| \leqslant \frac{\varepsilon}{3} \|R_k^{\sigma}(f)\|,$$

ceea ce se poate datorită faptului că $R_m(f) \xrightarrow[m]{} 0.$

Fie acum un indice n_0 astfel încît pentru $n > n_0$ să avem

$$\|S_p^{\sigma}(f_n - f)\| \leqslant \frac{\varepsilon}{3} \|R_k(f)\| \quad p \leqslant m$$

ceea ce se poate datorită lui (8). Atunci din (6) rezultă

$$\| R_k^\sigma (f_n) \| \geqslant \| S_m^\sigma (f_n) - S_k^\sigma (f_n) \| =$$

$$= \| S_m^\sigma (f) + S_m^\sigma (f_n - f) - S_k^\sigma (f) - S_k^\sigma (f_n - f) \| \geqslant$$

$$\geqslant \| S_m^\sigma (f) - S_k^\sigma (f) + R_m^\sigma (f) \| - \| S_m^\sigma (f_n - f) - R_m^\sigma (f) -$$

$$- S_k^\sigma (f_n - f) \| \geqslant \| S_m^\sigma (f) - S_k^\sigma (f) + R_m^\sigma (f) \| -$$

$$- \| S_m^\sigma (f_n - f) \| - \| S_k^\sigma (f_n - f) \| - \| R_m^\sigma (f) \| \geqslant$$

$$\geqslant \| S_m^\sigma (f) - S_k^\sigma (f) + R_m^\sigma (f) \| - \varepsilon \| R_k^\sigma (f) \| =$$

$$= \| R_k^\sigma (f) \| - \varepsilon \| R_k^\sigma (f) \| = (1 - \varepsilon) \| R_k^\sigma(f) \| \qquad n > n_0$$

ceea ce încheie demonstrația.

q.e.d.

Teorema 2.7. *Dacă pentru șirul* $\{f_n\}_{n \in N} \subset c_0(\Gamma)$, *avem*

$$\text{(9)} \qquad \begin{cases} \lim\limits_n f_n (\gamma) = f(\gamma) & \gamma \in \Gamma \\ \lim\limits_n \| f_n \|_1 = \| f \|_1 \end{cases}$$

atunci $\lim\limits_{n \to \infty} \| f_n - f \|_1 = 0$.

Demonstrație. Să presupunem prin absurd că $\| f_n - f \|_1 > \varepsilon$ pentru n suficient de mare.

Fie $\sigma_0 = \{\gamma_i\}_{i \in N}$ șirul asociat lui f (vezi teorema 1.1); atunci $|f(\gamma_{i+1})| \leqslant |f(\gamma_i)|$ și $f(\gamma) = 0$ dacă $\gamma \notin \sigma_0$. Fie p astfel încît :

$$\| R_p^{\sigma_0} (f) \| \leqslant \frac{\varepsilon}{64}$$

și m astfel încît $2 | f(\gamma_m) | < | f(\gamma_p) |$.

Atunci pentru orice σ normal pentru f, avem

$$\text{(10)} \quad \| R_m^\sigma(f) \| \leqslant \| R_p^{\sigma_0} (f) \| < \frac{\varepsilon}{64} .$$

După definiția lui $||\cdot||_1$ și lema 2.1, există σ normal pentru f, astfel încît :

$$(11) \qquad ||f||_1 - (R^\sigma(f) + F^\sigma(f)) < \frac{\varepsilon}{2^{m+6}}$$

După (9) și lema 2.2, există $n_0 = n_0(\varepsilon)$, astfel încît dacă $n > n_0$, atunci

$$(12) \qquad ||f_n||_1 - ||f||_1 < \frac{\varepsilon}{2^{m+6}}$$

$$(13) \qquad F^\sigma(f) - F^\sigma(f_n) < \frac{\varepsilon}{2^{m+5}}$$

$$(14) \qquad ||f_n - f|| - ||R_m^\sigma(f_n - f)|| < \frac{\varepsilon}{2^4}$$

$$||R_k^\sigma(f_n)|| > ||R_k^\sigma(f)|| - \frac{\varepsilon}{2^{m+7}} \quad k = 0,1, \ldots, m-1.$$

Din ultima inegalitate obținem

$$\sum_{k=0}^{m-1} 2^{-k} ||R_k^\sigma(f_n)|| > \sum_{k=0}^{m-1} 2^{-k} ||R_k^\sigma(f)|| - \frac{\varepsilon}{2^{m+6}}.$$

Din inegalitățile : $||f|| \leqslant ||f||_1 \leqslant 6||f||$ și $||f_n - f||_1 > \varepsilon$

rezultă : $$||f_n - f|| > \frac{\varepsilon}{6}.$$

Din (14) rezultă atunci $||R_m^\sigma(f_n - f)|| > \frac{\varepsilon}{8}$

iar din (10) :

$$(15) \qquad \sum_{k=m}^{\infty} 2^{-k} ||R_k(f_n)|| > 2^{-m} ||R_m^\sigma(f_n)|| \geqslant$$

$$\geqslant 2^{-m} [||R_m^\sigma(f_n - f)|| - ||R_m^\sigma(f)||] \geqslant \frac{\varepsilon}{2^{m+3}} - \frac{\varepsilon}{2^{m+6}}.$$

Aplicînd succesiv (14), (15) şi (10) obţinem :

$$(16)\quad R^{\sigma}(f_n) > \sum_{k=0}^{m-1} 2^{-k} \| R_k^{\sigma}(f) \| + \frac{\varepsilon}{2^{m+3}} - \frac{\varepsilon}{2^{m+5}} > R^{\sigma}(f) + \frac{\varepsilon}{2^{m+4}}\cdot$$

Adunînd (11) şi (12) obţinem

$$\| f_n \|_1 - [R^{\sigma}(f) + F^{\sigma}(f)] < \frac{\varepsilon}{2^{m+5}}$$

de unde rezultă, din definiţia normei $\| \cdot \|_1$

$$[R^{\sigma}(f_n) - R^{\sigma}(f)] + [F^{\sigma}(f_n) - F^{\sigma}(f)] < \frac{\varepsilon}{2^{m+5}}\cdot$$

Din (13) şi din această inegalitate rezultă

$$R^{\sigma}(f_n) < R^{\sigma}(f) + \frac{\varepsilon}{2^{m+4}}$$

care evident contrazice pe (16).

q.e.d.

TEOREMA 2.8. *Pe spaţiul Banach $c_0(\Gamma)$ există o normă echivalentă pentru care el e local uniform convex.*

Demonstraţie. Pentru $f \in c_0(\Gamma)$ avem $f = \sum_{\gamma \in \Gamma} f(\gamma)\chi_{\gamma}$; fie $\sigma = \{\gamma_i\}_{i \in N} \subset \Gamma$; vom pune

$$I(f) = \sup_{\sigma \subset \Gamma} \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} f^2(\gamma_i)}.$$

Se poate observa uşor (a se vedea demonstraţia teoremei 1.1) că supremul este atins cînd $\sigma = \sigma_0 =$ şirul asociat lui f şi astfel funcţionala I se scrie : $I(f) = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} f^2(\gamma_i)}$, unde $\{\gamma_i\}_{i \in N} = \sigma_0$.

Evident $I(f)$ este o funcțională subaditivă și pozitiv omogenă și avem :

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \| f \| \leqslant I(f) \leqslant \| f \|.$$

Introducem pe $c_0(\Gamma)$ o normă echivalentă :

$$\| f \|_0 = \sqrt{\| f \|_1^2 + I^2(f)}.$$

Fie f, $\{f_n\}_{n \in N} \subset c_0(\Gamma)$, $\|f_n\|_0 = \|f\|_0 = 1$ și $\lim\limits_n \| f_n + f \|_0 = 2$; vom arăta că $\lim\limits_n \|f_n - f\|_0 = 0$.

Observăm că avem următoarea egalitate :

$$2(\|f\|_0^2 + \|f_n\|_0^2) - \|f + f_n\|_0^2 =$$
$$= \{2[I^2(f) + I^2(f_n) - I^2(f + f_n)\} + \{2(\|f\|_1^2 + \|f_n\|_1^2) - \|f + f_n\|_1^2\}.$$

Cum expresiile din acolade sînt pozitive, trecînd la limită, obținem :

$$\lim_{n \to \infty} \{2[I^2(f) + I^2(f_n)] - I^2(f + f_n)\} = 0. \tag{17}$$

Dar din egalitatea :

$$2[I^2(f) + I^2(f_n)] - I^2(f + f_n) =$$
$$= \{[I(f) + I(f_n)]^2 - I^2(f + f_n)\} + [I(f) - I(f_n)]^2$$

rezultă :

$$\lim_n I(f_n) = I(f).$$

Fie $\{\gamma_{in}\}_{i \in N}$ șirurile asociate funcțiilor $f_n + f$; atunci (17) se scrie :

$$\lim_{n \to \infty} \Big\{[I^2(f_n) - \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} f_n^2(\gamma_{in})] + [I^2(f) - \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} f^2(\gamma_{in})] +$$
$$+ I^2(f_n) + I^2(f) - 2\sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} f_n(\gamma_{in}) f(\gamma_{in})\Big\} = 0.$$

Cum expresiile din parantezele patrate sînt pozitive, rezultă :

$$\lim_n \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} f_n^2 (\gamma_{in}) = I^2(f) = \lim_n \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} f^2 (\gamma_{in}) =$$

$$= \lim_n \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} f_n (\gamma_{in}) f (\gamma_{in}).$$

Prin urmare avem :

$$\lim_n \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} [f^2 (\gamma_i) - f^2(\gamma_{in})] = 0 \tag{18}$$

$$\lim_n \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} [(f_n (\gamma_{in}) - f (\gamma_{in})]^2 f(\gamma_{in}) = 0.$$

Să notăm prin $B_i (f)=\{\gamma / |f(\gamma)| \geqslant |f(\gamma_i)|\}$; vom arăta că pentru orice i, există N_i, astfel încît dacă $n > N_i$, atunci $\gamma_{in} \in B_i(f)$. Să presupunem prin absurd că aceasta nu ar avea loc ; fie j astfel încît $\gamma_{jn} \notin B_j(f)$, pentru orice n suficient de mare ;

Există $\varepsilon > 0$ astfel încît

$$f^2(\gamma_{jn}) > f^2(\gamma) + \varepsilon, \ \forall \gamma \in B_j (f). \tag{19}$$

Fie $\gamma_j \in \{\gamma_{in}\}_{i \in N}$ pentru n suficient de mare ; atunci $\gamma_j = \gamma_{rn}$, $r > j$ şi

$$\sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} [f^2 (\gamma_i) - f^2(\gamma_{in})] = \sum_{i=j}^{\infty} 2^{-i}[f^2(\gamma_i) - f^2(\gamma_{in})] =$$

$$= (2^{-j} - 2^{-r}) [f^2 (\gamma_j) - f^2 (\gamma_{jn})] + \left\{ \sum_{i=j+1}^{r-1} 2^{-i} [f^2(\gamma_i) - f^2(\gamma_{in})] + \right.$$

$$\left. + 2^{-r} [f^2(\gamma_r) - f^2(\gamma_{in})] + \sum_{i=r+1}^{\infty} 2^{-i} [f^2 (\gamma_i) - f^2 (\gamma_{in})] \right\}.$$

Cum $\{\gamma_i\}_{i=1}^{j} \cap (\{\gamma_{in}\}_{i=j}^{r-1} \cup \{\gamma_{in}\}_{i=r+1}^{\infty}) = \emptyset$, atunci expresiile din paranteze sînt pozitive şi deci

$$(20) \qquad \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} [f^2(\gamma_i) - f^2(\gamma_{in})] \geqslant \frac{\varepsilon}{2^{j+1}}$$

pentru n suficient de mare, ceea ce contrazice (18). Dacă $\gamma_j \notin \{\gamma_{in}\}_{i \in N}$ pentru n suficient de mare, atunci (20) rezultă direct din (19).

Să arătăm că

$$\lim_n f_n(\gamma) = f(\gamma), \quad \forall \gamma \in \Gamma.$$

Întîi să arătăm că aceasta are loc pentru $\gamma \in \{\gamma_i\}_{i \in N}$.

Există n_0 astfel încît pentru $n > n_0$, din $\gamma_{in} \in B_i(f)$, $i \leqslant q$ şi

$$\sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} [f_n(\gamma_{in}) - f(\gamma_{in})]^2 < \frac{\varepsilon^2}{2^q},$$

unde q este numărul elementelor mulţimii $B_j(f)$. Rezultă de aici

$$\{\gamma_{in}\}_{i=1}^{q} = B_q(f) \text{ şi deci } |f_n(\gamma_j) - f(\gamma_j)| < \varepsilon.$$

Fie acum $f(\gamma) = 0$ şi $|f_n(\gamma)| > \varepsilon > 0$, pentru n suficient de mare. Fie ν astfel încît $f^2(\gamma_{\nu+1}) < \frac{\varepsilon^2}{8}$. Atunci

$$(21) \qquad I^2(f) \leqslant \sum_{i=1}^{\nu} 2^{-i} f^2(\gamma_i) + \frac{\varepsilon^2}{2^{\nu+3}}.$$

Fie n_1 astfel încît pentru $n > n_1$ să avem:

$$(22) \qquad \sum_{i=1}^{\nu} 2^{-i} [f^2(\gamma_i) - f_n^2(\gamma_i)] < \frac{\varepsilon^2}{2^{\nu+3}}.$$

Din (21) şi (22) rezultă că:

$$\sum_{i=1}^{\nu} 2^{-i} f_n^2(\gamma_i) > I^2(f) - \frac{\varepsilon^2}{2^{\nu+2}}$$

iar de aici rezultă, folosind faptul că $|f_n(\gamma)| > \varepsilon$:

$$I^2(f_n) \geqslant \sum_{i=1}^{\nu} 2^{-i} f_n(\gamma) + \frac{1}{2^{\nu+1}} f_n(\gamma) > I^2(f) + \frac{\varepsilon^2}{2^{\nu+2}}$$

ceea ce contrazice faptul că $\lim\limits_{n\to\infty} I(f_n) = I(f)$.

Înseamnă că are loc convergenţa : $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(\gamma) = f(\gamma)$ pentru orice $\gamma \in \Gamma$.

Să arătăm că avem şi $\lim\limits_{n} \|f_n\|_1 = \|f\|_1$. Într-adevăr din faptul că :

$$1 = \|f_n\|_0^2 = \|f_n\|^2 + I^2(f_n) = \|f\|^2 + I^2(f)$$

şi cum $I^2(f_n) \xrightarrow[n]{} I^2(f)$, rezultă $\|f_n\|_1 \xrightarrow[n]{} \|f\|_1$.

Atunci teorema 2.7 implică faptul că $\lim\limits_{n} \|f_n - f\|_1 = 0$; normele $\|\cdot\|_1$ şi $\|\cdot\|_0$ fiind echivalente, rezultă $\lim\limits_{n} \|f_n - f\|_0 = 0$ şi prin urmare $\|\cdot\|_0$ este norma local uniform convexă pe $c_0(\Gamma)$ căutată.

q.e.d.

Să trecem la studiul aplicaţiilor de dualitate în spaţiile uniforme convexe.

PROPOZIŢIA 2.7. *Fie X un spaţiu Banach local uniform convex pentru care X^* este strict convex.*

Dacă $\mathfrak{J}$ este o aplicaţie de dualitate pe X şi $\{x_n\}_{n\in N} \subset X$ cu proprietatea că :

$$< \mathfrak{J} x_n - \mathfrak{J} x,\ x_n - x > \xrightarrow[n]{} 0$$

atunci $x_n \xrightarrow[n]{} x$.

Demonstraţie. Avem :

$$< \mathfrak{J} x_n - \mathfrak{J} x,\ x_n - x > = < \mathfrak{J} x_n, x_n > - < \mathfrak{J} x_n, x > - \mathfrak{J} x, x_n > +$$
$$+ < \mathfrak{J} x, x > = (\varphi(\|x_n\|)\|x_n\| - \varphi(\|x\|1)\|x\| - \|x\|\varphi(\|x_n\|) -$$
$$- \|x_n\|\varphi(\|x\|)) + (\|\mathfrak{J} x\|\|x_n\| - < \mathfrak{J} x, x_n >) + (\|\mathfrak{J} x_n\|\|x\|) -$$
$$- < \mathfrak{J} x_n, x >) = (\varphi(\|x_n\|) - \varphi(\|x\|))(\|x_n\| - \|x\|) +$$
$$(\|\mathfrak{J} x\|\|x_n\| - < \mathfrak{J} x, x_n >) + (\|\mathfrak{J} x_n\|\|x\| - < \mathfrak{J} x_n, x >).$$

Fiecare paranteză fiind pozitivă și suma lor tinzînd la zero, rezultă $\|x_n\| \xrightarrow[n]{} \|x\|$ și

$$< \mathfrak{J}x, x_n > \xrightarrow[n]{} \|\mathfrak{J}x\| \, \|x\| = < \mathfrak{J}x, x >.$$

Atunci :

$$< \mathfrak{J}x, x_n + x > = < \mathfrak{J}x, x_n > + < \mathfrak{J}x, x > \xrightarrow[n]{} 2\|\mathfrak{J}x\| \, \|x\|.$$

Pe de altă parte :

$$< \mathfrak{J}x, x_n + x > \leqslant \|x_n + x\| \, \|\mathfrak{J}x\| \leqslant (\|x_n\| + \|x\|)\|\mathfrak{J}x\|,$$

de unde

$$\lim_n < \mathfrak{J}x, x_n + x > = 2\|\mathfrak{J}x\|\|x\| \leqslant \underline{\lim}_n \|x_n + x\| \, \|\mathfrak{J}x\| \leqslant$$

$$\leqslant \overline{\lim}_n \|x_n + x\| \, \|\mathfrak{J}x\| \leqslant \lim_n \; (\|x_n\| + \|x\|)\|\mathfrak{J}x\| = 2\|x\| \, \|\mathfrak{J}x\|.$$

Prin urmare $\|x_n + x\| \xrightarrow[n]{} 2\|x\|$ și local uniform convexitatea lui X, implică : $\|x_n - x\| \xrightarrow[n]{} 0.$

q.e.d.

TEOREMA 2.9. *Fie X un spațiu Banach ; o aplicație de dualitate $\mathfrak{J}$ este univocă și continuă în topologiile normelor dacă și numai dacă norma pe X este diferențiabilă Fréchet.*

Demonstrație. Fie norma pe X diferențiabilă Fréchet ; atunci, după teorema 2.6 rezultă că X^* este slab uniform convex pentru orice ix, $x \in X$.

Să presupunem că $x_n \xrightarrow[n]{} x$ și fie $u_n = \dfrac{x_n}{\|x_n\|}$

$$u = \frac{x}{\|x\|} \; ; \text{ atunci } \|u_n\| = \|u\| = 1 \text{ și } u_n \xrightarrow[n]{} u \text{ iar}$$

$$< \mathfrak{J}u_n + \mathfrak{J}u, u > = < \mathfrak{J}u_n, u_n > + < \mathfrak{J}u, u > -$$

$$- < \mathfrak{J}u_n, u_n - u > \geqslant 2 - \|u_n - u\|.$$

Prin urmare :

$$\lim_{n} < \mathfrak{J} u_n + \mathfrak{J} u, u > \geqslant 2$$

şi atunci slab uniform convexitatea lui X în u, implică faptul că $\| \mathfrak{J} u_n - \mathfrak{J} u \| \to 0$.

Invers, dacă $\mathfrak{J}$ este univocă rezultă că norma pe X este diferenţiabilă Gateux ; dacă $\mathfrak{J}$ este continuă, atunci diferenţiala Gateaux a normei este continuă, deci norma este diferenţiabilă Fréchet.

q.e.d.

TEOREMA 2.10. *Fie X un spaţiu Banach şi $\mathfrak{J}$ o aplicaţie de dualitate*; *X^* este uniform convex dacă şi numai dacă $\mathfrak{J}$ este univocă şi uniform continuă pe mulţimile mărginite din X, considerînd pe X şi X^* topologiile normei.*

Demonstraţie. Dacă X^* este uniform convex, atunci după teorema 2.5, norma pe X este uniform diferenţiabilă Fréchet şi $\mathfrak{J}$ este conform teoremei (3.1 cap. I) lui Asplund, derivata Fréchet a funcţiei ψ $((\|x\|)$. Atunci uniform convexitatea lui $\mathfrak{J}$ pe mulţimile mărginite este o consecinţă a ipotezelor făcute şi propoziţiei 2.2. capitolul I.

Invers, dacă $\mathfrak{J}$ este univocă, rezultă că norma pe X este diferenţiabilă Gateaux iar $\mathfrak{J}$ este derivata Gateaux a funcţiei ψ $(\|x\|)$.

Astfel, ipotezele implică faptul că norma este uniform diferenţiabilă Fréchet şi din teorema 2.5. rezultă uniform convexitatea lui X^*.

q.e.d.

Referinţe. Spaţiile uniform convexe au fost introduse de A. Clarkson [45] iar spaţiile local uniform convexe de către A. R. Lovaglia [108]. R. Milman [113] a arătat că orice spaţiu uniform convex este reflexiv iar M. Day [60] a dat un exemplu de spaţiu Banach separabil reflexiv neizomorf cu nici un spaţiu uniform convex. Studiul acestor clase de spaţii cu ajutorul modulelor de convexitate şi netezimea a fost iniţiat de I. Lindenstrauss [104] şi continuat de D. F. Cudia [55], [56], G. Godini [75]. Teorema 2.5 este a lui V. Smulian [166] însă demonstraţia e a lui I. Lindenstrauss [104]. Teorema 2.8 a lui S. L. Troianski poate fi găsită în [172].

§ 3. SPAŢII BANACH REFLEXIVE

Ne vom ocupa în acest paragraf cu studiul proprietăţilor geometrice ale spaţiilor Banach reflexive şi cu consecinţele acestora asupra aplicaţiilor de dualitate, menţionînd că aceasta este clasa de spaţii cea mai semnificativă în studiul operatorilor neliniari.

PROPOZIŢIA 3.1 *Fie X un spaţiu Banach reflexiv şi $K \subset X$ o mulţime închisă şi convexă; există cel puţin un punct $x_0 \in K$ astfel încît:*

$$\|x_0\| = \min_{x \in K} \|x\|$$

iar dacă spaţiul este şi strict convex, atunci acest punct este unic.

Demonstraţie. Fie $m = \min_{x \in K} \|x\|$ şi $x_n \in X$ astfel încît $\|x_n\| \underset{n}{\rightarrow} m$; există un subşir $\{x_{n'}\}_{n'}$, astfel încît $x_{n'} \underset{n'}{\rightharpoonup} x_0$ iar $x_0 \in K$, aceasta fiind închisă şi convexă. În plus, din

$$\|x_0\| \leqslant \underline{\lim}_{n'} \|x_{n'}\| = m, \text{ rezultă } \|x_0\| = m.$$

Fie acum X reflexiv şi strict convex şi să presupunem că ar exista $x_0 \neq y_0$, x_0, $y_0 \in K$, astfel încît

$$\|x_0\| = \|y_0\| = m; \text{ atunci, cum } \lambda x_0 + (1-\lambda)\, y_0 \in K$$

pentru orice $\lambda \in [0, 1]$, rezultă : $\|\lambda x_0 + (1-\lambda)\, y_0\| = m$, ceea ce contrazice ipoteza de strict convexitate a lui X.

q.e.d.

PROPOZIŢIA 3.2. *Fie X un spaţiu Banach reflexiv; X este strict convex (respectiv neted) dacă şi numai dacă X^* este neted (respectiv strict convex).*

Demonstraţie. Cum suficienţa este dată de propoziţia 1.2, avem de demonstrat numai necesitatea.

Dacă X este reflexiv şi $x^* \in X^*$, există, după teorema Hahn-Banach, cel puţin un $x \in X = X^{**}$, cu $\|x\| = 1$ şi $< x^*, x > = \|x^*\|$; dacă X este şi strict convex, atunci acest punct este unic, conform propoziţiei 1.1. iv), deci X^* este neted.

Dacă X este reflexiv şi neted, se verifică uşor că pentru X^* are loc proprietatea iv) din propoziţia 1.1 şi deci X este strict convex.

q.e.d.

Vom demonstra în continuare următorul rezultat important al lui I. Lindenstrauss [105].

TEOREMA 3.1. *Fie X un spaţiu Banach reflexiv; există atunci un operator injectiv şi mărginit de la X în $c_0(\Gamma)$ pentru o anumită mulţime Γ.*

Pentru demonstrarea acestei teoreme sînt necesare o serie de leme.

LEMA 3.1. *Fie X un spaţiu Banach de dimensiune k; există vectorii $u_1, u_2, \ldots, u_k$, cu $\|u_i\|=1$, $1 \leqslant i \leqslant k$, astfel încît pentru orice $\{\lambda_i\}_{1\leqslant i\leqslant k}$, $\lambda_i \in R$, să avem*

$$\left\| \sum_{i=1}^{k} \lambda_i u_i \right\| \geqslant \frac{1}{k^2} \left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i^2 \right)^{1/2}. \tag{1}$$

Demonstraţie. Vom demonstra (1) prin inducţie; pentru $k = 1$, afirmaţia este evidentă; să presupunem că în orice spaţiu $k-1$ dimensional există vectorii $u_1, u_2, \ldots, u_{k-1}$ astfel încît să avem:

$$\left\| \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i u_i \right\| \geqslant \frac{1}{(k-1)^2} \left(\sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i^2 \right)^{1/2}. \tag{2}$$

Aceasta implică în particular că $u_1, u_2, \ldots, u_{k-1}$ sînt liniar independenţi. Fie X_0 subspaţiul $k-1$ dimensional generat de $\{u_1, u_2, \ldots, u_{k-1}\}$ şi fie u_k cu $\|u_k\| = 1$ şi dist $(u_k, X_0) = 1$, atunci pentru orice $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{k-1}$ reali avem:

$$\left\| u_k + \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i u_i \right\| \geqslant 1, \text{ ceea ce implică:}$$

$\left\| \sum_{i=1}^{k} \lambda_i u_i \right\| \geqslant |\lambda_k|$ pentru orice $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ reali. Prin urmare, dacă $|\lambda_k| \geqslant \frac{1}{k^2} \left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i^2 \right)^{1/2}$, atunci proprietatea (1) e adevărată şi pentru k.

Să presupunem deci că $|\lambda_k| < \frac{1}{k^2}\left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i^2\right)^{1/2}$; aceasta înseamnă

că

$$\lambda_k^2 < \frac{\sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i^2}{k^4 - 1}.$$

Avem: $\left\| \sum_{i=1}^{k} \lambda_i u_i \right\| \geqslant \left\| \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i u_i \right\| - |\lambda_k| \geqslant$

$$\geqslant \frac{1}{(k-1)^2}\left(\sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i^2\right)^{1/2} - \frac{1}{k^2}\left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i^2\right)^{1/2}$$

şi deci totul revine la a arăta că

$$\frac{1}{(k-1)^2}\left(\sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i^2\right)^{1/2} \geqslant \frac{2}{k^2}\left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i^2\right)^{1/2},$$

sau că

$$\lambda_k^2 \leqslant \left(\frac{k^4}{4(k-1)^4} - 1\right)\left(\sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i^2\right)$$

ori aceasta are loc dacă, de exemplu $\frac{1}{k^4 - 1} \leqslant \frac{k^4}{4(k-1)^4} - 1$ ceea ce este adevărat pentru orice $k > 1$.

q.e.d.

LEMA 3.2. *Fie X un spaţiu Banach fie X_0 un subspaţiu finit dimensional al lui X; fie $k_0 \in N$ şi $\varepsilon > 0$; atunci există un subspaţiu finit dimensional Z al lui X, $Z \supset X_0$ astfel încît pentru orice subspaţiu Y al lui X cu $Y \supset X_0$ şi dim $Y/X_0 = k_0$ să existe un operator liniar mărginit $T : Y \to Z$,* cu $\|T\| \leqslant 1 + \varepsilon$ *şi $Tx = x$ pentru orice $x \in X_0$.*

Demonstraţie. Fie P o proiecţie liniară mărginită a lui X pe X_0 *şi* $U = (I-P)X$; *fie* $M > 0$, astfel încît

(3) $$M + k_{0/M-k_0} < 1 + \varepsilon \text{ şi } k_0^2\,(2k_0 + 3)\,\|I - P\| < M\varepsilon$$

şi $\{x_k\}_{1\leqslant k\leqslant m}$ o mulţime finită în X_0 astfel încît pentru orice $x\in X_0$ cu $\|x\|\leqslant M$, să existe k astfel încît $\|x-x_k\|<M^{-1}$. Fie $\mathcal{S}_{k_0}$ sfera de rază 1 în R^{k_0}, adică

$$\mathcal{S}_{k_0}=\left\{\lambda=(\lambda_1,\ldots\lambda_{k_0});\ \sum_{i=1}^{k_0}\lambda_i^2\leqslant 1\right\}\text{ şi }\{\lambda^j\}_{1\leqslant j\leqslant p}$$

o mulţime finită a lui $\mathcal{S}_{k_0}$ cu proprietatea că pentru orice $\lambda\in\mathcal{S}_{k_0}$, există j astfel încît $\|\lambda-\lambda^j\|\leqslant M^{-1}$.

Fie $S_U=\{u\in U,\ \ \|u\|\leqslant 1\}$ şi $f:\underbrace{S_U\times S_U\ldots\times S_U}_{k_0\text{ ori}}\to R^{mp}$o aplicaţie definită astfel:

$$f_{k,j}(u_1,\ldots,u_{k_0})=\|\sum_{i=1}^{k_0}\lambda_i^j u_i+x_k\|\ 1\leqslant k\leqslant m,\ 1\leqslant j\leqslant p.$$

Vom alege acum k_0q_0 elemente $\{u_i^l\}$, $1\leqslant l\leqslant q$, $1\leqslant i\leqslant k_0$ în S_U, astfel încît pentru orice $(u_1,u_2,\ldots,u_{k_0})\in S_U\times\ldots\times S_U$ să existe un l astfel încît:

$$(4)\quad |f_{k,j}(u_1,\ldots,u_{k_0})-f_{k,j}(u_1^l,\ldots,u_{k_0}^l)|<M^{-1}1\leqslant k\leqslant m,1\leqslant j\leqslant p.$$

Fie Z subspaţiul lui X generat de $X_0\cup\{u_i^l\}$, $1\leqslant l\leqslant q$, $1\leqslant i\leqslant k_0$; acesta este subspaţiul căutat.

Într-adevăr, fie $Y\subset X$ cu $X_0\subset Y$ şi $\dim Y/X_0=k_0$.

Atunci după lema 2.1, există vectorii $\{u_i\}_{1\leqslant i\leqslant k_0}\subset U$ cu $\|u_i\|=1$, verificînd:

$$(5)\qquad \|\sum_{i=1}^{k_0}\lambda_i u_i\|\geqslant k_0^{-2}\left(\sum_{i=1}^{k_0}\lambda_i^2\right)^{1/2},\ \text{pentru orice } \{\lambda_i\}_{1\leqslant i\leqslant k_0}$$

şi astfel încît Y să fie generat de $X_0\cup\{u_i\}_{1\leqslant i\leqslant k_0}$.

Fie l astfel încît (4) să aibă loc pentru aceşti $u_1,\ldots,u_{k_0}$ şi să definim $T:Y\to Z$ astfel:

$$T\left(\sum_{i}^{k_0}\lambda_i u_i+x\right)=\sum_{i=1}^{k_0}\lambda_i u_i^l+x,\ \forall x\in X_0\text{ şi }\lambda_i\text{ reali.}$$

Să verificăm că $\|T\| \leqslant 1 + \varepsilon$, adică că pentru orice

$\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_{k_0}) \in \mathcal{S}_{k_0}$ şi $x \in X_0$ avem :

$$\|\sum_{i=1}^{k_0} \lambda_i u_i^l + x\| \leqslant (1 + \varepsilon)\|\sum_{i=1}^{k_0} \lambda_i u_i + x\|. \tag{6}$$

Să presupunem mai întîi că $\|x\| > M$; atunci

$$\|\sum_{i=1}^{k_0} \lambda_i u_i^l + x\| \leqslant \sum_{i=1}^{k_0} |\lambda_i| + \|x\| \leqslant k_0 + \|x\|$$

şi

$$\|\sum_{i=1}^{k_0} \lambda_i u_i + x\| \geqslant \|x\| - \|\sum_{i=1}^{k_0} \lambda_i u_i\| \geqslant \|x\| - k_0$$

şi deci dacă $\|x\| + k_0 \leqslant (\|x\| - k_0)(1 + \varepsilon)$, rezultă (6).

Dar această inegalitate rezultă pentru $\|x\| > M$ din (3), ținînd cont de faptul că funcția $\|x\| \to \dfrac{\|x\| + k_0}{\|x\| - k_0}$ este descrescătoare.

Fie acum $\|x\| < M$ şi k şi j astfel încît $\|x - x_k\| < M^{-1}$ şi $\|\lambda^j - \lambda\| < M^{-1}$. Atunci avem :

$$\|\sum_{i=1}^{k_0} \lambda_i u_i^l + x\| = \|\sum_{i=1}^{k_0} \lambda_i^j u_i^l + x_k + (x - x_k) + \sum_{i=1}^{k_0} (\lambda_i - \lambda_l^j) u_i^l\| \leqslant \tag{7}$$

$$\leqslant f_{k,j}(u_1^l, \ldots, u_{k_0}^l) + \|x - x_k\| + \sum_{i=1}^{k_0} |\lambda_i - \lambda_i^j| \leqslant$$

$$\leqslant f_{k,j}(u_1^l, u_{k_0}^l) + (k_0 + 1) M^{-1}$$

şi analog.

$$\|\sum_{i=1}^{k_0} \lambda_i u_i^l + x\| \geqslant f_{k,j}(u_1, \ldots, u_{k_0}) - (k_0 + 1) M^{-1}. \tag{8}$$

Utilizînd inegalitatea (4), din (7) şi (8) găsim:

$$(9) \qquad \|\sum_{i=1}^{k_0} \lambda_i u_i^l + x\| \leqslant \sum_{i=1}^{k_0} \lambda_i u_i + x\| + (2k_0 + 3)\, M^{-1}.$$

În sfîrşit, observăm că are loc:

$$1 = \sum_{i=1}^{k_0} \lambda_i^2 \leqslant k_0^2 \|\sum_{i=1}^{k_0} \lambda_i u_i\| = k_0^2 \|(I - P)\left(\sum_{i=1}^{k_0} \lambda_i u_i + x\right)\| \leqslant$$

$$\leqslant k_0^2 \| I - P \| \| \sum_{i=1}^{k_0} \lambda_i u_i + x\|$$

şi acum constatăm că (6) are loc pentru $\|x\| < M$, dacă

$$(2k_0 + 3)\, M^{-1} \leqslant \varepsilon / k_0^2 \, \|I - P\|$$

ceea ce are loc datorită alegerii lui M prin (2).

q.e.d.

LEMA 3.3. *Fie X un spaţiu Banach reflexiv şi X_0 un spaţiu finit dimensional al său. Atunci există un operator liniar $T : X \to X$ cu $\|T\| = 1$, al cărui codomeniu este separabil şi $Tx = x$, $\forall x \in X_0$.*

Demonstraţie. Fie $Z_n \supset X_0$, $n = 1, 2, \ldots$ subspaţiile date de lema 3.2 pentru $k_0 = n$ şi $\varepsilon = \dfrac{1}{n}$ şi fie Z subspaţiul închis al lui X generat de $\bigcup_{n=1}^{\infty} Z_n$; fie Y un subspaţiu finit dimensional al lui X, $Y \supset X_0$ şi $\dim Y/X_0 = n$; există un operator liniar $T_Y : Y \to Z$ cu $T_Y x = x$, pentru orice $x \in T_0$ şi $\| T_Y \| \leqslant 1 + n^{-1}$. Putem extinde pe T_Y la o aplicaţie (neliniară) $\widetilde{T}_Y : X \to Z$, punînd $\widetilde{T}_Y x = 0$ pentru $x \in X \setminus Y$. Obţinem astfel un şir generalizat $\{\widetilde{T}_Y\}_{\dim Y < +\infty}$ în spaţiul aplicaţiilor de la X în Z, considerat cu topologia convergenţei punctuale cînd pe Z este luată topologia slabă (topologia operatorială slabă).

Cum X este reflexiv, ca o consecinţă a teoremei lui Tihonov, rezultă că există un subşir generalizat $\{\widetilde{T}_{Y'}\}_{\dim Y' < \infty}$ convergent în topologia operatorială slabă către o aplicaţie $T : X \to Z$. Evident

$Tx = x$, $\forall x \in X_0$ iar din $\|Tx\| \leqslant \underline{\lim}_{Y'} \|T_{Y'}x\| \leqslant \|x\|$ rezultă $\|T\| = 1$. Din faptul că $T_{Y'}$ este liniar pe Y', rezultă liniaritatea lui T.

q.e.d.

LEMA 3 4, *Fie X un spațiu Banach reflexiv, $\{x_i\}_{1 \leqslant i \leqslant n} \subset X$, $\{f_j\}_{1 \leqslant j \leqslant m} \subset X^*$ și $\varepsilon > 0$ fixați; atunci există un operator liniar mărginit $T: X \to X$ cu $\|T\| = 1$, astfel încît: $Tx_i = x_i$, $\forall\, i \leqslant n$ și*

$$\|T^* f_j - f_j\| < \varepsilon, \forall\, 1 \leqslant j \leqslant m$$

și pentru care TX este separabil.

Demonstrație. Fie pentru orice subspațiu finit dimension al $\widetilde{Y}$, care conține elementele x_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, operatorul $T_{\widetilde{Y}}$; $X \to X$ dat de lema precedentă ; avem $T_{\widetilde{Y}} = x$, $\forall x \in \widetilde{Y}$ iar șirul generalizat$\{T_{\widetilde{Y}}\}_{\widetilde{Y}}$ conține un subșir generalizat $\{T_{\widetilde{Y}}\}_{\widetilde{Y}}$, convergent către operatorul identitate pe X. Pe de altă parte și $\{T^*_{\widetilde{Y}}\}_{Y'}$, converge către operatorul identitate pe X^* în topologia operatorială slabă corespunzătoare ; atunci există un șir generalizat $\{T^*_{\widetilde{Y}''}\}_{\widetilde{Y}''}$ convergent în topologia operatorială tare către identitatea pe X, format din combinații convexe finite ale șirului generalizat $\{T^*_{\widetilde{Y}'}\}_{\widetilde{Y}'}$ (aceasta datorită faptului că avem relațiile : $w_0 =$ *topologia operatorială slabă* $\leqslant s_0 =$ *topologia operatorială tare* $\leqslant$ *topologia Mackey asociată lui wo* și prin urmare K fiind o mulțime convexă $K^{-wo} = K^{-so}$).

Atunci pentru $\varepsilon > 0$ și $\{f_j\}_{1 \leqslant j \leqslant m}$ dați, există $T^*_{\widetilde{Y}''} = T^*$ astfel încît $\|T^* f_j - f_j\| \leqslant \varepsilon$, $1 \leqslant j \leqslant m$ iar T are evident și celelalte proprietăți cerute.

q.e.d.

PROPOZIȚIA 3.3. *Fie X un spațiu Banach reflexiv și Y, resp. Z, subspații separabile ale lui X, respectiv X^*.*

Atunci există un subspațiu separabil W al lui X, $W \supset Y$ și o proiecție liniară P a lui X pe W cu $\|P\| = 1$ și $P^* f = f$, $\forall f \in Z$.

Demonstrație. Fie $\{f_j\}_{j \in N}$ o submulțime densă a lui Z. După lema 3.4 putem construi, inductiv, un șir de subspații separabile ale lui X, $\{Y^n\}_{n \in N}$ și un șir de operatori liniari $T^n : X \to Y^n$, $T^n x_i^k = x_i^k$, $1 \leqslant i \leqslant n$, $0 \leqslant k \leqslant n-1$, $n \in N$, unde $\{x_i^k\}_{i \in N}$ este o submulțime densă a lui Y^k iar $Y^0 = Y$, $\|T^n\| = s$ și $\|T^{n*} f_j - f_j\| \leqslant \frac{1}{n}$, $1 \leqslant j \leqslant n$.

Fie W spațiul liniar închis generat de $\bigcup_{n=0}^{\infty} Y^n$; șirul $\{T^n\}_{n \in N}$ conține un subșir convergent către o limită $P : X \to W$ care are proprietățile cerute. Într-adevăr, $\|P\|=1$ și $P^*f=f$, $\forall f \in Z$ iar pentru $w \in W$, avem $Pw=w$ din modul în care au fost construiți operatorii T^n.

q.e.d.

DEFINIȚIA 3.1. *Se numește cardinal de densitate al unui spațiu Banach cel mai mic număr cardinal* $\mathfrak{m}$ *pentru care există o submulțime densă a lui* X, *de cardinal* $\mathfrak{m}$.

PROPOZIȚIA 3.4. *Fie* X *un spațiu Banach reflexiv și* Y, *resp.* Z, *subspațiu al lui* X, *resp.* X^*, *avînd un cardinal de densitate* $\leqslant \mathfrak{m}$ *Atunci există un subspațiu* $W \supset Y$ *al lui* X *și o proiecție* P *a lui* X *pe* W *astfel încît* $\|P\|=1$ *și* $P^*f=f$, $\forall f \in Z$.

Demonstrație. Vom demonstra propoziția prin inducție transfinită ; afirmația este adevărată pentru $\aleph_0$ conform propoziției precedente. Să presupunem că ea este adevărată pentru toate numerele cardinale $< \mathfrak{m}$.

Fie Ω mulțimea bine ordonată a tuturor numerelor ordinale al căror cardinal este $< \mathfrak{m}$.

Există atunci subspațiile $\{Y_\alpha\}_{\alpha\in\Omega}$ ale lui Y, și $\{Z_\alpha\}_{\alpha\in\Omega}$ al lui Z astfel încît pentru $\alpha<\beta$, $Y_\alpha \subset Y_\beta$, $Z_\alpha \subset Z_\beta$, $Y=\overline{\bigcup_{\alpha\in\Omega} Y_\alpha}$, $Z=\overline{\bigcup_{\alpha\in\Omega} Z_\alpha}$ iar cardinalul de densitate al fiecărui Y_α și Z_α este cel mult egal cu cardinalul lui α, pentru α infinit.

După ipoteza de inducție, putem construi inductiv pentru orice $\alpha \in \Omega$, o proiecție P_α de la X într-un subspațiu W_α, $W_\alpha \supset Y_\alpha \cup (\bigcup_{\beta<\alpha} W_\beta)$, astfel încît $P_\alpha^* = I^*$ pe Z_α și cardinalul de densitate al lui W_α să fie cel mult egal cu cardinalul lui α, pentru α infinit. Fie P limita în topologia operatorială slabă a unui subșir generalizat al lui $\{P_\alpha\}_{\alpha\in\Omega}$; atunci P este o proiecție de la X pe $W=\overline{\bigcup_{\alpha\in\Omega} W_\alpha}$ care are proprietățile cerute.

q.e.d.

LEMA 3.5. (Lorch). *Fie* X *un spațiu Banach reflexiv,* α_0 *un număr cardinal și* Ω *mulțimea bine ordonată a tuturor ordinalelor* $\leqslant \alpha_0$; *să presupunem că pentru orice* $\alpha \in \Omega$, *există o proiecție* $P_\alpha ; X \to X$ *cu* $\|P_\alpha\| \leqslant 1$ *și* $P_\alpha P_\beta = P_{\min(\alpha,\beta)}$ *pentru orice* α *și* β ; *atunci mulțimea* $\{\alpha ; \|P_{\alpha+1}x - P_\alpha x\| \geqslant \varepsilon\}$ *este finită pentru orice* $x \in X$ *și* $\varepsilon > 0$.

Demonstrație Să presupunem prin absurd că există $\varepsilon > 0$ și $x_0 \in X$ și un șir de ordinale $\{\alpha_i\}_{i \in N}$, astfel încît $\alpha_{i+1} > \alpha_i + 1$ și

$\| P_{\alpha_{i+1}} x_0 - P_{\alpha_i} x_0 \| \geqslant \varepsilon$. Fie $P_{2i-1} = P_{\alpha_i}$ și $P_{2i} = P_{\alpha_{i+1}}$ $i = 1, 2, \ldots$

Evident $P_i P_j = P_{\min(i,j)}$ pentru orice i și j. Fie P_∞ limita unui subșir al lui $\{P_i\}_{i \in N}$ în topologia operatorială slabă; P_∞ este o proiecție a lui X pe $Y = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} P_i X$ și $P_i P_\infty = P_i$ pentru orice i; dar $\lim\limits_{j} \| P_j x - x \| = 0$ pentru orice $x \in Y$, deoarece are loc $\| P_j x - x \| = 0$ dacă $x \in P_i X$ și $j > i$
Atunci

$$\lim_{j \to \infty} \| P_j x_0 - P_\infty x_0 \| = \lim_{j \to \infty} \| P_j P_\infty x_0 - P_\infty x_0 \| = 0$$

ceea ce contrazice presupunerea că $\| P_{2i} x_0 - P_{2i-1} x_0 \| \geqslant \varepsilon, \forall i$.

q.e.d.

Demonstrația teoremei 3.1. Se va face prin inducție transfinită. Fie X separabil; X fiind reflexiv, X^* este separabil și fie atunci $\{x_n^*\}_{n \in N}$ un șir dens în sfera unitate din X^*.

Fie pentru orice $x \in X$ și orice $n \in N$:

$$(Tx)(n) = \frac{1}{n} < x_n^*, x >.$$

Atunci $|(Tx)(n)| \leqslant \frac{1}{n} \|x\|$ și deci $\varepsilon > 0$ fiind dat, $(Tx)(n) \geqslant \varepsilon$ doar pentru un număr finit de n.

Prin urmare formula de mai sus definește o aplicație

$$T : X \to c_0 = c_0(N) \text{; în plus } \|T\| \leqslant 1 \text{ și } Tx = 0 \Rightarrow < x_n^*, x > = 0$$

$$\forall n \in N \Rightarrow < x^*, x > = 0 \quad \forall x^* \in X \text{ cu } \| x^* \| \leqslant 1 \Rightarrow x = 0.$$

Fie $\mathfrak{m}$ un număr cardinal și să presupunem că teorema are loc pentru toate spațiile Banach cu cardinalul de densitate $< \mathfrak{m}$. Fie Ω mulțimea bine ordonată a tuturor numerelor ordinale al căror cardinal este mai mic ca $\mathfrak{m}$. Putem construi inductiv, pentru orice $\alpha \in \Omega$ un subspaţiu Y_α şi o proiecţie P_α a lui X pe Y_α astfel încît

a) $\| P_\alpha \| = 1$

b) $P_\alpha P_\beta = P_{(\min \alpha, \beta)}$, $\forall\ \alpha, \beta \in \Omega$

c) Pentru orice cardinal limită α, P_α este limita în topologia operatorială slabă a unui subşir generalizat $\{P_\beta\}_{\beta<\alpha}$

d) $X = \overline{\bigcup_{\alpha\in\Omega} Y_\alpha}$

e) Cardinalul de densitate al lui Y_α este cel mult egal cu cardinalul lui α, pentru α infinit.

Într-adevăr să presupunem că am construit pentru orice $\beta \in \Omega$, $\beta < \alpha$ subspaţiile Y_β şi proiecţiile P_β cu proprietăţile a), b), c) d) şi e)

Vom deosebi două cazuri:

I) α nu este număr ordinal limită; există deci $\alpha-1$. Fie atunci $y_0 \in X/Y_{\alpha-1}$; după propoziţia 3.4. există un subspaţiu Y_α al lui X, $Y_\alpha \subset Y_{\alpha-1} \cup \{y_0\}$ şi o proiecţie P_α a lui X pe Y_α, astfel încît cardinalul de densitate al lui Y_α să fie cel mult egal cu cardinalul lui α, în plus $P_\alpha^* f = f$ pentru orice $f \in {}^*_{\alpha-1}X$. Rezultă că avem: $P_\alpha^*\ P_{\alpha-1}^* = P_{\alpha-1}^*$ şi deci $P_{\alpha-1}\ P_\alpha = P_{\alpha-1} = P_\alpha P_{\alpha-1}$, ultima egalitate rezultînd din incluziunea $Y_{\alpha-1} \subset Y_\alpha$.

II) Dacă α este un număr ordinal limită, vom lua P_α drept limita în topologia operatorială slabă a unui subşir al şirului generalizat $\{P_\beta\}_{\alpha<\beta}$ iar $Y^\alpha = \overline{\bigcup_{\alpha<\beta} Y_\beta}$.

După ipoteza de inducţie există pentru orice $\alpha \in \Omega$, o mulţime Γ_α şi un operator liniar, injectiv $T_\alpha : Y_\alpha \to c_0(\Gamma_\alpha)$ cu $\| T_\alpha \| \leqslant 1$. Fie $\Gamma = \bigcup_{\alpha\in\Omega} \Gamma_\alpha$ (reuniune disjunctivă) şi să definim operatorul $T : X \to c_0(\Gamma)$ astfel,

$$(Tx)(\gamma) = (T_1 P_1 x)(\gamma) \text{ dacă } \gamma \in \Gamma_1$$

$$(Tx)(\gamma) = [R T_{\alpha+1}(P_{\alpha+1}x - P_\alpha x)](\gamma) \text{ dacă } \gamma \in \Gamma_{\alpha+1}.$$

Fie $|(Tx)(\gamma)| \geqslant \varepsilon$ pentru un $x \in X$ şi $\varepsilon > 0$; dacă $\gamma \in \Gamma_{\alpha+1}$, atunci rezultă $\| P_{\alpha+1}\ x - P_\alpha\ x \| \geqslant \varepsilon$ şi conform lemei 3.5. γ nu poate să aparţină decît la un număr finit de mulţimi $\Gamma_{\alpha+1}$ şi faptul că $Tx \in c_0(\Gamma_{\alpha+1})$ este o consecinţă a faptului că $T_{\alpha+1}\ y \in c_0(\Gamma_{\alpha+1})$, $\forall y \in X$.

Să arătăm în încheiere că T este injectiv: fie $x \in X$ astfel încît $(Tx)(\gamma) = 0$, $\forall \gamma \in \Gamma$; rezultă atunci, $T_{\alpha+1}$ fiind injectiv că avem:

$P_1 x = 0$ şi $P_{\alpha+1}\ x = P\alpha x$, $\forall\ \alpha \in \Omega$, $\alpha \neq 1$.

Vom demonstra prin inducție transfinită că $P_\alpha x=0$, $\forall \alpha \in \Omega$. Să presupunem că $P_\beta x=0$ pentru orice $\beta<\alpha$; dacă $\alpha-1$ există, atunci evident $P_\alpha x=P_{\alpha-1} x=0$; dacă α este un număr ordinal limită, atunci din c) rezultă și în acest caz $P_\alpha x=0$.

Pe de altă parte șirul generalizat $\{P_\alpha\}_{\alpha\in\Omega}$ conțin un subșir $\{P_{\alpha'}\}_{\alpha'\in\Omega}$ convergent în tipologia operatorială slabă către un operator P astfel încît $Px=x$, $\forall x \in \bigcup\limits_{\alpha\in\Omega} Y_\alpha$. Deci $P=I$ și acum este clar că $x=0$.

q.e.d.

Observația 3.1. Dacă $\|\cdot\|_1$ și $\|\cdot\|_2$ sînt două norme echivalente pe un spațiu liniar atunci $\sqrt{\|\cdot\|_1^2+\|\cdot\|_2^2}$ este tot o normă echivalentă. Într-adevăr, din inegalitatea

$$(\|x+y\|_1^2+\|x+y\|_2^2)^{1/2} \leqslant (\|x\|_1^2+\|y\|_1^2+\|x\|_2^2+\|y\|_2^2+ 2\|x\|_1\|y\|_1+2\|x\|_2\|y\|_2)^{1/2}$$

și

$$\|x\|_1\|y\|_1+\|x\|_2\|y\|_2\leqslant(\|x\|_1^2+\|x\|_2^2)^{1/2}(\|y\|_1^2+\|y\|_2^2)^{1/2}$$

rezultă

$$(\|x+y\|_1^2+\|x+y\|_2^2)^{1/2}\leqslant(\|x\|_1^2+\|x\|_2^2)^{1/2}+(\|y\|_1^2+\|y\|_2^2)^{1/2}$$

De asemenea și expresia $\|x\|=\inf\limits_{y\in x}(\|x+y\|_1^2+\|x-y\|_2^2)^{1/2}$ definește o normă echivalentă pe spațiul X; într-adevăr, utilizînd cele de mai sus avem:

$$(\|x+z+2y\|_1^2+\|x+z-2y\|_2^2)^{1/2}\leqslant$$

$$\leqslant(\|x+y\|_1^2+\|x+y\|_2^2)^{1/2}+(\|z+y\|_1^2+\|z-y\|_2^2)^{1/2}$$

și trecînd la inferior, se obține:

$$\|x+z\|\leqslant\|x\|+\|z\|.$$

Se verifică ușor că normele definite ca mai sus sînt echivalente cu $\|\cdot\|_1$ și $\|\cdot\|_2$.

TEOREMA 3.2. *Fie X un spațiu Banach reflexiv; atunci există o normă echivalentă strict convexă pe X.*

Demonstrație. Afirmația este o consecință a teoremei 3.2 și a teoremei 1.1.; într-adevăr, dacă T este aplicația dată de teorema

3.2., $\|\cdot\|$ normă pe X şi $\|\cdot\|_0$ norma strict convexă pe $c_0(\Gamma)$, atunci norma căutată pe X este :

$$\|x\|_1 = \sqrt{\|x\|^2 + \|Tx\|_0^2}.$$

Strict convexitatea funcţiei $x \to \|x\|_1^2$ rezultă din strict convexitatea funcţiei $x \to \|x\|_0^2$ şi din faptul că T este injectivă.

q.e.d.

Următorul rezultat al lui E. Asplund [2] întăreşte teorema 3.2. (lui Lindenstrauss].

TEOREMA 3.3 *Fie X un spaţiu Banach reflexiv; există pe X o normă strict convexă astfel încît şi norma duală să fie strict convexă.*

Demonstraţie. Fie $\|\cdot\|_1$ (respectiv $\|\cdot\|_2^*$) norma echivalentă pe X (resp. pe X^*) care este strict convexă. În general $\|\cdot\|_1$ şi $\|\cdot\|_2^*$ nu sînt norme duale. Fie $f_0(x) = \frac{1}{2}\|x\|_1^2$ şi $g_0(x) = \frac{1}{2}\|x\|_2^2$ unde $\|\cdot\|_2$ este norma pe X, duală lui $\|\cdot\|_2^*$.
Putem lua $\|\cdot|_1$ şi $\|\cdot\|_2$ astfel încît să avem :

$$g_0 \leqslant f_0 \leqslant (1+c)g_0 \text{ pentru un } c>0.$$

Definim iterativ :

$$f_{n+1}(x) = \frac{1}{2}(f_n(x) + g_n(x)) \tag{10}$$

$$g_{n+1}(x) = \inf_{y\in X} \frac{1}{2}(f_n(x+y) - g_n(x-y)).$$

Utilizînd observaţia 3.1 se poate afirma că

$\sqrt{2f_n}$ şi $\sqrt{2g_n}$, $n \in N$ sînt norme echivalente pe X.

În plus cele două şiruri de funcţii astfel definite, satisfac (se verifică prin inducţie) :

$$g_n \leqslant g_{n+1} \leqslant f_{n+1} \leqslant f_n \text{ şi } f_n \leqslant (1+2^{-n}c)\, g_n, \qquad n \geqslant 0.$$

De aici rezultă : $0 \leqslant f_n - g_n \leqslant 2^{-n}\, c\, g_n$ şi prin urmare cele două şiruri converg către o aceeaşi funcţie :

$$h(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} g_n(x)$$

pentru care avem evident

$$(1+2^{-n}c)^{-1} h_n \leqslant g_n \leqslant h \leqslant f_n \leqslant (1+2^{-n}c)h.$$

Observăm în plus că $\sqrt{2h(x)}$ este o normă pe X, echivalentă cu $\|\,.\,\|_1$ și $\|\,.\,\|_2$; dacă arătăm că funcția h este strict convexă, va rezulta că norma corespunzătoare este strict convexă.

Mai întîi arătăm prin inducție că avem :

$$g_n(x) \leqslant f_n(x) \leqslant (1+4^{-n}c)\, g_n(x). \tag{11}$$

Să presupunem deci că au loc (11) și să notăm prin

$$\alpha = 1+4^{-n}c/_2\,; \text{ avem } f_{n+1} \leqslant \alpha g_n$$

și

$$\frac{1}{2}(f_n(x+y)+g_n(x-y)) \geqslant \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\alpha^2}\right) f_{n+1}(\alpha x+\alpha y)+\frac{1}{\alpha} f_{n+1}(x-y) =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1+\alpha}{\alpha^2}\left(\frac{1}{1+\alpha} f_{n+1}(\alpha x+\alpha y)+\frac{\alpha}{1+\alpha} f_{n+1}(x-y)\right) \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1+\alpha}{2\alpha^2} f_{n+1}\left(\frac{2\alpha x}{1+\alpha}\right) = \frac{2}{1+\alpha} f_{n+1}(x),$$

unde am ținut seama de convexitatea funcțiilor f_n și g_n și de faptul că $f_n(\lambda x) = \lambda^2 f_n(x)$.

Trecînd acum la inferior, se obține ușor. :

$$f_{n+1}(x) \leqslant (1+4^{-(n+1)}c) g_{n+1}(x) \qquad \forall n \in X.$$

Acum faptul că h este o funcție strict convexă rezultă astfel : din (11) se obține

$$0 \leqslant f_n - h \leqslant f_n - g_n \leqslant 4^{-n} C\, g_n \leqslant 4^{-n} C f_0$$

și deci, dacă punem : $f_n = \dfrac{1}{2^n} f_0 + h_n$, avem :

$$\left(\frac{1}{2^n} - \frac{C}{4^n}\right) f_0 + h_n \leqslant h \leqslant \frac{1}{2^n}\cdot f_0 + h_n.$$

Fie $x \neq y \in X$; are loc

$$h(x) - 2h\left(\frac{x+y}{2}\right) + h(y) \geqslant \frac{1}{2^n}\left[f_0(x) - 2f_0\left(\frac{x+y}{2}\right) +\right.$$

$$\left. + f_0(y) - \frac{c}{2^n}(f_0(x)+f_0(y))\right]$$

şi cum f_0 este o funcţie convexă prin ipoteză, pentru un n suficient de mare, membrul al doilea al inegalităţii de mai sus va fi pozitiv.

Să examinăm ce se întîmplă pe X^*; luînd conjugatele obţinem funcţiile f_n^*, g_n^* şi h^* care corespund la norme echivalente pe X^*, conform propoziţiei 1.11, capitolul I, iar relaţia (10) devine, datorită teoremei 1.6 capitolul I:

$$f_{n+1}^*(x^*) = \inf_{y^* \in X^*} \frac{1}{2}\left[f_n^*(x^*+y^*) + g_n^*(x^*-y^*)\right] \tag{12}$$

$$g_{n+1}^*(x^*) = \frac{1}{2}(f_n^*(x^*) + g_n^*(x^*)).$$

Majorările vor fi în acest caz

$$(1+4^{-n}c)^{-1}h^* \leqslant f_n^* \leqslant h^* \leqslant g_n^* \leqslant (1+4^{-n}C)h^*$$

şi evident

$$h^* \lim_n f_n^* = \lim_n g_n^*.$$

Se arată ca mai sus pentru h, că h^* este strict convexă, ceea ce încheie demonstraţia.

q.e.d.

Vom da acum următorul rezultat al lui Troianski [173], întărind pe cel al lui Lindenstrauss.

TEOREMA 3.4. *Pe orice spaţiu Banach reflexiv există o normă echivalentă pentru care el este local uniform convex.*

Demonstraţie. Vom arăta că pe X există o familie de operatori liniari şi mărginiţi $T_\alpha : X \to X$, $\alpha \in \Lambda$, satisfăcînd condiţiile:

i) $\forall\, x \in X$ şi $\varepsilon > 0$, mulţimea

$$\Lambda(x,\varepsilon) = \{\alpha / \ \|T_{\alpha+1}x - T_\alpha x\| \geqslant \varepsilon(\|T_{\alpha+1}\| + \|T_\alpha\|)$$

este finită,

ii) $\forall\, x \in X,\ x \subset Y_x =$ spațiul închis generat de $\| T_1 x \|\, T_1(X) \cup$
$\bigcup\limits_{\alpha \in \Lambda(x)} (T_{\alpha+1} - T_\alpha)(X)$,
unde $\Lambda(x) = \bigcup\limits_{\varepsilon>0} \Lambda(x,\varepsilon)$,

iii) cardinalul de densitate al spațiului generat de $(T_{\alpha+1} - T_\alpha)X$ este mai mic decît cel al mulțimii $T_1 X = \aleph_0$.

Acest lucru îl vom face prin inducție transfinită.

Dacă cardinalul de densitate al lui X este $\aleph_0$, atunci, operatorul identitate satisface condițiile respective.

Fie cardinalul de densitate al lui X egal cu $\mathfrak{m}$ și să presupunem că proprietatea are loc pentru orice număr cardinal $< \mathfrak{m}$. Există proiecțiile P_γ din teorema 3.1 ; atunci cardinalul de densitate al lui $(P_{\gamma+1} - P_\gamma)X < \mathfrak{m}$ și $(P_{\gamma+1} - P_\gamma)S$ este o submulțime slab compactă a lui $(P_{\gamma+1} - P_\gamma)X$ (S fiind sfera unitate închisă în X). Prin ipoteze de inducție există șirul $\{S^\gamma_\beta\}_{\beta \in \Lambda_\gamma}$ de operatori aplicînd pe $(P_{\gamma+1} - P_\gamma)X$ în el însuși și satisfăcînd condițiile i), ii) și iii). Fie
$\Lambda = \{ (\gamma,\beta) \,/\, \beta \in \Lambda_\gamma \cup \{0\} \}$; atunci dacă $\alpha \in \Lambda$, α' resp α'' vor denota prima componentă, respectiv a doua componentă a lui α.

Vom pune $\alpha_1 > \alpha_2$ dacă ; sau $\alpha_1' > \alpha_2'$ sau, $\alpha_1' = \alpha_2'$ dar $\alpha_1'' > \alpha_2''$. Definim operatorii T_α, $\alpha \in \Lambda$ astfel :

$$T_\alpha = S^{\alpha'}_{\alpha} \,(P_{\alpha'+1} - P_{\alpha'}) + P_{\alpha'} \qquad (S^{\gamma'}_0 = 0).$$

Este clar că spațiul generat de $(T_{\alpha+1} - T_\alpha)X$ are cardinalul de densitate $\leqslant \aleph_0$. Cum $T_\alpha x = S^{\alpha'}_{\alpha''}\, x,\ \forall\, x \in (P'_{\alpha+1} - P)_{\alpha'} X$, avem : $\| T_\alpha \| \geqslant \| S^{\alpha'}_{\alpha''} \|$.

Mulțimile $\{\gamma \,/\, \| P^*_{\gamma+1} - P_\gamma x \| > \varepsilon\}$ și

$$\{\beta \,/\, \beta \in \Lambda_\gamma,\ \| (S^\gamma_{\beta+1} - S^\gamma_\beta)\,(P_{\gamma+1} x - P_\gamma x) \| \geqslant \varepsilon(\| S^\gamma_{\beta+1} \| + \| S^\gamma_\beta \|)$$

sînt finite și deci și mulțimea $\Lambda(x,\varepsilon)$ este finită, datorită și inegalității :

$$\frac{\| T_{\alpha+1} x - T_\alpha x \|}{\| T_{\alpha+1} \| + \| T_\alpha \|} \leqslant \max \left\{ \| P_{\alpha'+1} x - P_{\alpha'} x \|, \right.$$

$$\left. \frac{\| (S^{\alpha'}_{\alpha''+1} - S^{\alpha'}_{\alpha''})\,(P_{\alpha'+1} x - P_{\alpha'} x) \|}{\| S^{\alpha'}_{\alpha''+1} \| + \| S^{\alpha'}_{\alpha''} \|} \right\}.$$

Vom arăta acum prin inducţie că $P_\gamma x \in Y_x$, $\forall \gamma$. Să presupunem că $P_\xi\ x \in Y_x$ pentru toţi $\xi < \gamma$. Dacă există η astfel încît $\eta+1=\gamma$, atunci $P_\gamma x \in Y_x$, deoarece $P_\eta\ x \in Y_x$ şi $(P_\gamma - P_\eta)x \in Y_x$. Fie γ pentru care nu există precedent; atunci $P_{\xi+1} x \in Y_x$ pentru toţi $\xi<\gamma$. Rezultă din modul cum au fost construiţi P_γ, că $P_\gamma\ x$ este în spaţiul generat de $\{P_{\xi+1}x\}_{\xi<\gamma}$; prin urmare $P_\gamma x \in Y_x$, $\forall\gamma$. Pe de altă parte $\lim P_\gamma\ x = x$ şi deci $x \in Y_x$, ceea ce completează construcţia.

Să presupunem acum că $\{l_i\}_{i=1}^\infty$ şi $\{l_i^\alpha\}_{i=1}^\infty$ sînt dense în T_1X şi $(T_{\alpha+1} - T_\alpha)X$, respectiv. Fie $\mathfrak{U}_n$ familia tuturor submulţimilor lui Λ conţinînd cel mult n elemente; definim funcţionalele:

$$E_A^{(n)}(x) = \inf_{a_i,\, a_i^{(\alpha)}} \| x - \sum_{\alpha\in A} \sum_{i=1}^{n} a_i^{(\alpha)} e_i^\alpha - \sum_{i=1}^{n} a_i\, e_i \|,$$

unde $A \in \bigcup_{n=1} \mathfrak{U}_n$ şi $a_i\ a_i^{(\alpha)}$ sînt numere reale.

$$t_\alpha(x) = (\| T_{\alpha+1}\| + \| T_\alpha\|^{-1} \| T_{\alpha+1}\, x - T_\alpha\, x\|,$$

$$F_A\ (x) = \sum_{\alpha\in A} t_a\,(x)$$

$$G_n\, x(x) = \sup_{A\in\mathfrak{U}_n} [E_A^{(n)}(x) + n\, F_A\,(x)],\ G_0\,(x) = \|x\|.$$

Fie $\Delta=\{0, -1, -2, \ldots\} \cup \Lambda \cup \Gamma$, unde Γ este mulţimea care apare în teorema 3.1 (presupunem că mulţimile din Δ sînt disjuncte), şi T fiind operatorul $T: X \to c_0\,(\Gamma)$ din teorema 3.1, definim un operator $Q: X \to c_0(\Gamma)$, astfel:

$$Qx(\delta) = \begin{cases} 2^\delta\, G_{-\delta}\,(x) \text{ pentru } \delta = 0,\ -1,\ -2, \ldots \\ t\delta(x) \text{pentru } \delta \in \Lambda \\ Tx\,(\delta) \text{ pentru } \delta \in \Gamma. \end{cases}$$

Introducem pe X norma echivalentă, ca în teorema 2.8

$$\| |x| \| = \sqrt{I^2\,(Qx) + \|Qx\|_1^2},$$

unde I este funcţionala din teorema 2.8.

Fie $\| |x_k| \| = \| |x| \| = 1$ şi $\lim\limits_{k\to\infty} \| |x_k + x| \| = 2$; atunci

$$\|Qx_k + Qx\|_0 \xrightarrow[k]{} 2 \text{ şi } \|Qx\|_0 = \|Qx_k\|_0 = 1.$$

TEOREMA 2.8. implică faptul că $\| Qx_k - Qx \| \xrightarrow[c_0(\Gamma)]{} 0$ dar aceasta înseamnă că

$$(13)\quad \lim_{k\to\infty} G_n(x_k) = G_n(x) \qquad n \geqslant 0$$

$$(14)\quad \lim_{k\to\infty} t_\alpha(x_k) = t_\alpha(x) \qquad \alpha \in \Lambda$$

și $\lim\limits_{k\to\infty} \| Tx_k - Tx \|_{c_0(\Gamma)} = 0.$

Rezultă din ultima limită că teorema va fi demonstrată, adică $x_k \xrightarrow[k]{} x$ în X, dacă arătăm că $\{x_k\}_{k\in N}$ este relativ compact. Fie $\varepsilon > 0$; există $B \in \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \mathfrak{U}_n$, $B \subset \Lambda(x)$ și m astfel încît $E_B^{(m)}(x) < \varepsilon/3$. Fie $\Lambda_B(x)$ mulțimea $\{\alpha \mid t_\alpha(x) < \min\limits_{\beta\in B} t_\beta(x)\}$ și j numărul elementelor mulțimii $\Lambda(x) \setminus \Lambda_B(x)$; fie

$$b = \min_{\substack{\alpha\in\Lambda_\beta(x)\\ \beta\in B}} [t_\beta(x) - t_\alpha(x)] \text{ și } n > \max\left\{m, j\ \frac{\varepsilon + 3\|x\|}{3b}\right\}.$$

Există $A \in \mathfrak{U}_n$, astfel încît:

$$(15)\qquad G_n(x) - [E_A^{(n)}(x) + n F_A(x)] \leqslant \frac{\varepsilon}{3}.$$

Să observăm că $B \subset A$; într-adevăr, în caz contrar ar exista $D \in \mathfrak{U}_n \setminus \mathfrak{U}_{n-1}$, astfel încît $t_\alpha(x) \leqslant t_\beta(x)$, $\forall\, \alpha \in \Lambda \setminus D$ și $\beta \in D$ și prin urmare inegalitatea:

$$G_n(x) - [E_A^{(n)}(x) + n F_A(x)] \geqslant E_D^{(n)}(x) + nF_D(x) -$$

$$- [E_A^{(n)}(n) + F_A(x)] \geqslant nb - \|x\| > \frac{\varepsilon}{3}$$

este o contradicție a lui (15).

Rezultă din (13), (14) și (15) că există $M > 0$ întreg astfel încît $k > M$ implică $E_A^{(n)}(x_k) < \varepsilon$.

Astfel dacă notăm prin Y_ε spaţiul finit dimensional generat de $\{x_k\}_{k=1}^M \cup \{l_i\}_1^n \cup (\bigcup_{\alpha \in A} \{\epsilon_i^\alpha\}_1^n)$, atunci $d(x_k, Y_\varepsilon) < \varepsilon$ pentru orice $k \geqslant 1$. De aici rezultă că şirul $\{x_k\}_{k\geqslant 1}$ este total mărginit, deci relativ compact.

q.e.d.

TEOREMA 3.5. *Fie X un spaţiu Banach reflexiv, atunci există o normă echivalentă pe X astfel încît atît X cît şi X^* să fie local uniform convexe deci astfel încît norma pe X cît şi norma duală să fie Fréchet diferenţiabile.*

Demonstraţie. După teorema 3.4 a lui Troianski, pe X respectiv pe X^*, există o normă echivalentă pentru care el este local uniform convex. Se procedează atunci exact ca în teorema 3.3 : h şi h^* vor fi norme local uniform strict convexe datorită observaţiei următoare : dacă f_0 (din teorema 3.3) este local uniform strict convexă, atunci luînd inferiorul în ambii membrii ai lui (12) şi n suficient de mare, rezultă că şi h are aceeaşi proprietate. Teorema rezultă acum din propoziţiile 2.5 şi 2.3.

q.e.d.

În continuare ne ocupăm cu o caracterizare a reflexivităţii dată de R. James [89].

Pentru un şir de funcţionale liniare $\{x_n^*\}$ pe un spaţiu liniar X, vom nota prin $L\{x_n^*\}$ mulţimea tuturor funcţionalelor X^* care au proprietatea

$$\varliminf_n < x_n^*, x > \leqslant < x^*, x > \leqslant \varlimsup_n < x_n^*, x >, \forall x \in X.$$

LEMA. 3.6. *Fie x un spaţiu Banach* $\theta \in (0,1)$ *şi* $\{x_n^*\}$ *un şir de funcţionale în sfera unitate din X^*, pentru care :*

$$\| x^* - y^* \| \geqslant \theta \text{ dacă } x^* \in \operatorname{conv} \{x_n^*\} \text{ şi } y^* \in L\,\{x_n^*\}.$$

Dacă $\{\lambda_i\}$ *este un şir de numere pozitive cu* $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i = 1$, *atunci există un* $\alpha \in [\theta, 2]$ *şi un şir* $\{y_i^*\}_i$ *în sfera unitate a lui X^* astfel încît pentru orice $n \in N$ şi orice $y^* \in L\,\{y_i^*\}$, să avem :*

$$\| \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i (y_i^* - y^*) = \alpha \text{ şi } \| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (y_i^* - y^*) \| < \alpha (1 - \theta \sum_{i=n+1}^{\infty} \lambda_i).$$

Demonstrație. Fie $\{\varepsilon_n\}$ un şir de numere pozitive pentru care să avem

$$(16) \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k \, \varepsilon_k}{\sum\limits_{i=k+1}^{\infty} \lambda_i \sum\limits_{i=k}^{\infty} \lambda_i} < 1 - \theta.$$

Pentru fiecare n şi fiecare şir de funcționale liniare $\{f_i\}_i$, fie $V_n\{f_i\}$ acoperirea convexă a mulțimii $\{f_i, i \geqslant n\}$ şi $V\{f_i\}$ mulțimea tuturor şirurilor $\{g_i\}_i$ astfel încît $g_n \in V_n\{f_i\}$, $\forall n$. Observăm că dacă $\{g_i\} \in V\{f_i\}$, atunci $V\{g_i\} \subset V\{f_i\}$. Pentru orice n, construim inductiv un număr α_n, o funcțională liniară y_n^* şi şirurile $\{f_i^n\}_i$ şi $\{g_i^n\}_i$ de funcționale liniare şi continue, astfel:

Să presupunem construite α_k, y_k^*, $\{f_i^k\}$ şi $\{g_i^k\}$ pentru $k<n$, unde $\{g_i^0\} = \{x_i^*\}$; fie:

$$(17) \qquad \alpha_n = \inf \left[\sup \left\{ \left\| \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \, y_i^* + \left(\sum_{i=n}^{\infty} \lambda_i \right) z^* - y^* \right\|, \, y^* \in L\{f_i\} \right\} \right]$$

unde inf se ia după toți z^* şi $\{f_i\}$ pentru care

$$z^* \in V_n\{g_i^{n-1}\} \text{ şi } \{f_i\} \in V\{g_i^{n-1}\}.$$

Fie acum $y_n^* \in V_n\{g_i^{n-1}\}$ şi $\{f_i^n\} \in V\{g_i^{n-1}\}$ astfel încît:

$$(18) \quad \alpha_n \leqslant \sup \left\{ \left\| \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \, y_i^* + \left(\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \right) y_n^* - y^* \right\|, y^* \in L\{f_i^n\} \right\} < \alpha_n (1 + \varepsilon_n)$$

şi să alegem $y_0^* \in L\{f_i^n\}$ astfel încît:

$$\alpha_n (1 - \varepsilon_n) < \left\| \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \, y_i^* + \left(\sum_{i=n}^{\infty} \lambda_i \right) y_n^* - y_0^* \right\| < \alpha_n (1 + \varepsilon_n).$$

Fie x_0, cu $\|x_0\| = 1$, astfel încît:

$$(19) \qquad \alpha_n (1 - \varepsilon_n) < \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i y_i^*(x_0) + \left(\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \right) y_n^*(x_0) - y_0^*(x_0).$$

Cum $\underline{\lim}_i f_i^n(x_0) \leqslant y_0^*(x_0)$, există un subşir $\{g_i^n\}$ a lui $\{f_i^n\}$ astfel încît pentru orice $y^* \in L\{g_i^n\}$ să avem:

$$\underline{\lim}_i f_i^n(x_0) = \lim_i g_i^n(x_0) = y^*(x_0) \leqslant y_0^*(x_0).$$

Aceasta înseamnă că (19) este satisfăcută dacă înlocuim pe $y_0^*(x_0)$ prin $y^*(x_0)$. De aici şi din (18) precum şi din faptul că $L\{y_n^*\} \subset L\{f_i^n\}$, rezultă

$$\alpha_n(1-\varepsilon_n) < \left\| \sum_{i=1}^{n-i} \lambda_i y_i^* + \left(\sum_{i=n}^{\infty} \lambda_i\right) y_n^* - y^* \right\| < \alpha_n(1+\varepsilon_n) \tag{20}$$

dacă $y^* \in L\{y_n^*\}$.

Cum $\|z^*\| \leqslant 1$ dacă $z^* \in \operatorname{conv}\{y_n^*\}$ şi $\|y^*\| \leqslant 1$ dacă $y^* \in L\{y_n^*\}$, avem $\alpha_n \leqslant 2$, $\forall n$. Să mai observăm că α_n în (17) nu descreşte dacă inf se ia după toţi z^* şi $\{f_i\}$ pentru care $z^* \in V_n\{g_i^{n-1}\}$ şi

$$z^* = \frac{\lambda_n}{\sum\limits_{i=n}^{\infty} \lambda_i} y_n + \frac{\sum\limits_{i=n+1}^{\infty}}{\sum\limits_{i=n}^{\infty} \lambda_i} x^* \quad \text{cu} \quad x^* \in V_{n+i}\{g_i^{n-1}\}$$

şi $\{f_i\} \in V\{g_i^n\}$. Astfel $\alpha_n \leqslant \alpha_{n+1}$, şi deci

$$\lim_n \alpha_n = \alpha \ \text{ există şi } \ 0 \leqslant \alpha \leqslant \left\| \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i y_i^* \right\| \leqslant 2.$$

Rezultă din (20) şi din inegalitatea triunghiului, că dacă $y^* \in L\{y_n^*\}$, atunci:

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (y_n^* - y^*) \right\| \leqslant \tag{21}$$

$$\leqslant \frac{\lambda_n}{\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i} \left\| \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i (y_i^* - y^*) + \left(\sum_{i=n}^{\infty} \lambda_i\right)(y_n^* - y^*) + \frac{\sum\limits_{i=n+1}^{\infty} \lambda_i}{\sum\limits_{i=n}^{\infty} \lambda_i} \right\| \sum_{i=1}^{n-i} \lambda_i (y_i^* - y^*) \Bigg\| \leqslant$$

$$\leqslant \left(\sum_{i=n+1}^{\infty} \lambda_i\right) \left[\frac{\lambda_n \alpha_n (1+\varepsilon_n)}{\sum\limits_{i=n+1}^{\infty} \lambda_i \cdot \sum\limits_{i=n}^{\infty} \lambda_i} + \frac{1}{\sum\limits_{i=n}^{\infty} \lambda_i} \left\| \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i (y_i^* - y^*) \right\| \right].$$

Dacă aplicăm succesiv (21) pentru n descrescînd, obținem :

$$\left\|\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(y_n^*-y^*)\right\|<\left(\sum_{i=n+1}^{\infty}\lambda_i\right)\left[\frac{\lambda_n\alpha_n(1+\varepsilon_n)}{\sum\limits_{i=n+1}^{\infty}\lambda_i\sum\limits_{i=n}^{\infty}\lambda_i}+\right.$$

$$\left.+\frac{\lambda_{n-1}\alpha_{n-1}(1+\varepsilon_{n-1})}{\sum\limits_{i=n}^{\infty}\lambda_i\sum\limits_{i=n-1}^{\infty}\lambda_i}+\frac{1}{\sum\limits_{i=n-1}^{\infty}\lambda_i}\left\|\sum_{i=1}^{n-2}\lambda_i(y_i^*-y^*)\right\|\right]<$$

. . . .

$$<\left(\sum_{i=n+1}^{\infty}\lambda_i\right)\left[\sum_{k=2}^{n}\frac{\lambda_k\alpha_k(1+\varepsilon_k)}{\sum\limits_{i=k+1}^{\infty}\lambda_i\sum\limits_{i=k}^{\infty}\lambda_i}+\frac{1}{\sum\limits_{i=2}^{\infty}\lambda_i}\|\lambda_i(y_1^*-y^*)\|\right]<$$

$$<\left(\sum_{i=n+1}^{\infty}\lambda_i\right)\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{\lambda_k\alpha_k(1+\varepsilon_k)}{\sum\limits_{i=k+1}^{\infty}\lambda_i\sum\limits_{i=k}^{\infty}\lambda_i}\right].$$

Înlocuim fiecare α_k prin α şi folosind (17) obţinem

$$\left\|\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(y_n^*-y^*)\right\|\leqslant\alpha\left(\sum_{n+1}^{\infty}\lambda_i\right)\left[\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\sum\limits_{k+1}^{\infty}\lambda_i}-\frac{1}{\sum\limits_{k}^{\infty}\lambda_i}\right)+1-\theta\right]=$$

$$=\alpha\left(1-\theta\sum_{i=n+1}^{\infty}\lambda_i\right).$$

q.e.d.

TEOREMA 3.6. *Fie X un spaţiu Banach, atunci următoarele afirmaţii sînt echivalente :*

i) X este reflexiv

ii) pentru orice $\theta\in(0,1)$ există şirurile $\{x_n^*\}_n\subset X^*$, $\|x_n^*\|\leqslant 1$, şi $\{x_k\}_k\subset X$, $\|x_k\|=1$, astfel încît :

$$\lim_{n\to\infty}<x_u^*,x_k>=0,\quad k\in N$$

şi $\lim\limits_{k\to\infty} < x_n^*, x_k > = \theta$, $n \in N$,

iii) $\forall \theta \in (0,1)$, *există un şir* $\{x_n^*\} \subset X^*$, *cu* $\|x_n^*\| \leqslant 1$ *astfel încît* : $\|x^* - y^*\| \geqslant \theta, \forall x^* \in \operatorname{conv} \{x_n^*\}$, şi $\forall y^* \in L\{x_n^*\}$,

iv) $\forall\ \theta \in (0,1)$ şi *orice* $\{\lambda_i\} \subset R$ *cu* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \lambda_i = 1$, *există* $\alpha \in [\theta, 2]$ *şi un şir* $\{y_i^*\} \subset X^*, \|y_i\| \leqslant 1$, *astfel încît* $\forall y^* \in L\{y_i^*\}$ *să avem*

$$(22) \quad \left\| \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i (y_i^* - y^*) \right\| = \alpha \text{ şi} \left\| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (y_i^* - y^*) \right\| < \alpha \left(1 - \theta \sum_{i=n+1}^{\infty} \lambda_i \right), n \in N,$$

v) *există o funcţională liniară, mărginită pe X, care nu-şi atinge supremul pe sfera unitate , închisă a lui X.*

Demonstraţie. i$\Rightarrow$ii) Fie X nereflexiv, atunci sfera unitate în X nu este X^*-compactă; aceasta înseamnă, conform teoremei Eberlein-Smulian [70] că există un subspaţiu liniar închis, separabil, nereflexiv $Y \subset X$. Cum Y scufundat în Y^{**} este închis şi $Y \neq Y^{**}$, există $y^{**} \in Y^{**}$ cu $\|y^{**}\| = 1$ şi $d(y^{**}, Y) > \theta$, pentru orice $0 < \theta < 1$, fixat. Fie $\{y_n\}_{n\in N}$ dens în Y ; pentru orice n, există $y_n^* \in Y^*$ astfel încît :

a) $\|y_n^*\| < 1$

b) $< y_n^*, y^{**} > = \theta$

c) $< y_n^*, y_j > = 0 \quad j \leqslant n$.

Într-adevăr, pentru orice scalari $c_0, c_1, \ldots c_n$ avem :

$$|c_0 \theta + \sum_{j=1}^{n} c_j \cdot 0 = |c_0| \cdot \theta \leqslant \frac{\theta}{d(y^{**}, Y)} \left\| c_0 y^{**} + \sum_{j=1}^{n} c_j y_j \right\|$$

şi cum $\dfrac{\theta}{d(y^{**}, Y)} < 1$, aplicînd teorema lui Helly [70], rezultă că există $y_n^* \in Y^*$ satisfăcînd a), b) şi c).

Condiţia c) implică $y_n^* \to 0$ în Y-topologia pe Y^*, deoarece $\{y_j\}$ este dens în Y şi $\sup\limits_n \|y_n^*\| \leqslant 1$. Sfera unitate închisă a lui Y este Y^*densă în sfera unitate închisă a lui Y^{**}, deci pentru orice n, există $x_k \in Y$ astfel încît

$$\|x_k\| \leqslant 1 \text{ şi } |< y_n^*, x_k > - \theta| = |< y_n^*, x_k - y^{**} >| \leqslant \frac{1}{k}$$

pentru $n \leqslant k$, $k \in N$. De aici rezultă că pentru k fixat, $\lim\limits_{n} < y_n^* x_k > = 0$ şi pentru n fixat, $\lim\limits_{k} < y_n^*, x_k > = \alpha$. Aplicînd acum teorema Hahn-Banach, y_n^* are o extensie $x_n^* \in X$, cu $\|x_n^*\| = \|y_n^*\| \leqslant 1$.

ii) $\Rightarrow$iii) Fie $\theta \in (0,1)$ iar $\{x_n^*\}$ şi $\{x_k\}$ şirurile date de ii). Dacă $x^* \in \operatorname{conv}\{x_n^*\}$, atunci $\lim\limits_{k \to \infty} < x^*, x_k > = \theta$ iar dacă $y^* \in L\{x_n^*\}$ atunci $< y^*, x_k > = 0$, $\forall\, k \in N$.

Astfel :

$$\|x^* - y^*\| \geqslant \lim_{k \to \infty} < x^* - y^*, x_k > = 0$$

iii)$\Rightarrow$iv) este tocmai lema 3.6.

iv)$\Rightarrow$v). Fie $\{\lambda_i\}$ astfel încît să existe δ, $0 < \delta < \frac{1}{2}\theta^2$ pentru care $\lambda_{n+1} < \delta \lambda_n$, $\forall n$.

Vom arăta că funcţionala $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \lambda_i (y_i^* - y^*)$ nu-şi atinge supremul pe sfera unitate închisă, dacă $y^* \in L\{y_i^*\}$.

Fie $x \in X$, $\|x\| \leqslant 1$; cum $\varliminf\limits_{i} y_i^*(x) \leqslant y^*(x)$ şi $\theta \leqslant \alpha$, există n astfel încît

$$< y_{n+1}^* - y^*, x > < \theta^2 - 2\delta \leqslant \alpha\theta - 2\delta.$$

Atunci

$$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i < y_i^* - y^*, x > < \sum_{i=1}^{n} \lambda_i < y_i^* - y^*, x > + (\alpha\theta - 2\delta)\lambda_{n+1} +$$

$$+ \sum_{n+2}^{\infty} \lambda_i < y_i^* - y^*, x > \leqslant \left\| \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i (y_i^* - y^*) \right\| + (\alpha\theta - 2\delta)\lambda_{n+1} + 2 \sum_{n+2}^{\infty} \lambda_i$$

şi rezultă de aici şi din (22) că :

$$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i < y_i^* - y^*, x > < \alpha\left[1 - \theta \sum_{n+1}^{\infty} \lambda_i\right) + (\alpha\theta - 2\delta)\lambda_{n+1} + [2 \sum_{n+2}^{\infty} \lambda_i.$$

Deci relaţia $\lambda_{n+1} < \delta\lambda_n$, rezultă $\sum\limits_{n+2}^{\infty} \lambda_i < \delta \sum\limits_{n+1}^{\infty} \lambda_i$

şi deci

$$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i < y_i^* - y^*, x > < \alpha - (\alpha\theta - 2\delta) \sum_{n+1}^{\infty} \lambda_i + (\alpha\theta - 2\delta)\, \lambda_{n+1} =$$

$$= \alpha - (\alpha\theta - 2\delta) \sum_{i=n+2}^{\infty} \lambda_i < \alpha.$$

Astfel supremul α al funcţionalei $\sum_{i}^{\infty} \lambda_i\, (y_i^* - y^*)$ nu este atins pentru nici un x, $\|x\| = 1$.

v) $\Rightarrow$i) Fie $x^* \in X^*$, $\|x^*\| = 1$ o funcţională care nu-şi atinge supremul pe sfera unitate închisă a lui X; conform teoremei Hahn-Banach, există $x^{**} \in X^{**}$, $\|x^{**}\| = 1$, $< x^*, x^{**} > = 1$; dacă $x^{**} \in X$ este contrazisă ipoteza. Astfel $x^{**} \notin X$ şi deci X nu este reflexiv.

q.e.d.

COROLAR. *Un spaţiu Banach este reflexiv dacă şi numai dacă orice $x^* \in X^*$ îşi atinge supremul pe sfera uniate.*

TEOREMA 3.7. *Fie X un spaţiu Banach şi $\mathfrak{J}$ o aplicaţie de dualitate pe X; X este reflexiv dacă şi numai dacă :*

$$\bigcup_{x \in X} \mathfrak{J}x = X^*.$$

Demonstraţie. Să presupunem că X este reflexiv şi fie $x_0^* \in X^*$; după teorema Hahn-Banach, există $x_0 \in X$, cu $\|x_0\| = 1$ şi $< x_0^*, x_0 = > \|x_0^*\|$

Cum φ are proprietatea lui Darboux, există $t_0 \in R_+$ astfel încît $\varphi(\|t_0\|) = \|x_0^*\|$; atunci $\varphi(\|t_0 x_0\|) = \|x_0^*\|$ şi deoarece $< x_0^*, t_0 x_0 > = \|x_0^*\| \cdot \|t_0, x_0\|$, rezultă că $x_0^* \in \mathfrak{J}\,(t_0 x_0)$.

Invers, pentru orice $x_0^* \in X^*$, există $x_0 \in X$, astfel încît

$$x_0^* \in \mathfrak{J}x_0, \text{ adică } < x_0^*, x_0 > = \|x_0^*\| \; \|x_0\| \text{ şi } \|x_0^*\| = \varphi(\|x_0\|).$$

Atunci $y_0 = \dfrac{x_0}{\|x_0\|}$ este astfel încît $\|y_0\| = 1$ şi $< x_0^*, y_0 > = \|x_0^*\|$ de unde rezultă că spaţiul X este reflexiv, utilizînd rezultatul lui R. James.

q.e.d.

COROLAR. *Fie X un spaţiu Banach cu dualul strict convex şi $\mathfrak{J}$ o aplicaţie de dualitate pe X:*

a) *X este reflexiv dacă şi numai dacă $\mathfrak{J}$ este surjectivă;*

b) *X este reflexiv şi strict convex dacă şi numai dacă $\mathfrak{J}$ este biunivocă.*

PROPOZIŢIA. 3.5. *Fie X un spaţiu Banach reflexiv cu X^* strict convex şi $\mathfrak{J}$ o aplicaţie de dualitate cu pondere φ; atunci aplicaţia*

$$\mathfrak{J}^{-1}(x^*) = \{x \in X / \mathfrak{J}x = x^*\}$$

coincide cu $\mathfrak{J}^* =$ aplicaţia de dualitate pe X^* cu ponderea φ^{-1}. Dacă X este în plus strict convex, atunci $\mathfrak{J}^{-1}$ este univocă.

Demonstraţie. $x \in \mathfrak{J}^{-1}(x^*)$ dacă şi numai dacă

$$< x^*, x > = \| x^* \| \; \| x \| \text{ şi } \| x \| = \varphi^{-1}(\| x^* \|);$$

prin urmare $\mathfrak{J}^{-1} x^* = J^* x^*, \forall x^* \in X^*$ iar ultima afirmaţie rezultă din teorema 1.2.

q.e.d.

Propoziţia 3.6. *Fie X un spaţiu Banach reflexiv strict convex cu dualul strict convex şi $\mathfrak{J}$ o aplicaţie de dualitate; dacă pentru şirul $\{x_n\}_n \subset X$, avem*

$$< \mathfrak{J}x_n - \mathfrak{J}x, x_n - x > \underset{n}{\to} 0$$

atunci $x_n \underset{n}{\rightharpoonup} x$.

Demonstraţie. Ca în proporţia 2.7, din faptul că

$$< \mathfrak{J} x_n - \mathfrak{J}x, x_n - x > \to 0, \text{ rezultă că :}$$

$$\| x_n \| \to \| x \| \text{ şi } < \mathfrak{J}x, x_n > \underset{n}{\to} \| \mathfrak{J} \| \; \| x \| = < \mathfrak{J}x, x >$$

X fiind reflexiv, pentru a demonstra că $x_n \underset{n}{\rightharpoonup} x$ e suficient să arătăm că dacă pentru un subşir au loc $x_{n'} \underset{n'}{\rightharpoonup} y$, atunci $y = x$.

Avem: $< \mathfrak{J}x, \mathfrak{J}x_n > \to \mathfrak{J}x, y >$ şi deci $< \mathfrak{J}x, y > = \mathfrak{J} x, x >$ dar X fiind strict convex, funcţionala $\mathfrak{J}x$ îşi atinge maximul într-un singur punct şi astfel $x = y$.

q.e.d.

Definiția 3.2. *Fie* $T : X \to X^*$; *se spune că* T *satisface condiția* (S) *dacă pentru orice șir* $x_n \rightharpoonup x$, *din faptul că* :

$$< Tx_n - Tx,\ x_n - x > \underset{n}{\to} 0 \text{ rezultă } x_n \underset{n}{\to} x.$$

Propoziția 3.7. *Dacă* X *este un spațiu Banach reflexiv strict convex cu* X^* *strict convex, atunci orice aplicație de dualitate pe* X *este continuă în topologiile normelor și satisface condiția* (S) *dacă și numai dacă* $\mathfrak{J}^{-1}$ *are aceeași proprietate.*

Demonstrație. Fie $\mathfrak{J}$ continuă și satisfăcînd condiția (S) ; după propoziția 3.5, $\mathfrak{J}^{-1}$ este o aplicație de dualitate de la X^* în X.

Fie $\{x_n^*\} \subset X^*$ cu $x_n^* \underset{n}{\rightharpoonup} x^*$ și $< \mathfrak{J}^{-1}x_n^* - \mathfrak{J}^{-1}x, x_n - x > \to 0.$

Notînd prin :

$$x_n = \mathfrak{J}^{-1}(x_n^*) \text{ și } x = \mathfrak{J}^{-1}(x);$$

obținem :

$$< \mathfrak{J}^{-1}x_n - \mathfrak{J}^{-1}x,\ x_n^* - x^* > = < \mathfrak{J}x_n - \mathfrak{J}x,\ x_n - x > =$$

$$= (\varphi(\|x_n\|) - \varphi(\|x\|)) (\|x_n\| - \|x\|) +$$

$$+ (\|\mathfrak{J}x_n\|\,\|x\| - < \mathfrak{J}x_n, x >) +$$

$$+ (\|\mathfrak{J}x\|\,\|x_n\| - < \mathfrak{J}x, x_n >) \underset{n}{\to} 0.$$

Cum cantitățile din paranteze sînt nenegative, rezultă :

$$\text{(13)} \quad \|x_n\| \underset{n}{\to} \|x\|,\ < \mathfrak{J}x_n,\ x > \underset{n}{\to} < \mathfrak{J}x, x >,\ < \mathfrak{J}x, x_n > \underset{n}{\to} < \mathfrak{J}x, x >.$$

Ultima relație implică $x_n \rightharpoonup x$; într-adevăr, X fiind reflexiv și $\{x_n\}_n$ mărginit, e suficient să arătăm că dacă pentru un subșir $x_{n'} \rightharpoonup x_0$, atunci $x_0 = x$.

Fie deci $x_{n'} \rightharpoonup x_0$; din (13) rezultă : |

$$\|x_0\| < \varliminf_{n'} \|x_{n'}\| = |x\|$$

și

$$< \mathfrak{J}x,x > = \varphi(||x||)||x|| = < \mathfrak{J}x,x_0 > = \lim_{n'} < \mathfrak{J}x,x_{n'} >.$$

Prin urmare :

$$\varphi(||x|| \; ||x|| = < \mathfrak{J}x,x_0 > \leqslant ||x_0|| \; ||\mathfrak{J}x|| = ||x_0||\,\varphi(||x||)$$

deci $||x|| \leqslant ||x_0||$. În definitiv, avem :

$$||x|| = ||x_0||, < \mathfrak{J}x,x_0 > = ||x_0||\,\varphi(||x_0||) \text{ și } ||\mathfrak{J}x|| = \varphi(||x_0||.$$

Aceasta înseamnă că $\mathfrak{J}x = \mathfrak{J}x_0$ și cum $\mathfrak{J}$ este injectivă rezultă $x_0 = x$.

Cum $\mathfrak{J}$ satisface condiția (S), rezultă chiar $x_n \underset{n}{\rightarrow} x$ și $\mathfrak{J}$ fiind continuă, obținem :

$$x_n^* = \mathfrak{J}x_n \rightarrow \mathfrak{J}x = x,$$

deci $\mathfrak{J}^{-1}$ satisface condiția (S).

Pentru a demonstra continuitatea lui $\mathfrak{J}^{-1}$, fie $x_n^* \underset{n}{\rightarrow} x^*$

Atunci : $x_n = \mathfrak{J}^{-1}x_n^* \rightharpoonup \mathfrak{J}^{-1}x^* = x$, conform teoremei 1.3.
Dar avem și :

$$< \mathfrak{J}x_n - \mathfrak{J}x,\, x_n - x > = < x_n^* - x,\, \mathfrak{J}^{-1}x_n^* - \mathfrak{J}^{-1}x^* > \underset{n}{\rightarrow} 0$$

ceea ce implică faptul că $\mathfrak{J}^{-1}(x_n^*) \underset{n}{\rightarrow} \mathfrak{J}^{-1}x$.

Afirmația reciprocă rezultă din faptul că X este reflexivă și $(\mathfrak{J}^{-1})^{-1} = \mathfrak{J}$.

q.e.d.

Încheiem considerațiile din acest paragraf cu următoarea propoziție care pune în evidență o proprietate esențială a funcțiilor vectoriale cu valori într-un spațiu Banach reflexiv.

TEOREMA 3.8. *Fie X un spațiu Banach reflexiv; orice funcție $f : [0,t_0] \rightarrow X$ tare absolut continuă are derivată tare* a.p.t. *pe* $[0,t_0]$ *și*

$$f(t) = \int_0^t \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} f(s)\right] \mathrm{d}s + f(0) \qquad t \in [0,t_0].$$

Demonstrație. Cum mulțimea $\{f(t)/t \in [0,t_0]\}$ este separabilă în X, putem presupune că însuși X este separabil; observăm de asemenea că f fiind tare absolut continuă, este cu variație mărginită. Fie atunci pentru $h \neq 0$;

$$f_h(t) = \frac{f(t+h)-f(t)}{h}, \quad F_+(t) = \overline{\lim_{h\downarrow 0}} \|f_h(t)\| \text{ și } F_-(t) = \overline{\lim_{h\uparrow 0}} \|f_h(t)\|.$$

Funcțiile F_+ și F_- sînt măsurabile, deoarece f_h sînt continue, $\forall h \neq 0$; să arătăm că ele sînt a.p.t. finite. Să presupunem că

$$0 < \lambda = \text{măs } \{t/F_+(t) = +\infty\}.$$

Fie

$$E_n = \left\{t/ \sup_{h \geq \frac{1}{n}} \left\| \frac{1}{h}(f(t+h)\cdot - f(t))\right\| \geq \frac{2}{\lambda} \operatorname{Var} f\right\};$$

E_n este închisă iar $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \supset \{t \mid F_+(t) = +\infty\}$.

Fie n_0 astfel încît măs $E_{n_0} > \frac{\lambda}{2}$; n_0 există deoarece șirul de mulțimi $\{E_n\}_{n\in N}$ este crescător.

Să definim șirurile $\{t_i\}_i$ și $\{h_i\}_i$ astfel:

$$t_1 = \inf \{t/t \in E_{n_0}\}, \; t_{i+1} = \inf \{t/t \in E_{n_0}, \; t \geq t_i + h_i\}$$

$$h_i = \sup \left\{ h/ \frac{1}{h} \|f(t_i+h)-f(t_i)\| \geq \frac{2}{\lambda} \operatorname{Var} f \right\}.$$

Atunci se verifică incluziunea $\sum_{i=1}^{\infty} [t_i, t_i+h_i] \supset E_{n_0}$ și deci

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|f(t_i+h_i)-f(t_i)\| \geq \frac{2}{\lambda} \operatorname{Var} f \sum_{i=1}^{\infty} h_i \geq \frac{2}{\lambda} \operatorname{Var} f \text{ măs } E_{n_0} > \operatorname{Var} f$$

ceea ce este o contradicție. Analog se arată că măs $\{t/E(t) = +\infty = 0\}$ Există deci o mulțime de măsură nulă $N_0 \subset [0,t_0]$ astfel încît pentru $t \in [0,t_0] \setminus N_0$, mulțimea $\{f_h(t), h \neq 0\}$ să fie mărginită. X fiind separabil, există în X^* o submulţime $\{x_k^*\}_{k\in N}$ densă în X—topologia pe X^* ; orice funcţie $g_k(t) = \langle x_k^*, f(t)\rangle$ este absolut continuă deci derivata $\frac{\mathrm{d}g_k(t)}{\mathrm{d}t}$ există cu excepţia unei mulţimi de măsură nulă $N_k \subset [0,t_0]$; atunci datorită mărginirii de mai sus, rezultă că există pentru $t \in [0,t_0] \setminus \bigcup_{k=0}^{\infty} N_k$ derivata slabă a funcţiei $f(t)$; pe care o notăm prin $w - \frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}$; ea este o funcţie slab măsurabilă, deci şi tare măsurabilă datorită separabilităţii lui X.

Definim acum :

$$f_n(t) = 2^n\left[f\left(\frac{k}{2^n}\right) - f\left(\frac{k-1}{2^n}\right)\right] \text{pentru } \frac{k-1}{2^n} \leq t < \frac{k}{2^n}$$

şi $k = t_0, 2t_0, \ldots, 2^n t_0$. Atunci

$$\int_0^{t_0} \|f_n(t)\|\,\mathrm{d}t \leq \operatorname{Var} f \text{ şi } f_n(t) \xrightarrow[n]{} w - \frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}$$

pentru $t \in [0,t_0] \setminus \bigcup_{k=0}^{\infty} N_k$; avem astfel pentru t în această mulţime :

$\left\| w - \frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t} \right\| \leq \underset{n}{\lim} \|f_n(t)\|$.

După lema lui Fatou rezultă :

$$\int_0^{t_0} \left\| w - \frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t} \right\| \mathrm{d}t \leq \lim \int_0^{t_0} \|f_n(t)\|\,\mathrm{d}t \leq \operatorname{Var} f$$

deci $w - \frac{\mathrm{d}f(t)}{dt}$ este integrabilă Bochner ; să punem :

$$\tilde{f}(t) = \int_0^t w - \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}s}(s)\,\mathrm{d}s + f(0) ;$$

cum avem :

$$\langle \tilde{f}(t), x_k^* \rangle = \langle f(t), x_k^* \rangle \text{ a.p.t. }, \quad k \in N,$$

rezultă $\tilde{f}(t)=f(t)$ a.p.t.. Astfel s-a obţinut

$$f(t) = \int_0^t w - \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}s}(s)\mathrm{d}s + f(0)$$

şi deci f este a.p.t. derivabilă în topologia normei

şi
$$s - \frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t} = w - \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}(t).$$

q.e.d.

Referinţe. Rezultatele privind existenţa unei norme echivalente pe un spaţiu Banach reflexiv, pentru care el este strict convex, aparţine lui I. Linderstrauss [105]. Teoremele 3.3 şi 3.5 în care şi norma duală normei echivalente are anumite proprietăţi de netezime sînt ale lui E. Asplund [2].

Proprietăţile aplicaţiilor de dualitate în spaţii Banach reflexive au fost studiate de V.W. Petryshyn [148]. Ultima teoremă de diferenţiabilitate este a lui I. Komura [100].

§ 4. APLICAŢII DE DUALITATE ÎN SPAŢIILE l^p ŞI L^p

Începem prin a stabili cîteva inegalităţi necesare în cele ce urmează

LEMA 4.1. *Pentru orice α, β complexe şi $1<p<\infty$, avem*

(1) $$|\alpha+\beta|^q + |\alpha-\beta|^q \leqslant 2\,(|\alpha|^p + |\beta|^p)^{q-1} \qquad cu\ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.$$

Demonstraţie. Fie $T : R^2 \to R^2$ definită prin :

$$T(\alpha, \beta) = (\alpha+\beta, \alpha-\beta),$$

pentru care definim

$$\|T\|_{p,q} = \sup_{|\alpha|^p+|\beta|^p\leqslant 1} (|\alpha+\beta|^q + |\alpha-\beta|^q)^{1/q}$$

considerînd pe R^2 norma indusă de l^p dacă este domeniu de definiţie, respectiv norma din l^q, dacă este codomeniu. Putem aplica lui T

teorema lui Riesz de convexitate [70], conform căreia funcția $\left(\frac{1}{p}, \frac{1}{q}\right) \to$ $\to \ln \| T \|_{p,q}$ este convexă în $\left(\frac{1}{p}, \frac{1}{q}\right)$, cînd $0 \leqslant \frac{1}{p}, \frac{1}{q} \leqslant 1$. Fie $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$; atunci avem: $\left(\frac{1}{p}, \frac{1}{q}\right) = \frac{1}{p}(1,0) + \frac{1}{q}(0,1)$ și prin urmare

$$\ln \| T \|_{p,q} \leqslant \frac{1}{p} \ln \| T \|_{1,\infty} + \frac{1}{q} \ln \| T \|_{\infty,1} =$$

$$= \ln \left(\| T \|_{1,\infty}^{\frac{1}{p}} \, \| T \|_{\infty,1}^{\frac{1}{q}} \right).$$

Am obținut deci:

$$\| T \|_{p,q} \leqslant \| T \|_{1,\infty}^{\frac{1}{p}} \, \| T \|_{\infty,1}^{\frac{1}{q}}.$$

Dar

$$\| T \|_{1,\infty} = \sup_{|\alpha| + |\beta| \leqslant 1} \max (|\alpha + \beta|, |\alpha - \beta|) \leqslant 1$$

și

$$\| T \|_{\infty,1} = \sup_{|\alpha| \leqslant 1, |\beta| \leqslant 1} (|\alpha + \beta| + |\alpha - \beta|) \leqslant 2$$

după cum ne arată un calcul simplu; astfel inegalitatea de mai sus devine:

$$\| T \|_{p,q} = 2^{1/q} \text{ și deci } (|\alpha + \beta|^q + |\alpha - \beta|^q)^{1/q} \leqslant 2^{\frac{1}{q}} (|\alpha|^p + |\beta|^p)^{1/p}$$

de unde rezultă (1).

LEMA 4.2. *Pentru orice α, β complexe și $k \geqslant 2$, avem :*

$$(2) \qquad |\alpha + \beta|^k + |\alpha - \beta|^k \leqslant 2^{k-1} (|\alpha|^k + |\beta|^k).$$

Demonstrație. Observăm că pentru orice $a, b > 0$, $k \geqslant 2$, are loc : $(a^k + b^k)^{1/k} \leqslant (a^2 + b^2)^{1/2}$.

Într-adevăr, pentru $a^2 + b^2 = 1$, avem

$$a^k + b^k \leqslant a^2 + b^2 = 1 \text{ deci } (a^k + b^k)^{1/k} \leqslant (a^2 + b^2)^{1/2}.$$

Se observă că această ultimă inegalitate este verificată și dacă $a^2 + b^2 = M$, $M > 0$, deci pentru orice $a, b > 0$. Atunci

$$(|\alpha + \beta|^k + |\alpha - \beta|^k)^{1/k} \leqslant (|\alpha + \beta|^2 + |\alpha - \beta|^2)^{1/2} =$$
$$= \sqrt{2}\,(|\alpha|^2 + |\beta|^2)^{1/2}$$

(am folosit identitatea paralelogramului).

Din inegalitatea lui Hölder pentru $\frac{2}{k} + \frac{k-2}{k} = 1$, rezultă :

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 \leqslant (|\alpha|^k + |\beta|^k)^{\frac{2}{k}} . (1 + 1)^{\frac{k-2}{k}} =$$
$$= (|\alpha|^k + |\beta|^k)^{\frac{2}{k}} . 2^{\frac{k-2}{k}},$$

de unde acum se obține imediat (2)

LEMA 4.3. *Pentru orice a, $b \geqslant 0$. și $s \geqslant 1$, avem*

$$(3) \qquad (a^{\frac{1}{s}} + b^{\frac{1}{s}})^s \geqslant a + b.$$

Demonstrație. Să considerăm inegalitatea $(1 + \alpha)^s \geqslant 1 + \alpha^s$, adevărată pentru orice $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ și să presupunem că $a < b$; atunci :

$$\left(1 + \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{s}}\right)^s \geqslant 1 + \frac{a}{b} \text{ și deci } (a^{\frac{1}{s}} + b^{\frac{1}{s}})^s \geqslant a + b.$$

Cazul $a > b$ se tratează la fel iar dacă $a = b$, avem :

$$(2a^{\frac{1}{s}})^s = 2^s a \geqslant 2a.$$

q.e.d.

LEMA 4.4. *Pentru orice* $a,b \geqslant 0$, $0 < p \leqslant 1$, *avem* :

(4) $$a^p + b^p \leqslant (a + b)$$

Demonstraţie. Rezultă din (2) luînd $s = \frac{1}{p}$.

q.e.d.

LEMA 4.5. *Fie* (S, Σ, μ) *un spaţiu cu măsură pozitivă,* $0 < p \leqslant 1$ *şi* $f, g \in L^p(S, \Sigma, \mu)$ *pozitive. Atunci*

(5) $$\left(\int f^p \, d\mu\right)^{1/p} + \left(\int g^p d\mu\right)^{1/p} \leqslant \left(\int (f+g)^p \, d\mu\right)^{1/p}.$$

Demonstraţie. Fie $a = \left(\int f^p d\mu\right)^{1/p}$, $b = \left(\int g^p d\mu\right)^{1/p}$ şi $s = \frac{1}{p}$ în lema 4.2 ; avem :

$$\left(\int f^p \, d\mu\right)^{1/p} + \left(\int g^p d\mu\right)^{1/p} \leqslant \left(\int (f^p + g^p) \, d\mu\right)^{1/p}$$

Conform lemei 4.3 avem : $f^p + g^p \leqslant (f + g)^p$ şi astfel

$$\left(\int f^p d\mu\right)^{1/p} + \left(\int g^p d\mu\right)^{1/p} \leqslant \left(\int (f + g)^p d\mu\right)^{1/p}.$$

q.e.d.

TEOREMA 4.1. *Orice spaţiu* $L^p(S, \Sigma, \mu)$ *cu* $1 < p < +\infty$ *este uniform convex.*

Demonstrație. Vom deosebi două cazuri

I) Fie $p \geqslant 2$; în acest caz din (2) rezultă direct:

$$\|f+g\|^p\| + \|f-g\|^p \leqslant 2^{p-1}(\|f\|^p + \|g\|^p)$$

pentru orice $f, g \in L^p(S, \Sigma, \mu)$. De aici se obține imediat, folosind propoziția 2.2 (a), că $L^p(S, \Sigma, \mu)$ este uniform convex.

II) Fie $1<p<2$, fie q astfel încît $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ și $s=\frac{p}{q}$.

Evident $q \geqslant 2$ și $0<s\leqslant 1$; fie $f, g \in L^p(S, \Sigma, \mu)$ și să notăm prin: $f_1 = |f+g|^q$, $g_1 = |f-g|^q$.

Atunci $f_1, g_1 \in L^s(S, \Sigma, \mu)$ și sînt pozitive; le putem aplica lema 4.5 și obținem:

$$\left(\int |f+g|^p \mathrm{d}\mu\right)^{q/p} + \left(\int |f-g|^p \mathrm{d}\mu\right)^{q/p} \leqslant$$

$$\left[\int \left(|f+g|^q + |f-g|^q\right)^{p/q} \mathrm{d}\mu\right]^{q/p} \leqslant$$

$$\leqslant 2\left[\int |f|^p + |g|^p\right) \mathrm{d}^p\mu\right]^{q/p}$$

(am folosit și (1)).

Avem deci

$$\|f+g\|^q + \|f-g\|^q \leqslant 2(\|f\|^p + \|g\|^p)^{q-1},$$

de unde rezultă ușor și în acest caz uniform convexitatea spațiului.

q.e.d.

PROPOZIȚIA 4.1. *Orice aplicație de dualitate în* $L^p(S, \Sigma, \mu)$, $1<p<+\infty$, *este un homeomorfism între* L^p *și* L^q.

Demonstrație. Într-adevăr, rezultă din teorema precedentă combinată cu teorema 2.8 și corolarul teoremei 3.7 că aplicația de dualitate este o bijecție și este continuă în topologiile normelor.

PROPOZIȚIA 4.2. *Aplicația de dualitate în* $L^p(S, \Sigma, \mu)$ *corespunzătoare funcției* $\varphi(t) = t^{p-1}$, *este*

$$\mathfrak{J} f = |f|^{p-1}\cdot \operatorname{sign} f = |f|^{p-2}\cdot f.$$

Demonstrație. După teorema lui Asplund putem calcula aplicația de dualitate ca diferențiala Gateaux a funcției $\psi(\|f\|)$, unde $\psi = \dfrac{t^p}{p}$; astfel pentru $f \in L^p$ și $g \in L^q$ avem:

$$< \mathfrak{J} f, g > = \frac{d}{dt}\psi(\|f + tg\|)\Big|_{t=0} = \frac{1}{p}\frac{d}{dt}(\|f + tg\|^p)\Big|_{t=0} =$$

$$= \frac{1}{p}\frac{d}{dt}\int |f + tg|^p \, d\mu\Big|_{t=0} = \int |f|^{p-1}(\operatorname{sign} f) g \, d\mu =$$

$$= \int |f|^{p-2} f\cdot g \, d\mu = < |f|^{p-2} f, g >.$$

q.e.d.

Observăm că orice altă aplicație de dualitate $\mathfrak{J}_1$ pe L^p va fi de forma: $\mathfrak{J}_1 f = \gamma(\|f\|)\,\mathfrak{J} f$, unde $\gamma(t)$ este o funcție nenegativă pe R_+.

COROLAR. *Aplicația de dualitate pe* l^p, $1 < p < +\infty$ *cu pondere* $\varphi(t) = t^{p-1}$, *este*:

(6) $$\mathfrak{J}\,\xi = \{|\xi_k|^{p-2}\cdot \xi_k\}_{k\in N}, \quad \forall \xi = \{\xi_k\}_{k\in N} \in l^p.$$

TEOREMA 4.2. *În spațiile* l^p, $1 < p < \infty$, *aplicația de dualitate este secvențial continuă de la topologia slabă pe* l^p, *la topologia slabă pe* l^q.

Demonstrație. Amintim că slab convergența în spațiile l^p este echivalentă cu mărginirea în normă și convergența pe componente. Deci dacă $\xi^{(n)}$, $n \geq 1$, este un șir în l^p, slab convergent către $\xi \in l^p$, atunci $\xi_k^{(n)} \to \xi_k$, $\forall k \geq 1$. Din (6) rezultă: $(\mathfrak{J}\,\xi^{(n)})_k = |\xi_k^{(n)}|^{p-2}\,\xi_k^{(n)}$ și deci orice componentă a lui $\mathfrak{J}\xi^{(n)}$ converge către componenta corespunzătoare a lui $\mathfrak{J}\,\xi$. În plus mărginirea în normă a şirului $\xi^{(n)}$ implică mărginirea şirului $\mathfrak{J}\,\xi^{(n)}$ şi deci $\mathfrak{J}\,\xi^{(n)}$ converge slab în l^q către $\mathfrak{J}\,\xi$.

q.e.d.

TEOREMA 4.3. *În spaţiile $L^p([0,1])$ $1<p<\infty$, $p\neq 2$ nu există nici o aplicaţie de dualitate secvenţial slab continuă.*

Demonstraţie. Vom construi un şir $\{f_n\}_n \subset L^p([0,1])$, $\|f_n\|=1$, astfel încît $f_n \rightharpoonup 0$ în $L^p([0,1])$ în timp ce $\mathfrak{J} f_n$ converge slab la o limită nenulă în $L^q([0,1])$.

Fie pentru aceasta $f_0 \in L^p([0,1])$, astfel încît $\int_0^1 f_0(t)\mathrm{d}t = 0$ iar $\int_0^1 |f_0(t)|^{p-2} f_0(t)\,\mathrm{d}t = a_0 \neq 0$. Să normalizăm pe f_0, deci $\int_0^1 |f_0(t)|^p \mathrm{d}t = 1$ şi s-o extindem la $[0,+\infty)$ luînd-o periodică de perioadă 1. Pentru $n\geqslant 1$, fie $f_n(t) = f_0(nt)$. Atunci, ţinînd cont de periodicitatea lui f_0, avem:

$$\|f_n\|^p = \int_0^1 |f(nt)|^p \mathrm{d}t = \frac{1}{n}\int_0^n |f_0(t)^p|\mathrm{d}t = \frac{n}{n} = 1.$$

Pentru a demonstra că $\{f_n\}_n$ converge slab la zero în $L^p([0,1])$, e suficient să arătăm că pentru orice $a\in[0,1]$, $\int_0^a f_n(t)\,\mathrm{d}t \to 0$. Dar

$$\int_0^a f_n(t)\mathrm{d}t = \int_0^a f_0(nt)\mathrm{d}t = \frac{1}{n}\int_0^{an} f_0(t)\mathrm{d}t =$$

$$= \frac{1}{n}\int_{[an]}^{an} f_0(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{n}\int_0^{an-[an]} f_0(t)\mathrm{d}t \xrightarrow[n]{} 0.$$

Pe de altă parte:

$$\int_0^1 (\mathfrak{J} f_n)(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 |f_n(t)|^{p-2} f_n(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 |f_0(nt)|^{p-2} f_0(nt)\mathrm{d}t =$$

$$= \frac{1}{n}\int_0^n |f_0(t)|^{p-2} f_0(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 |f_0(t)|^{p-2} f_0(t)\mathrm{d}t = a_0 \neq 0.$$

şi deci $\mathfrak{J} f_n$ nu poate converge slab la zero.

Din forma oricărei alte aplicații de dualitate $\mathfrak{J}_1$ pe L, rezultă că și $\mathfrak{J}_1 f_n$ converge slab la o limită nenulă și deci nici o aplicație de dualitate nu este slab continuă.

q.e.d.

Vom da acum o aplicație a noțiunii de aplicație de dualitate la o problemă de teoria seriilor Fourier.

Fie $f \in L^p$ ([0,2]π) $1<p<\infty$; coeficienții Fourier ai lui f sînt definiți prin :

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{int} f(t)dt \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Avem următorul rezultat al lui Beurling-Livingston [12] :

TEOREMA 4.4. *Fie mulțimea întregilor împărțită în două clase nevide disjuncte A și A' și fie $1<p<\infty$ și un șir de numere $\{a_n\}_n$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ cu proprietatea că există două funcții $g_0 \in L^p$ $[0,2\pi]$ și $h_0 \in L^q[0,2\pi]$, astfel încît $c_n(g_0) = a_n$, $n \in A$* și $c_n(h_0) = a_n$, *$n \in A'$.*

Atunci există o funcție unică $f_0 \in L^p[0,2\pi]$, astfel încît

$$c_n(f_0) = a_n,\ n \in A \quad \text{și } c_n(\mathfrak{J} f_0) = a_n,\ n \in A'.$$

Pentru $p = 2$, obținem un rezultat clasic al lui Riesz-Fischer. În demonstrație vom folosi :

LEMA 4.5. *Fie mulțimea întregilor împărțită în două clase nevide disjuncte A și A' și fie V submulțimea lui $L^p[0,2\pi]$, $1<p<\infty$ formată din funcțiile f cu $c_n(f) = 0$, $\forall\ n \in A$; atunci închiderea mulțimii tuturor combinațiilor liniare finite de e^{int}, $n \in A'$ este exact V.*

Demonstrație. Amintim că pentru orice $f \in L^p$ $[0,2\pi]$, $1<p<\infty$, $\sum\limits_{n=-k}^{k} c_n(f)e^{inx} \xrightarrow[k]{L^P} f$. Se observă ușor că V este închisă, ca urmare a inegalității :

$$|c_n(f) - c_n(g)| \leqslant M\,\|f - g\|.$$

De asemeni, cum $\{e^{int}\}$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ este o mulțime ortonormală în L^2 $[0,2\pi]$, rezultă că $e^{int} \in V$, $\forall\ n \in A'$.

Orice element f din V are seria sa Fourier formată numai din termeni de forma $c_n(f)\,e^{int}$, $n \in A'$, şi după teorema de convergenţă amintită mai sus, rezultă că $f \in V$.

q.e.d.

Demonstraţia teoremei 4.4. Vom aplica lui $L^p[0,2\pi]$ care este reflexiv şi strict convex, teorema lui Beurling-Livingston, în care avem chiar unicitate pentru elementul din intersecţie.

Fie $V = \{g \in L^p\,[0,2\pi],\ c_n(g) = 0,\ n \in A\}$; V este închisă şi anulatorul său coincide cu mulţimea:

$W = \{h \in L^q\,[0,2\pi]$ cu $c_n(h) = 0,\ n \in A'\}$.

Într-adevăr dacă $h \in V^{\perp}$, cum $e^{int} \in V$, $\forall\ n \in A'$, rezultă

$$\int h(t) e^{int}\,dt = 0, \text{ deci } c_n(h) = 0 \text{ şi deci } V^{\perp} \subset W.$$

Fie acum $h \in W$ şi $f \in V$; atunci $f = \lim\limits_{A'} \sum e^{int} c_n(f)$, de unde rezultă

$$\int f(t)\, h(t)\,dt = \lim_{A'} \sum c_n(f) \int e^{int} h(t)\,dt = 0.$$

Evident: $$g_0 + V = \{g \in L^p[0,2\pi], \text{ cu } c_n(g) = a_n,\ n \in A\}$$

şi

$$h_0 + V^1 = \{h \in L^q[0,2\pi], \text{ cu } c_n(h) = a_n,\ n \in A'\}.$$

După teorema 3.2 capitolul I şi teorema 1.4 capitolul II, există un punct unic în intersecţia $\mathfrak{J}\,(g_0 + V) \cap (h_0 + V^{\perp})$ şi deci există un $f_0 \in L^p\,[0,2\pi]$, unic, astfel încît:

$$c_n(f_0) = a_n,\ n \in A \text{ şi } c_n(\mathfrak{J} f_0) = a_n,\ n \in A'.$$

q.e.d.

Încheiem acest paragraf printr-un alt exemplu de aplicaţie de dualitate pe un spaţiu Sobolev des întîlnit în aplicaţii, anume

$$H_0^{1,p}(\Omega) = \left\{ f \in L^p(\Omega), \frac{\partial f}{\partial x_i} \in L^p(\Omega),\ 1 \leqslant i \leqslant n,\ f = 0 \text{ pe } \partial\Omega \right\}$$

$\left(\text{unde } \frac{\partial}{\partial x_i}\right.$ este o derivată distribuțională și $\partial\Omega$ este frontiera lui $\Omega \subset R^n$, presupus deschis și mărginit$\Big)$ cu norma

$$\|f\|_{1,p} = \left(\sum_i \int_\Omega \left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|^p \mathrm{d}x\right)^{1/p}.$$

Propoziția 4.3. *Aplicația de dualitate pe $H_0^{1,p}(\Omega)$ corespunzătoare funcției $\varphi(t) = t^{p-1}$, este*

$$\mathfrak{J}f = -\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|^{p-2} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i}\right).$$

Demonstrație. Observăm că norma din $H_0^{1,p}$ se obține astfel: se aplică lui $f \in L^p(\Omega)$ un operator diferențial liniar iar apoi se ia norma în L^p, despre care știm că este derivabilă Gateaux; ca urmare și norma din $H_0^{1,p}$ este derivabilă Gateaux și avem, $\forall g$ din dualul lui $H_0^{1,p}$:

$$<\mathfrak{J} f, g> = \frac{1}{p}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\|f + tg\|_{1,p}^p)|_{t=0} =$$

$$= \frac{1}{p}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \cdot \sum_{i=1}^n \int_\Omega \left|\frac{\partial f}{\partial x_i} + t\frac{\partial g}{\partial x_i}\right|^p \mathrm{d}x\Big|_{t=0} =$$

$$= \sum_{i=1}^n \int \left|\frac{\mathrm{d}f_i}{x_i}\right|^{p-1} \cdot \left(\operatorname{sign}\frac{\partial f_i}{\partial x_i}\right) \cdot \frac{\partial g}{\partial x_i}\mathrm{d}x =$$

$$= <-\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}\left|\frac{\partial f_i}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial f_i}{\partial x_i}, g>.$$

Observăm că dacă $p = 2$, găsim că:

$$\mathfrak{J} f = -\Delta f$$

şi astfel aplicaţiile de dualitate pe $H_0^{1,p}$ apar ca generalizări „naturale'' neliniare ale lui $-\Delta$.

O altă astfel de generalizare, se obţine pornind de la funcţionala convexă pe $H_0^{1,p}$ (Ω)

$$F(f) = \frac{1}{p}\int_\Omega |\operatorname{grad} f|^p \, dx = \psi(\|f\|),$$

unde $\psi(t) = \dfrac{1}{p} t^p$, iar $\|f\| = \left(\int |\operatorname{grad} f|^p \, dx\right)^{1/p}$.

În acest caz :

$$\mathfrak{J} f = DF(f) = -\operatorname{div}(|\operatorname{grad} f|^{p-2} \operatorname{grad} f).$$

q.e.d.

Referinţe. Uniform convexitatea spaţiilor L^p a fost stabilită de A. Clarkson [45]. Teoremele 4.2, 4.3 se găsesc în lucrarea lui F. Browder-G. de Figueiredo [40], aplicaţia la seriile Fourie aparţine lui Beurling-Livingston [12], rezultate se găsesc şi în cursul lui G. de Figueiredo [74].

Aplicaţiile de dualitate pe spaţiile Sobolev sînt studiate în J. Lions [106].

§ 5. APLICAŢII DE DUALITATE ÎN ALTE CLASE DE SPAŢII BANACH

O altă clasă largă de spaţii Banach care se poate caracteriza prin aplicaţii de dualitate, este cea a spaţiilor cu proprietatea (h).

DEFINIŢIA 5.1. *Se spune că spaţiul Banach X are proprietatea (h), dacă pentru orice şir $x_n \underset{n}{\rightharpoonup} x$ cu $\|x_n\| \to \|x\|$, are loc: $x_n \underset{n}{\to} x$.*

Un spaţiu Banach X are proprietatea (H), dacă este strict convex şi are proprietatea (h).

Observăm că orice spaţiu local uniform convex are proprietatea (H) ; şi că pe orice spaţiu Banach reflexiv există o normă echivalentă în care X şi X^* au proprietatea H. Uu spaţiu Banach cu proprietatea (H) nu este întotdeauna reflexiv ; un exemplu în acest sens este dat de către F.Kan-I.Glicksberg [72].

DEFINIŢIA 5.2. *Fie $T: X \to X^*$; se spune că*

a) *T are proprietatea (S) dacă pentru orice şir $x_n \underset{n}{\rightharpoonup} x$ cu $< Tx_n - Tx, x_n - x > \underset{n}{\to} 0$, avem: $x_n \underset{n}{\to} x$.*

b) *T are proprietatea (Q) dacă pentru orice șir $x_n \xrightarrow[n]{} x$ cu $\|Tx_n\| \to \|Tx\|$, avem $<Tx_n, x> \xrightarrow[n]{} <Tx, x>$.*

TEOREMA 5.1. *Fie X un spațiu Banach reflexiv pentru care X^* are proprietatea (H). Atunci orice aplicație de dualitate pe X este continuă, cînd pe X și X^* se iau topologiile normelor.*

Demonstrație. Folosind teorema 1.2, rezultă că aplicația de dualitate $\mathfrak{I}$ este continuă de la X cu topologia tare în X^* cu topologia slabă; astfel dacă $x_n \xrightarrow[n]{} x$, atunci $\mathfrak{I}x_n \xrightarrow[n]{} \mathfrak{I}x$. Vom arăta că de fapt are loc $\mathfrak{I}x_n \xrightarrow[n]{} \mathfrak{I}x$.

Într-adevăr, cum :

$$\|\mathfrak{I}x_n\| = \varphi(\|x_n\|) \xrightarrow[n]{} \varphi(\|x\|) = \|\mathfrak{I}x\|$$

și X^* are proprietatea (H), convergența rezultă.

q.e.d.

COROLAR. *Fie X un spațiu Banach reflexiv cu X^* local uniform convex; atunci orice aplicație de dualitate este continuă în topologiile normelor.*

PROPOZIȚIA 5.1. *Fie X un spațiu Banach satisfăcînd proprietatea (h), cu X^* strict convex; atunci orice aplicație de dualitate pe X are proprietatea (S).*

Demonstrație. Fie $\{x_n\} \subset X$ un șir astfel încît $x_n \xrightarrow[n]{} x$ și $<\mathfrak{I}x_n - \mathfrak{I}x, x_n - x> \to 0$. Atunci din :

$$<\mathfrak{I}x_n - \mathfrak{I}x, x_n - x> = <\mathfrak{I}x_n, x_n> - <\mathfrak{I}x_n, x> - <\mathfrak{I}x, x_n> +$$
$$+ <\mathfrak{I}x, x> = [\varphi(\|x_n\|) - \varphi(\|x\|)](\|x_n\| - \|x\|) + (\|\mathfrak{I}x\|\,\|x_n\| - <\mathfrak{I}x, x_n>) +$$
$$(\|\mathfrak{I}x_n\|\,\|x\| - <\mathfrak{I}x_n, x>)$$

(deoarece fiecare din paranteză este pozitivă) rezultă :

$\|x_n\| \xrightarrow[n]{} \|x\|$; atunci $x_n \xrightarrow[n]{} x$.

q.e.d.

TEOREMA 5.2. *Un spațiu Banach X are proprietatea (h) dacă și numai dacă cel puțin o secțiune a unei aplicații de dualitate $\mathfrak{I}$, satisface condițiile (S) și (Q).*

Demonstraţie. Să presupunem că X are proprietatea (h) şi fie T o secţiune a lui $\mathcal{J}$ cu pondere φ; faptul că T are proprietatea (S) este o consecinţă a teoremei precedente. Fie $x_n \xrightarrow[n]{} x$ şi $\| Tx_n \| \to \| Tx \|$; avem: $\| Tx_n \| = \varphi(\| x_n \|) \to \varphi(\| x \|) = \| Tx \|$, de unde rezultă că $\| x_n \| \xrightarrow[n]{} \| x \|$, deci $x_n \xrightarrow[n]{} x$. Atunci

$$<Tx_n, x_n> = \| x_n \| \varphi(\| x_n \|) \to \varphi(\| x \|) \| x \| = <Tx, x>$$

şi

$$<Tx, x> - <Tx_n, x> = <Tx, x> - <Tx_n, x_n> + \\ + <Tx_n, x_n> - <Rx_n, x>$$

de unde:

$$|<Tx, x> - <Tx_n, x>| \leqslant |<Tx, x> - <Tx_n, x_n>| + \\ + \| Tx_n \| \, \| x_n - x \| \xrightarrow[n]{} 0$$

şi prin urmare T satisface condiţia (Q).

Invers, fie $\{x_n\}_n \subset X$, astfel încît $x_n \xrightarrow[n]{} X$ şi $\| x_n \| \to \| x \|$. Avem

$$\| Tx_n \| = \varphi(\| x_n \|) \xrightarrow[n]{} \varphi(\| x \|) = \| Tx \|$$

şi din proprietatea (Q) pentru T, rezultă

$$<Tx_n, x> \to <Tx, x> .$$

Cum are loc:

$$<Tx_n - Tx, x_n - x> = (\| x_n \| - \| x \|)(\varphi \| x_n \|) - \varphi(\| x \|)) + \\ + (\| Tx_n \| \, \| x \| - <Tx_n, x>) + (\| Tx \| \, \| x_n \| - <Tx, x_n>)$$

rezultă că: $<Tx_n - Tx, x_n - x> \to 0$.

Proprietatea (S) pentru T, implică faptul că $x_n \xrightarrow[n]{} x$, deci X are proprietatea (h).

q.e.d.

Din teorema 1.4 şi teorema precedentă, rezultă :

TEOREMA 5.3. *Un spațiu Banach X are proprietatea (H) dacă și numai dacă există o aplicație de dualitate strict monotonă pentru care cel puțin o secțiune satisface condițiile (S) și (Q).*

Observația 5.1. Dacă X este reflexiv iar atît X cît şi X^* sînt strict convexe, atunci X are proprietatea (h) dacă şi numai dacă $\mathfrak{J}^{-1}$ satisface condiţiile (S) şi (Q).

Folosind acum şi propoziţia 3.7, obţinem

PROPOZIȚIA 5.2. *Fie X reflexiv, cu X, X^* strict convexe; atunci X au proprietatea (h), $\mathfrak{J}$ este continuă iar $\mathfrak{J}^{-1}$ satisface condiția (Q) dacă și numai dacă X^* are proprietatea (h), $\mathfrak{J}^{-1}$ este continuă iar $\mathfrak{J}$ satisface condiția (Q).*

O clasă importantă de spaţii cu proprietatea (h), care intervine în teoria punctelor fixe, este următoarea :

DEFINIȚIA 5.3. *Un spațiu Banach satisface condiția (I) dacă există pe X o aplicație de dualitate pentru care cel puțin o secțiune este secvențial continuă, de la X cu topologia slabă în X^*, cu X-topologia pe X^*.*

După propoziţia 3.6, cap. I rezultă că în mod necesar în cazul spaţiilor care satisfac condiţia (I), $\mathfrak{J}$ este univocă, deci astfel de spaţii sînt netede.

PROPOZIȚIA 5.3. *Orice spațiu Banach X cu proprietatea (I) are proprietatea* (h).

Demonstrație. Fie $\mathfrak{J}$ cu proprietatea de continuitate din definiţia de mai sus, avem, conform propoziţiei 1.5 :

$$\psi(\|x_n - x\|) = \psi(\|x_n\|) + \int_0^1 <\mathfrak{J}(x_n - tx), -x> dt.$$

Să presupunem că $x_n \underset{n}{\rightharpoonup} x$ şi $\|x_n\| \underset{n}{\rightarrow} \|x_n\|$, atunci

$$\lim \psi(\|x_n - x\|) = \psi(\|x\|) + \int_0^1 < \mathfrak{J}(x - tx), -x> dt =$$

$$= \psi(\|x\|) + (\psi(\|x - x\|) - \psi(\|x\|) = 0.$$

Prin urmare $\lim\limits_n \| x_n - x \| 0.$

q.e.d.

COROLAR. *Dacă X are proprietatea* (I) *şi este strict convex, atunci* X *au proprietatea* (H),

Observăm că spaţiile l^p satisfac condiţia (I) în timp ce spaţiile L^p nu o satisfac ($1 < p < +\infty$).

PROPOZIŢIA 5.4. *Fie X reflexiv satisfăcînd proprietatea* (I); *atunci X este local uniform convex.*

Demonstraţie. Fie $\|x_n\| = \|x\|$ şi $\|x + x_n\| \underset{n}{\to} 2\|x\|$; trebuie să arătăm că $x_n \underset{n}{\to} x$. Spaţiul X fiind reflexiv, e suficient să arătăm că dacă pentru un subşir $\{x_{n'}\} \subset \{x_n\}$, avem $x_{n'} \underset{n'}{\rightharpoonup} y$, atunci $x = y$. Avem, conform propoziţiei 1.5 (X^* fiind strict convex):

$$\psi(\|x_{n'} + x\|) - \psi(\|x_{n'}\|) = \int_0^1 < \mathfrak{J}(x_{n'} + tx), x > dt$$

şi trecînd la limită, găsim

$$\psi(\|x + x\|) - \psi(\|x\|) = \int_0^1 < \mathfrak{J}(y + tx), x > dt$$

şi aplicînd din nou propoziţia 1.5, obţinem:

$$\int_0^1 < \mathfrak{J}(x + tx), x > dt = \int_0^1 < \mathfrak{J}(y + tx), x > dt. \tag{1}$$

Prima integrală este egală cu $\int_0^1 \|x\| \ \varphi(\|x + tx\|)\, dt$

şi deci

$$\int_0^1 (\|x\| \ \varphi(\|x + tx\|) - < \mathfrak{J}(y + (x), x >)\, dt = 0.$$

Dar $< \mathfrak{J}(y + tx), x > \leqslant \|x\| \ \varphi(\|y + tx\|) \leqslant \|x\| \ \varphi(\|x + tx\|)$

deoarece $\|y\| \leqslant \varliminf_{n'} \|x_{n'}\| \leqslant \|x\|$ şi prin urmare:

$\|y + tx\| \leqslant \|x\| + t\|x\| = \|x + tx\|$.

Astfel

$$< \mathfrak{J}(y + tx), x > = \|x\| \ \varphi(\|x + tx\|) = \|x\| \ \varphi(\|y + tx\|) =$$

$$= \|x\| \ \|\mathfrak{J}(y + tx)\| \quad \forall t \in [0,1].$$

Eliminînd cazul banal $x = 0$, obținem :

$$\frac{x}{\|x\|} = \frac{y + tx}{\|y + tx\|} \ \forall t \in [0,1] \text{ cu } y + tx \neq 0$$

(aceasta din cauză că orice funcțională din X^* își atinge norma în cel mult un punct).

Atunci evident $y = \dfrac{\|y\|}{\|x\|} \cdot x$ iar din (1) rezultă acum ușor

că $y = x$. Prin urmare $x_n \underset{n}{\rightharpoonup} x$ și deci $x_n \underset{n}{\to} x$, conform propoziției 5.3.

q.e.d.

Observația 5.2. Reciproca acestei teoreme nu este adevărată iar drept contraexemplu putem da spațiul $L^p[0,1]$, cu $1 < p < \infty$.

Ultima clasă de spații Banach de care ne vom ocupa este aceea a spațiilor cu proprietatea (π_1).

DEFINIȚIA 5.3. *Von spune că un spațiu Banach X are proprietatea (π_1), dacă există o mulțime $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ de subspații finit dimensionale ale lui X, filtrantă față de incluziune, a căror reuniune este densă în X și proiecțiile liniare, continue $P_\alpha : X \to X_\alpha$, $\alpha \in A$ cu $\|P_\alpha\| = 1$.*

Dacă familia de subspații de mai sus este numărabilă și monoton crescătoare față de incluziune și dacă $P_n x \underset{n}{\to} x$, $\forall x \in X$, se spune că X este un spațiu cu schemă proiecțională de tip (π_1).

Exemple de spații cu proprietatea (π_1) sînt spațiile Hilbert; într-adevăr, putem lua drept $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ mulțimea tuturor subspațiilor finit dimensionale ale lui X iar P_α, proiecțiile ortogonale corespunzătoare. Dacă spațiul Hilbert este separabil, atunci el este cu schemă proiecțională de tip (π_1).

Amintim că un spaţiu Banach X are o bază Schauder monotonă dacă există un şir $\{x_n\}_{n\in N}$, astfel încît pentru orice $x \in X$ să existe

$\alpha_j \in R$, $j \in N$ *pentru care* $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j \underset{n}{\rightarrow} x$ şi $\| \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j \| \leqslant \|x\|$.

Atunci :

PROPOZIŢIA 5.5. *Orice spaţiu Banach cu bază Schauder monotonă este un spaţiu cu schemă proiecţională de tip π_1.*

Demonstraţie. Putem lua drept X_n, subspaţiul finit dimensional generat de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ iar

$$P_n x = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j . \qquad \text{q.e.d.}$$

De exemplu spaţiile c_0, l^p, $p \geqslant 1$ sînt spaţii cu bază Schauder monotonă dată de $l_n = \{\underbrace{0, \ldots, 0, 1}_{n}, 0, \ldots\}$ pentru care subspaţiile X_n sînt formate din şirurile a căror componente, de la n încolo, se anulează.

De asemeni şi $C[X]$, cu X spaţiu metric compact, este un spaţiu cu bază Schauder monotonă [74].

Vom da acum următorul rezultat al lui R. Beals :

PROPOZIŢIA 5.6. *Fie (S, Σ, μ) un spaţiu cu măsură σ — finită, atunci pentru orice $1 \leqslant p < \infty$, spaţiul L^p (S, Σ, μ) are proprietatea (π_1).*

Demonstraţie. Fie $(\Sigma_1, \ldots, \Sigma_r)$ o familie finită de submulţimi disjuncte de măsură finită, ale lui Σ şi fie χ_j funcţia caracteristică a lui Σ_j $j = 1, \ldots, r$.

Să considerăm spaţiul finit dimensional Y al lui L^p generat de funcţiile $\chi_1, \ldots, \chi_r$; fie P proiecţia definită prin

$$Pf = \sum_{j=1}^{r} \frac{1}{\mu(\Sigma_j)} \left[\int_{\Sigma_j} f \, d\mu \right] \chi_j$$

Vom arăta că $\|P\| = 1$; într-adevăr :

$$\|Pf\|^p = \int_S \sum_{j=1}^{r} \frac{1}{\mu(\Sigma_j)^p} \left| \int_{\Sigma_j} f \, d\mu \right|^p \chi_j \, d\mu = \sum_{j=1}^{r} \mu(\Sigma_j)^{1-p} \left| \int_{\Sigma_j} f \, d\mu \right|^p \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j=1} \mu(\Sigma_j)^{1-p} \int_{\Sigma_j} |f|^p \, d\mu \cdot \mu(\Sigma_j)^{\frac{p}{q}} = \sum_{j=1}^{r} \int_{\Sigma_j} |f|^p d\mu .$$

Prin urmare $\|Pf\|^p \leqslant \int_S |f|^p \, d\mu = \|f\|^p$ ceea ce implică

$$\|P\| = 1.$$

Să observăm în încheiere că reuniunea tuturor mulțimilor Y, corespunzătoare tuturor alegerilor posibile a mulțimilor măsurabile disjuncte $(\Sigma_1, \ldots, \Sigma_r)$ $r = 1, 2, \ldots,$ este densă în $L^p(S, \Sigma, \mu)$; datorită faptului că orice $f \in L^p$ poate fi aproximat în norma din L^p prin funcții simple :

q.e.d.

Corolar. *Spațiul $L^p[0,1]$ este cu schemă proiecțională de tip* (π_1).

Demonstrație. Luăm în acest caz drept X_n subspațiul finit dimensional generat de funcțiile caracteristice corespunzătoare unei diviziuni de normă $\frac{1}{n}$, a intervalului 0 și P_n ca mai sus; $\{X_n, P_n\}_{n \in N}$ au proprietățile cerute.

q.e.d.

Fie un spațiu Banach cu proprietatea (π_1) cu $\{X_\alpha, P_\alpha\}_{\alpha \in A}$ date de definiția 5.3 ; pentru orice $\alpha \in A$, operatorul adjunct $P_\alpha^* : X^* \to X^*$ este o proiecție în X^*, de normă tot 1. Se verifică ușor că avem

$$R(P_\alpha^*) = N(P_\alpha)^\perp \text{ și } N(P_\alpha^*) = R(P_\alpha)^\perp,$$

unde $R(P_\alpha^*)$ este imaginea lui P_α^*, $N(P_\alpha)$ = subspațiul pe care P_α se anulează

Propoziția 5.7. *Fie X un spațiu Banach cu proprietatea (π_1) și $\mathfrak{J}$ o aplicație de dualitate pe X ; atunci, pentru orice $x \in X_\alpha$, $\alpha \in A$, avem*

$$P_\alpha^*(\mathfrak{J}\, x) \subset \mathfrak{J} x.$$

Demonstrație. Fie $x^* \in \mathfrak{J}\, x$; vom arăta că $P_\alpha^* x^* \in \mathfrak{J}\, x$.

Într-adevăr, avem :

$$(2) \qquad \langle P_\alpha^* x^*, x \rangle = \langle x^*, P_\alpha x \rangle = \langle x^*, x \rangle = \|x^*\| \, \|x\|$$

și deci $\|x^*\| \leqslant \|P^*_\alpha x^*\|$; cum P^*_α are norma 1, rezultă că

$\|P^*_\alpha x\| = \|x^*\| = \varphi(\|x\|)$.

Aceasta și cu (2) înseamnă tocmai faptul că $P^*_\alpha x^* \in \mathfrak{J}\, x$.

q.e.d.

COROLAR. *Dacă în ipotezele propoziției* 5.7 *adăugăm faptul că* X *este strict convex, atunci* :

$$P^*_\alpha \mathfrak{J}\, x = \mathfrak{J} x$$

Demonstrație. Aceasta rezultă evident din faptul că în acest caz $\mathfrak{J}\, x$ are exact un punct.

q.e.d.

Acest corolar ne arată că aplicația de dualitate duce pe X_α în subspațiul finit dimensional $R(P^*_\alpha)$. Dacă în plus spațiul X este reflexiv, propoziția următoare ne arată că aplicația de dualitate aplică X_α pe $R(P^*_\alpha)$.

PROPOZIȚIA 5.8. *Fie* X *un spațiu Banach reflexiv cu proprietatea* π_1 *și* $\mathfrak{J}$ *o aplicație de dualitate cu pondere* φ : *atunci pentru orice* $\alpha \in A$ *avem* :

$$R(P^*_\alpha) \subset \mathfrak{J}(X_\alpha)$$

Demonstrație Fie $x^* \in R(P^*_\alpha)$; după teorema lui Beurling—Livingston, avem :

$$\mathfrak{J}(X_\alpha) \cap [N(P^*_\alpha) + x^*] = \mathfrak{J}(X_\alpha) \cap (X^\perp_\alpha + x^*) \neq \emptyset \cdot$$

Fie $x \in X_\alpha$ și $y^* \in N(P^*_\alpha)$, astfel încît $y^* + x^* \in \mathfrak{J}\, x$; atunci, după propoziția precedentă :

$$x^* = P^*_\alpha\, P(y^* + x^*) \in \mathfrak{J}\, x.$$

q.e.d.

Referințe. Rezultatele privind caracterizarea spațiilor cu proprietatea (h) și (H) cu ajutorul aplicațiilor de dualitate, aparține lui W.V. Petryshyn [148].

Un studiu al spațiilor cu proprietatea (I) este făcut de I.P. Gossez [81]. Spațiile cu proprietatea (π_1) au fost introduse independent de Fiegueiredo și de J. Lindenstrauss. Spațiile cu scheme proiecționale de tip (π_1) intervin în teoria ecuațiilor aproximante (în rezolvarea lor prin metode aproximative de tip Galerkin). Rezultatele expuse în acest paragraf se găsesc în [74].

§ 6. O CARACTERIZARE A SPAȚIILOR HILBERT

Vom da acum cu ajutorul aplicației de dualitate condiții suficiente pentru ca un spațiu Banach să fie reflexiv, respectiv Hilbert. Pentru aceasta amintim cîteva noțiuni și rezultate ale lui Bishop și Phelps. [13].

DEFINIȚIA 6.1. a) *Fie X un spațiu Banach, $C \subset X$ convexă; $x_0 \in \partial C$ (frontiera lui C) și $x_0^* \in X^*$ numindu-se punct suport pentru C, respectiv funcțională suport pentru C, dacă*

$$x^* \not\equiv 0 \text{ și } <x_0^*, x_0> = \sup_{x \in C} <x_0^*, x>.$$

b) *Se spune că mulțimea $C \subset X$ este suportată în $x_0 \in \partial C$ de către $K + x_0$, dacă mulțimea $K \subset X$ este un con convex astfel încît $K + x_0 \cap C \setminus \{x_0\} = \emptyset$.*

c) *Vom nota prin $K(x^*, k) = \{x / \ \|x\| \leqslant k <x^*, x>\}$, $k > 0$ iar $x^* \in X^*$* cu $\|x^*\| = 1$.

LEMA 6.1. *Fie $C \subset X$ închisă, $x^* \in X^*$ cu $\|x^*\| = 1$ mărginită pe C și $k > 0$; atunci pentru orice $z \in C$, există $x_0 \in X$ astfel încît $x_0 \in K(x^*, k) + z$ și C este suportată în x_0 de către $k(x^*, k)$.*

Demonstrație. Introducem următoarea relație de ordine parțială

$$\text{pe } C : x \succ y \Leftrightarrow x - y \in K(x^*, k) \Leftrightarrow \|x - y\| \leqslant k <x^*, x - y>.$$

Se observă ușor că dacă în C există un element maximal x_0, atunci C este suportat în x_0 de către $K(x^*, k)$.

Pentru a arăta existența unui astfel de element, să aplicăm lema lui Zorn mulțimii $Z = \{x \in C, \ x \succ z\}$.

Fie W o submulțime total ordonată a lui Z; mulțimea $\{<x^*, x>\}_{x \in W}$ este un șir generalizat mărginit și monoton ($x \succ y \Rightarrow <x^*,$

$x> \geqslant < x^*, y>$) deci converge către supremul său şi în particular el este un şir generalizat Cauchy. Relaţia $\|x - y\| \leqslant k\,(<x^*, x> - <x^*, y>)$ $x, y \in W$, ne arată că şi W este un şir generalizat Cauchy în Z. Dar $Z = C \cap (k\,(x^*, k) + z)$ şi cum $K(x^*, k)$ este închisă, rezultă că Z este închis; aşadar W converge către un element $y \in Z$. Folosind continuitatea lui x^* şi a normei, rezultă că $y > x$, $\forall\, x \in W$ şi deci y este o margine superioară a lui W, ceea ce înseamnă că lema lui Zorn se poate aplica.

q.e.d.

LEMA 6.2. *Fie,* $x^*, y^* \in X^*$, $\|x^*\| = \|y^*\| = 1$ *şi* $\varepsilon > 0$; *dacă* $< x^*, x> = 0$ *pentru un* x *cu* $\|x\| \leqslant 1$ *implică* $|< y^*, x>| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ *atunci:*

$$\text{sau } \|x^* + y^*\| \leqslant \varepsilon \text{ sau } \|x^* - y^*\| \leqslant \varepsilon.$$

Demonstraţie. După teorema Hahn-Banach există $z^* \in X^*$ astfel încît $z^* = y^*$ pe $x^{*-1}(0)$ şi $\|z^*\| = \sup |y^*(\bar{S} \cap x^{*-1}(0))|$, unde $\bar{S} = \{x \mid \|x\| \leqslant 1\}$.

Din ipoteze rezultă $\|z^*\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. Cum $z^* - y^*$ se anulează pe $x^{*-1}(0)$, atunci există $\alpha \in R$ încît $z^* - y^* = \alpha x$ şi deci

$$\|y^* - \alpha x^*\| = \|z^*\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Să presupunem $\alpha \geqslant 0$; dacă $\alpha \geqslant 1$, atunci $\alpha^{-1} \leqslant 1$ şi deci:

$$\|y^* - x^*| = \|(1 - \alpha)y^* + \alpha^{-1}(y^* - \alpha x^*)\| \leqslant (1 - \alpha^{-1}) + \\ + \alpha^{-1}\|y^* - \alpha x^*\|.$$

Dar: $\alpha = \|\alpha x^*\| \leqslant \|y^*\| + \|y^* - \alpha x^*\|$ implică

$$1 - \alpha^{-1} \leqslant 1 - (1 + \|y^* - \alpha x^*)^{-1} = (\|y^* - \alpha(x^*)(1 + \|y^* - \alpha x^*\|)^{-1} \\ \leqslant \|y^* - \alpha x^*\|$$

şi prin urmare obţinem:

$$\|y^* - x^*\| \leqslant 2\|y^* - \alpha x^*\| \leqslant \varepsilon.$$

Dacă $0 \leqslant \alpha < 1$, atunci

$$\|y^* - x^*\| \leqslant \|y^* - \alpha x^*\| + \|(1-\alpha)x^*\| = \|y^* - \alpha x^*\| + 1 -$$
$$- \alpha = \|y^* - \alpha x^*\| + \|y^*\| - \|\alpha x^*\| \leqslant 2\|y^* - \alpha x^*\| \leqslant \varepsilon.$$

Dacă $\alpha < 0$, atunci aplicăm același raționament funcționalei $-\alpha x^*$ și vom obține că $\|x^* + y^*\| \leqslant \varepsilon$.

q.e.d.

LEMA 6.3. *Să presupunem* $0 < \varepsilon < 1$, $\|x^*\| = \|y^*\| = 1$ *și* $k > 1 + 2/\varepsilon$; *dacă* y^* *este pozitivă pe* $K(x^*, k)$, *atunci* $\|x^* - y_*\| \leqslant \varepsilon$.

Demonstrație. Fie $x \in X, \|x\| = 1$ și $< x^*, x > \; > k^{-1}\left(1 + \frac{2}{\varepsilon}\right)$ și $y \in X$, cu $\|y\| \leqslant \frac{2}{\varepsilon}$ și $x^*(y) = 0$. Atunci:

$$\|x \pm y\| \leqslant 1 + \frac{2}{\varepsilon} < k < x^*, x > = k < x^*, x \pm y > \text{ și deci}$$

$x \pm y \in K(x^*, k)$; aceasta implică prin ipoteză că $< y^*, x \pm y > \geqslant 0$ și deci: $|< y^*, y >| \leqslant < y^*, x > \leqslant \|x\| = 1$.

Aceasta înseamnă că $< y^*, z > \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ ori de cîte ori $< x^*, z > = 0$ și $\|z\| \leqslant 1$ și deci după lema precedentă rezultă că sau $\|x^* + y^*\| \leqslant \varepsilon$ sau $\|x^* - y^*\| \leqslant \varepsilon$.

Să alegem $x_0 \in X$, cu $\|x_0\| = 1$ și $< x^*, x_0 > \geqslant \max(k^{-1}, \varepsilon)$; atunci $x_0 \in K(x^*, k)$ și deci $< y^*, x_0 > \geqslant 0$ și astfel rezultă:

$$\|x^* + y^*\| \geqslant < x^* + y^*, x_0 > \; > \varepsilon,$$

ceea ce înseamnă că

$$\|x^* - y^*\| \leqslant \varepsilon.$$

q.e.d.

PROPOZIȚIA 6.1. *Fie* $C, K \subset X$, C *închisă și convexă iar* $K \neq \emptyset$ *și mărginită. Dacă* $\varepsilon > 0$ *și* $x^* \in X^*$ *este astfel încît* $\|x^*\| = 1$ *și*

$\sup\limits_{x \in C} < x^*, x > < \inf\limits_{x \in K} < x^*, x >$, *atunci există* $y^* \in X, \| y^* \| = 1$ *și* $x_0 \in C$ *astfel încît*

$$\| x^* - y^* \| \leqslant \varepsilon \text{ și } <y^*, x_0> = \sup_{x \in C} <y^*, x> < \inf_{x \in K} <y^*, x>$$

Demonstrație. Fie $\gamma = \sup\limits_{x \in C} <x^*, x>$, $\delta = \inf\limits_{x \in K} <x^*, x>$ și β astfel încît $\gamma<\beta<\delta$; fie vecinătatea V a lui K definită prin $V = K + (\delta - \beta) S$; aceasta este o mulțime mărginită și cum $\inf\limits_{x \in S}$

$$< x^*, x > = -1, \text{ avem :}$$

$$\inf_{x \in V} < x^*, x > = \inf_{x \in K} < x^*, x > - (\delta - \beta) = \beta.$$

Fie $\alpha = 1 + \frac{2}{\varepsilon}$ și $z \in C$, astfel încît $\gamma - <x^*,z> < (2\alpha)^{-1}(\beta-\gamma)$ și fie $M > \max\, [2^{-1} (\beta - \gamma), \sup\limits_{y \in V} \| y - z \|]$ și $k = 2\alpha M (\beta - \gamma)^{-1}$. Avem $k > \alpha > 1$. Să alegem după lema 6.1 un punct $x_0 \in C$ astfel încît $K (x^*, k) + x_0$ să suporte pe C în x_0 iar $x_0 - z \in K$. Vom arăta că $V \subset K (x^*, k) + x_0$.

Într-adevăr, dacă $y \in V$, atunci $\| y - x_0 \| \leqslant \| y_0 - z \| + \| x_0 - z \| < M + \| x_0 - z \| \leqslant M + k < x^*, x_0 - z > \leqslant M + k (\gamma - < x^*, z >) < M + k (2\alpha)^{-1} (\beta - \gamma) = 2M < 2\alpha M = k (\beta - \gamma) \leqslant \leqslant k <x^*, y - x_0>$.

După o cunoscută teoremă de separare, există $y^* \in X$, $\| y^* \| = 1$, astfel încît $\sup\limits_{x \in C} < y^*, x > = < y^*, x_0 > \leqslant \inf\limits_{x \in V} < y^*, x > = \inf\limits_{x \in K} < <y^*, x > - (\delta - \beta) < \inf\limits_{x \in K} <y^*, x>$.

Cum $0 \leqslant \inf <y^*, x>$ și $k > 1 + \frac{2}{\varepsilon}$, rezultă din lema 6.3 că $\| x^* - y^* \|$.

q.e.d.

TEOREMA 6.1. (Bishop-Phelps) *Dacă* $C \subset X$ *este închisă, convexă și mărginită, atunci mulțimea funcționalelor suport ale lui* C *este densă în* X^*.

Demonstrație. Fie $x^* \in X^*$, $\|x^*\| = 1$, x^* este mărginită pe C şi deci $\sup\limits_{x \in C} <x^*, x> = \alpha$; fie y_0 astfel încît $<x^*, y_0> \; >\alpha$; atunci luînd $K = \{y_0\}$ şi aplicînd propoziția precedentă, rezultă că există $y^* \in X^*$ şi $x_0 \in C$ astfel încît $\|x^* - y^*\| \leqslant \varepsilon$ şi $<y^*, x_0> = \sup\limits_{x \in C} <y^*, x>$, deci y^* este o funcțională suport pentru C.

q.e.d.

COROLAR. *Dacă norma spațiului X este diferențiabilă Gateaux, atunci pentru orice $x \neq 0$, $\mathfrak{J}\, x$ este o funcțională suport pentru sfera de rază $\|x\|$ și orice astfel de funcțională suport este de forma $\mathfrak{J}\, x$, pentru $x \neq 0$; astfel mulțimea $\{\mathfrak{J}\, x,\ x \neq 0\}$ este densă în X.*

Putem demonstra acum :

TEOREMA 6.2. *Fie X un spațiu Banach*;

a) *dacă normele pe X și X^* sînt diferențiabile Fréchet atunci, X este reflexiv.*

b) *dacă normele pe X și X^* sînt de două ori diferențiabile Fréchet, atunci X este un spațiu Hilbert.*

Demonstrație. a) Din ipoteză rezultă că $\mathfrak{J}$ este univocă şi de asemenea $\mathfrak{J}^*$; corolarul precedent ne arată că mulțimea $\{\mathfrak{J}\, x,\ x \neq 0\}$ este densă în X^* iar mulțimea $\{\mathfrak{J}\, x^*,\ x^* \neq 0\}$ este densă în X^{**}. Fie i injecția canonică a lui X în X^{**} ; din propoziția 3.1 capitolul I, rezultă că $i = \mathfrak{J}^*\mathfrak{J}$ şi cum $(\mathfrak{J}^*\mathfrak{J})(X)$ este densă în X^{**}, rezultă că $i(X) = X^{**}$. Astfel $\mathfrak{J}^* \cdot \mathfrak{J} = I$ (identitatea pe X) şi $\mathfrak{J} \cdot \mathfrak{J}^* = I^*$ (identitatea pe X^*) ; putem identifica pe X cu X^*.

b) Fie $x_0 \in X$ cu $\|x_0\| = 1$; să derivăm relațiile de mai sus în punctul x_0, respectiv $\mathfrak{J}\, x_0$ (aceasta se poate deoarece $\mathfrak{J}$ şi $\mathfrak{J}^*$ sînt şi ele derivabile) ; obținem

$$D\mathfrak{J}^*(\mathfrak{J}x_0) \cdot D\mathfrak{J}(x_0) = I \text{ şi } D\mathfrak{J}(\mathfrak{J}^*(\mathfrak{J}\, x_0)) \cdot D\mathfrak{J}^*(\mathfrak{J}\, x_0) = I^*$$

sau

$$D\mathfrak{J}^*(\mathfrak{J}x_0)\, D\mathfrak{J}(x_0) = I \text{ şi } D\mathfrak{J}(x_0) \cdot D\mathfrak{J}^* \cdot (\mathfrak{J}x_0) = I^*$$

ceea ce înseamnă că $D\mathfrak{J}(x_0) : X \to X^*$ este o bijecție liniară bicontinuă a lui X pe X^*. Forma biliniară $(x, y) \to (D\mathfrak{J}\, x_0)(x, y) = \; < (D\mathfrak{J}\, x_0)\, x, y >$ va defini un produs scalar pe X. Într-adevăr fie $A = D\mathfrak{J}(x_0) : X \to X^*$; vom arăta că $<Ay, y> \geqslant 0$, $\forall y \in X$; dar aceasta rezultă din faptul că $A = D\mathfrak{J}x_0 = D^2\, \psi(\|x\|)$ iar funcția $\psi(\|x\|)$ este convexă.

Fie $p(x) = \sqrt{<Ax, x>}$; atunci p este o seminormă şi avem inegalitatea lui Schwartz.

$$|<Ax, y>| \leqslant p(x)\, p(y).$$

Deci dacă $p(x) = 0$, atunci $<Ax, y> = 0 \; \forall y \in X$; cum A este surjectivă, rezultă $x = 0$ şi deci p este o normă pe X. Avem :

$$p^2(x) = <Ax, x> \leqslant \|A\| \; \|x\|^2 \text{ şi deci } p(x) \leqslant \|A\|^{1/2} \|x\|.$$

Fie $B = \{x \in X, p(x) \leqslant 1\}$. Cu inegalitatea lui Schwartz, obţinem că $|<Ay, x>| \leqslant p(y) \; \forall y \in X, \; x \in B$. Cum A este surjectivă, aceasta înseamnă că mulţimea B este slab mărginită, deci mărginită în normă. Prin urmare există o constantă C astfel încît $\|x\| \leqslant Cp(x), \forall x \in X$ şi deci p şi $\|\cdot\|$ sînt norme echivalente pe X.

q.e.d.

Corolar. *Dacă normele pe X şi pe X^* sînt diferenţiabile Fréchet, atunci X şi X^* sînt homeomorfe prin orice aplicaţie de dualitate.*

Într-adevăr, în acest caz X este reflexiv, deci $\mathcal{J}$ este surjecţie iar $\mathcal{J}$ şi $\mathcal{J}^*$ sînt continue în topologiile normelor, conform teoremei 2.9.

q.e.d.

Referinţe. Rezultatele în legătură cu funcţionalele suport sînt ale lui E. Bishop şi R. Phelps [13].

Punctul a) al teoremei 6.2 a fost demonstrat de Restrepo [151] iar b) de R. Bonic şi F. Reis [14] şi independent de K. Sundaresan [169], [170].

CAPITOLUL III

TEORIA GRADULUI TOPOLOGIC ÎN SPAŢII FINIT DIMENSIONALE ŞI O GENERALIZARE A LUI LA SPAŢII BANACH

§1. TEORIA GRADULUI LUI BROUWER

Fie R^n un spaţiu n dimensional; vom nota prin $\overline{\Omega}$ şi $\partial\Omega$ închiderea, respectiv frontiera unei mulţimi deschise şi mărginită $\Omega \subset R^n$, prin $|x| = (x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_2^2 + \ldots x_n^2)^{1/2}$.

Amintim că o aplicaţie $f(x)=(f_1(x), \ldots, f_n(x))$ a lui $\Omega \subset R^n$ se numeşte de clasă C^k ($k \geqslant 0$) în Ω, dacă orice $f_i = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $i = 1, \ldots, n$ este de clasă C^k în Ω. Vom nota iacobianul unei funcţii de clasă C^1 prin $If(x)$; atunci $If(x) = \det (a_{ij}(x))$, unde $a_{ij}(x) = \dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}$; notăm prin $A_{ij}(x)$ — complemenţii algebrici ai elementelor $a_{ij}(x)$. Dacă $f \in C^k$, $k \geqslant 2$, atunci $A_{ij}(x) \in C^1(\Omega)$ şi satisfac relaţiile bine cunoscute:

(1) $$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial A_{ij}(x)}{\partial x_i} = 0 \quad j = 1, \ldots, n$$

Avem:

LEMA 1.1. *Fie $f: \Omega \to R^n$ de clasă C^1 pe Ω, continuă pe $\overline{\Omega}$ şi $|f(x)| > \varepsilon$, $x \in \partial\Omega$; fie $\varphi(t)$ o funcţie reală, continuă pentru $t \geqslant 0$ cu supp $\varphi \subset (0, \varepsilon]$, pentru care:* $\displaystyle\int_0^\infty t^{n-1} \varphi(t)\, dt = 0.$

Atunci avem:

(2) $$\int_\Omega \varphi(|f(x)|). If(x) dx = 0.$$

Demonstrație. După teorema de aproximare a lui Weierstrass, e suficient să demonstrăm (2) în cazul în care $f \in C^2(\Omega)$. Fie funcția

$$\psi(t) = \begin{cases} t_{-n}\int_0^t s^{n-1}\ \varphi(s)\mathrm{d}s & \text{pentru} \quad 0<t<+\infty \\ 0 & \text{pentru} \quad t=0. \end{cases}$$

Evident $\psi \in C^1$ pe $[0, \infty)$ și supp $\psi \subset (0, \varepsilon)$; mai observăm că ψ satisface ecuația :

(3) $$t\,\psi'(t) + n\psi(t) = \varphi(t) \qquad t \in [0, +\infty).$$

Funcțiile $g_i(y) = \psi(|y|)y_i$, $i = 1, \ldots, n$, definite pe R^n cu valori în R, sînt de clasă C^1 pentru orice $y \in R^n$ și $g_i(y) = 0$ pentru $|y| \geqslant \varepsilon$. De aici rezultă că funcțiile : $x \to g_i(f(x))$ sînt de clasă $C^1(\Omega)$ și se anulează pe o vecinătate a lui $\partial\Omega$. Ținînd seama de (1) și (3), obținem :

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_{j=1}^{n} A_{ij}(x) g_j(f(x)) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} A_{ij}(x)\left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}\right)\left(\frac{\partial g_j}{\partial y_j}\right)\Bigg|_{y=f(x)} =$$

$$= I(f(x)) \cdot \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial g_j}{\partial y_j}\right)\Bigg|_{y=f(x)} = If(x)\left(n\psi(|y|) + \sum_{j=1}^{n} \psi'(|y|)\cdot \frac{y_j^2}{|y|}\right)\Bigg|_{y=f(x)} =$$

$$= If(x)\,(n\,\psi(t) + t\,\psi'(t))\,|_{t=|f(x)|} = \varphi(|f(x)|)\, If(x)$$

și acum (2) rezultă integrînd și aplicînd teorema Gauss-Ostrogradski.

q.e.d.

Această lemă sugerează următoarea definiție

DEFINIȚIA 1.1. *Fie* $f \in C^1(\Omega)$, *continuă pe* $\overline{\Omega}$ *și* $y \in R^n$, *cu* $y \notin f(\partial\Omega)$; *fie* Φ *cu proprietățile* :

(a) $\Phi(t)$ *este continuă pentru* $t \geqslant 0$, *supp* $\Phi \subset (0, \varepsilon]$ *unde*

$$0 < \varepsilon < \min_{x \in \partial\Omega} |f(x) - y|$$

b) $$\int_{R^n} \Phi(|x|)\mathrm{d}x = 1.$$

Atunci se numește gradul lui Brouwer, expresia:

$$d\,[f;\,\Omega,\,y] = \int_{\Omega} \Phi\,(|f(x) - y|)\, If\,(x)\mathrm{d}x.$$

Pentru a justifica această definiție, fie $\mathcal{G}$ spațiul liniar al funcțiilor care verifică a) și fie pe $\mathcal{G}$ următoarele trei funcționale liniare:

$$L(\Phi) = \int_0^{\infty} t^{n-1}\,\Phi\,(t)\,\mathrm{d}t,\quad M\,(\Phi) = \int_{R^n} \Phi\,(|\,x\,|)\mathrm{d}x$$

şi

$$N(\Phi) = \int_{\Omega} \Phi\,(\,|f(x) - y\,|)\, If\,(x)\mathrm{d}x \qquad \Phi \in \mathcal{G}.$$

Aplicăm lema precedentă luînd în rol de φ pe $\Phi \in \mathcal{G}$ şi în rol de f pe rînd aplicațiile:

$$f_\alpha(x) = x,\ x \in \Omega_\alpha = \{x \in \Omega,\ |\,x\,| < \alpha,\ \alpha > \varepsilon\} \text{ şi } f_0\,(x) = f(x) - y,\quad x \in \Omega.$$

Rezultă că ecuația $L(\Phi) = 0$ implică $M(\Phi) = N(\Phi) = 0$.

Fie $\Phi_1, \Phi_2 \in \mathcal{G}$ cu $M(\Phi_1) = M(\Phi_2) = 1$; avem:

$$L\,[L\,(\Phi_2)\Phi_1 - L(\Phi_1)\cdot\Phi_2] = 0.$$

Atunci, conform celor de mai sus, rezultă:

$$0 = M\,[L(\Phi_2)\cdot\Phi_1 - L(\Phi_1)\cdot\Phi_2] = L\,(\Phi_2)\cdot M(\Phi_1) - L(\Phi_1)\cdot M(\Phi_2) =$$

$$= L(\Phi_2) - L(\Phi_1).$$

Prin urmare $L(\Phi_1 - \Phi_2) = 0$, iar aceasta implică

$$N\,(\Phi_1 - \Phi_2) = 0,\ \text{adică}\ N(\Phi_1) = N(\Phi_2)$$

ceea ce arată unicitatea definiției (gradul nu depinde de funcția Φ).

Pentru a extinde definiția la aplicații continue, dăm următoarea lemă.

LEMA 1.2. *Fie* $f,\ g \in C^1(\Omega)$, *continue pe* $\overline{\Omega}$, $y \in R^n$ *şi* $\varepsilon > 0$ *astfel încît* : $|f(x)-y| > 7\varepsilon$, $|g(x)-y| > 7\varepsilon\ \forall\ x \in \partial\Omega$ *şi* $|f(x)-g(x)| < \varepsilon$ *pentru* $x \in \overline{\Omega}$.
Atunci

$$d\,[f\,;\,\Omega,\,y] = d\,[g\,;\,\Omega,\,y].$$

Demonstraţie. Cum din definiţia 1.1 rezultă că $d\,[f\,;\,\Omega,\,y] = d\,[f(x)-y\,;\,\Omega,\,0]$ putem presupune $y=0$, deci $|f(x)|, |g(x)| > \varepsilon$, $x \in \partial\Omega$.

Fie $\varphi(t)$ o funcţie reală de clasă C^1 pentru $t \geqslant 0$ cu :

$$\begin{cases} \varphi(t) = 1 & \text{pentru } 0 \leqslant t \leqslant 2\varepsilon \\ \varphi(t) = 0 & \text{pentru } 3\varepsilon \leqslant t < +\infty \\ 0 \leqslant \varphi(t) \leqslant 1 & \text{pentru } t \in [0,\ +\infty) \end{cases}$$

şi fie aplicaţia :

$$h(x) = [1 - \varphi(|f(x)|)]\,f(x) + \varphi(|f(x)|)\,g(x)$$

Evident h este continuă pe $\overline{\Omega}$ şi $h \in C^1(\Omega)$; în plus, are loc :

$$|f(x)-h(x)| = |\,\varphi(|f(x)|)]\,|f(x) - g(x)| < \varepsilon,\quad \forall x \in \overline{\Omega}$$

şi analog

$$|g(x) - h(x)| < \varepsilon,\ \ x \in \overline{\Omega}.$$

De asemeni, pentru orice $x \in \partial\Omega$, avem :

$$|h(x)| = |f(x) - \varphi(|f(x)|)\,(f(x) - g(x))| \geqslant 7\varepsilon - \varepsilon = 6\varepsilon$$

şi deci :

(4) $$|f(x)| > 6\varepsilon,\ |g(x)| > 6\varepsilon,\quad |h(x)| > 6\varepsilon,\ \forall x \in \partial\Omega$$

În sfîrşit, să observăm că

$$h(x) = f(x) \quad \text{dacă} \quad |f(x)| > 3\varepsilon$$

şi

$$h(x) = g(x) \quad \text{dacă} \quad |f(x)| < 2\varepsilon.$$

Fie acum $\Phi_1(t)$ şi $\Phi_2(t)$ două funcţii reale continue pe $[0, +\infty$ cu supp $\Phi_1 \subset [4\varepsilon, 5\varepsilon]$ şi supp $\Phi_2 \subset (0, \varepsilon]$, pentru care :

$$\int_{R^n} \Phi_1(|x|)\, dx = \int_{R^n} \Phi_2(|x|)\, dx = 1.$$

Atunci pentru $\forall x \in \Omega$, avem :

(5) $$\Phi_1(|h(x)|) \cdot Ih(x) = \Phi_1(|f(x)|) \cdot If(x)$$

(deoarece pentru $4\varepsilon < |h(x)| \leqslant 5\varepsilon$ avem

$$|f(x)| \geqslant |h(x)| - |f(x) - h(x)| > 4\varepsilon - \varepsilon \quad \text{şi deci } h(x) = f(x)$$

şi

(6) $$\Phi_2(|h(x)|)\, Ih(x) = \Phi_2(|g(x)|)\, Ig(x)$$

(deoarece pentru $|h(x)| < \varepsilon$ avem :

$$|g(x)| \leqslant |h(x)| + |g(x) - h(x)| < 2\varepsilon \text{ şi deci } h(x) = g(x))$$

Integrăm acum egalităţile (5) şi (6) în raport cu x şi obţinem :

$$d[h;\Omega,0] = d[f;\Omega,0] \text{ şi } d[h;\Omega,0] = d[g;\Omega,0]$$

deoarece Φ_1 şi Φ_2 verifică condiţiile a) şi b) din definiţia 1.1, datorită lui (4) şi a modului în care am ales suportul lor. Prin urmare

$$d[f,\Omega,0] = d[g;\Omega,0].$$

q.e.d.

Putem defini acum gradul topologic pentru orice aplicaţie continuă.

DEFINIŢIA 1.2. *Fie* $f=f(x)$ *continuă pe* $\overline{\Omega}$ *şi* $y\in R^n, y\notin f(\partial\Omega)$; *fie* $\{f_k\}_{k\in N}$ *astfel încît* $\lim\limits_{k\to\infty} f_k(x)=f(x)$ *uniform pentru* $x\in\Omega$, $f_k\in C^1(R^n)$ şi $y\notin f_k(\partial\Omega), \forall k\in N$.

Atunci gradul lui Brouwer pentru f este definit prin

$$d[f;\Omega,y] = \lim_{k\to\infty} d[f_k;\Omega,y].$$

Observăm că şirul $\{f_k\}_{k\in N}$ există datorită teoremei Stone-Weierstrass; faptul că $y\notin f(\partial\Omega)$ implică $y\notin f_k(\partial\Omega), \forall k$, rezultă din continuitatea lui f şi compacitatea lui $\partial\Omega$; astfel lema 1.2 ne asigură existenţa şi unicitatea lui $d[f;\Omega,y]$, datorită faptului că pentru k suficient de mare, $d[f_k;\Omega,y]$ sînt toţi egali.

Vom stabili acum principalele proprietăţi ale gradului introdus.

PROPOZIŢIA 1.1. *Fie* $\Omega_1, \Omega_2\subset R^n$, *mărginite, deschise şi disjuncte iar f continuă pe* $\overline{\Omega}_1\cup\overline{\Omega}_2$ *şi* $y\in R^n$, *cu* $y\notin f(\partial\Omega_1\cup\partial\Omega_2)$. *Atunci*

$$d[f;\Omega_1\cup\Omega_2,y]=d[f;\Omega_1,y]+d[f;\Omega_2,y].$$

Demonstraţie. Afirmaţia rezultă imediat folosind definiţiile 1.1 şi 1.2 (deoarece ea are loc pentru orice f_k).

q.e.d.

TEOREMA 1.1. *Fie f continuă pe* $\overline{\Omega}$ *şi* $y \in f(\partial\Omega)$; *dacă* $d[f;\Omega,y]\neq 0$ *atunci există cel puţin un punct* $z\in\Omega$, *astfel încît* $f(z)=y$.

Demonstraţie. Să presupunem că prin absurd, $f(x)\neq y$, $\forall x\in\Omega$; atunci, cum $f(x)\neq y$ chiar pentru $x\in\partial\Omega$ iar f este continuă pe $\overline{\Omega}$, rezultă că $|f(x)-y|>\varepsilon$, $\forall x\in\overline{\Omega}$, cu un ε convenabil.

Prin urmare, dacă $\{f_k\}_{k\in N}$ este un şir de funcţii din definiţia 1.2, aproximînd pe f, avem:

$$|f_k(x)-y|>\varepsilon,\quad \forall x\in\overline{\Omega} \text{ pentru } k \text{ suficient de mare.} \tag{7}$$

Luînd acum Φ ca în definiţia 1.1, obţinem din (7)

$$d[f_k;\Omega,y] = \int_\Omega \Phi(|f_k(x)-y|)\, If_k(x)dx = 0.$$

Prin urmare:

$$d[f;\Omega,y] = \lim_{k\to\infty} d[f_k;\Omega,y] = 0$$

ceea ce nu se poate. q.e.d.

TEOREMA 1.2. *Fie* $\Omega\subset R^n$ *(deschis și mărginit) și* $I=[a,b]\subset R$; *fie* $F=F(x,t)$ *continuă pe* $\bar{\Omega}\times I$ *și* $y\in R^n$ *astfel încît* $y\notin F(\partial\Omega\times I)$; *atunci* $d[F(.,t);\Omega,y]$ *este același pentru orice* $t\in I$.

Demonstrație. Din ipoteze rezultă că o inegalitate de forma $|F(x,t)-z|>7\varepsilon>0$ are loc pentru orice $x\in\partial\Omega$ *și* $t\in I$; în plus, există $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, astfel încît pentru t_1, $t_2\in I$, $|t_1-t_2|<\delta(\varepsilon)$ și $x\in\bar{\Omega}$ să avem

$$|F(x,t_1)-F(x,t_2)|<\varepsilon.$$

Să aproximăm pe $F(.,t_1)$ și $F(.,t_2)$ prin șirurile $\{f_{1k}\}_{k\in N}$ și $\{f_{2k}\}_{k\in N}$ ca în definiția 1.2. Atunci există k_0 încît pentru $k\geqslant k_0$ să avem:

$$|f_{1k}(x)-y|>7\varepsilon,\ |f_{2k}(x)-y|>7\varepsilon\ \ \forall x\in\partial\Omega$$

și

$$|f_{1k}(x)-f_{2k}(x)|<\varepsilon \text{ pentru } \forall x\in\bar{\Omega}.$$

LEMA 1.2 stabilește că în acest caz:

$$d[k_{1k};\Omega,y]=d[f_{2k};\Omega,y] \quad k\geqslant k_0$$

și deci

$$d[F(.,t_1);\Omega,y]=d[F(.,t_2);\Omega,y].$$

Cum aceasta are loc pentru orice pereche $t_1,t_2\in I$ cu $|t_1-t_2|<\delta$, rezultă că $d[F(\cdot t);\Omega,y]$ este constant pentru $t\in I$.

q.e.d.

COROLAR. *Dacă* $f|_{\partial\Omega}=g|_{\partial\Omega}$ și $y\notin f(\partial\Omega)=g(\partial\Omega)$ *atunci*:

$$d[f;\Omega,y] = d[g,\Omega,y]$$

Demonstrație. Într-adevăr, fie $F(x,t) = tf(x)+(1-t)g(x), x\in\Omega$ $t\in[0,1]$; atunci $y \notin F(\partial\Omega,t) = f(\partial\Omega)$ și astfel $\mathrm{d}[F(.,0);\ \Omega,y] = \mathrm{d}[F(.,t),\Omega,y]$, de unde afirmația a rezultat.

q.e.d.

Vom da acum următoarea teoremă de punct fix a lui Brouwer:

TEOREMA 1.3. *Fie f o aplicație continuă a sferei unitate $\{x/|x|\leqslant 1\}\subset R^n$ în ea însăși; atunci f au un punct fix.*

Demonstrație. Fie $\Omega=\{x/|x|<1\}$ și să presupunem prin absurd că $f(x)\neq x$, $\forall x\in\Omega$; dacă punem $F(x,t)=x-tf(x), x\in\overline{\Omega}$, $t\in[0.1]$, avem:

$$|F(x,t)|\geqslant x-t|f(x)|\geqslant 1-t>0$$

pentru $x\in\partial\Omega$ și $0\leqslant t<1$. Prin urmare $0\notin F(\partial\Omega\times[0,1])$ și are deci sens $\mathrm{d}[F(.,t];\Omega,0]$ care calculat în $t=0$, ne dă:

$$\mathrm{d}[F(.,t);\Omega,0]=\mathrm{d}[F(.;0);\Omega,0)]=\mathrm{d}[(\mathcal{J};\Omega,0] = \int_{Rn}\Phi(|x|)\mathrm{d}x=1$$

(unde $\mathcal{J}(x)=x$, iar $\varepsilon=1$ în definiția 1.1).

Atunci: $\mathrm{d}[F(.,1);\Omega,0]=1$ și după teorema 1.1 rezultă că există $z\in\Omega$, astfel încît $f(z)=z$, ceea ce contrazice presupunerea făcută.

q.e.d.

LEMA. 1.3. *Fie f continuă pe $\overline{\Omega}$, fie $\Delta y=\{x/x\in\overline{\Omega},\ f(x)=y\}$ pentru $y\in R^n$ fixat și fie $\Omega\supset\Omega_0\supset\Delta y$, Ω_0 deschis, atunci:*

$$\mathrm{d}[f;\Omega,y] = \mathrm{d}[f;\Omega_0,y].$$

Demonstrație. Prin ipoteză $f(x)\neq y, \forall x\in\overline{\Omega}\setminus\Omega_0$ și cum $\Omega\setminus\Omega_0$ este o mulțime închisă și mărginită, rezultă că $|f(x)-y|>\varepsilon, \forall x\in\overline{\Omega}\setminus\Omega_0$. Prin urmare, dacă $\{f_k\}_{k\in N}$ aproximează pe f ca în definiția 1.2, avem: $|f_k(x)-y|>\varepsilon$, pentru $\forall x\in\overline{\Omega}\setminus\Omega$ și pentru k suficient de mare.

Atunci:

$$\mathrm{d}[f_k,\Omega,y] = \int_\Omega \Phi(|f_k(x) - y|)If_k(x).\mathrm{d}x =$$

$$= \int_{\Omega_0}\Phi(|f_k(x)-y|)\ I\,f_k(x)\mathrm{d}x = \mathrm{d}[f_k;\Omega_0,y]$$

și acum trecînd la limită, lema e demonstrată.

q.e.d.

DEFINIȚIA 1.3. *Fie f continuă pe închiderea sferei* $S(x_0,\rho) = \{|x-x_0|<\rho\}$ *și fie* $f(x)\neq f(x)$ *pentru orice* $x\in\overline{S}(x_0,\rho), x\neq x_0$. *Atunci prin indexul* $i[f,x_0]$ *al aplicației f în x_0 înțelegem :*

$$i[f;x_0]=\mathrm{d}[f;S(x_0,\rho),\ f(x_0)].$$

Avem :

TEOREMA 1.4. *Fie f continuă pe $\overline{\Omega}$ și să presupunem că în $\overline{\Omega}$, ecuația $f(x)=y$ are soluțiile $x_1,x_2,\ldots,\ x_p\in\Omega$; atunci :*

$$\mathrm{d}[f;\ \Omega,y]=\sum_{k=1}^{p} i[f;\ x_k]\cdot$$

Demonstrație. Fie $S(x_k;P_k)$ sfere disjuncte cu centrele în x_k ; $\Omega_0=\bigcup\limits_{k=1}^{p} S(x_k,\rho_k)$ conține zerourile lui $f(x)-y$ și după lema 1.3 și propoziția 1.1, rezultă că :

$$\mathrm{d}[f;\Omega,y]=\mathrm{d}[f,\Omega_0,y]=\sum_{k=1}^{p}\mathrm{d}[f;S(x_k,\rho_k),\ f(x_k)]=\sum_{k=1}^{p} i[f;x_k].$$

q.e.d.

Avem următoarea evaluare a indexului unei aplicații, într-un caz particular important :

LEMA 1.4. *Fie f de clasă C^1 într-o vecinătate V a lui x_0 și fie $If(x_0)\neq 0$; atunci*

$$i[f;x_0]=\frac{If(x_0)}{|If(x_0)|}\cdot$$

Demonstrație. Fie sfera $\overline{S}(x_0;\rho_0)\subset V$ astfel încît

$$f(x)-f(x_0)=A(x-x_0)+R(x)\quad \forall x\in\rho(x_0,\rho), 0<\rho\leqslant\rho_0,$$

unde $A:\ R^n\to R^n$ este o aplicație liniară dată de o matrice cu $\det A=If(x_0)\neq 0$ iar $R:V\to R^n$ este de clasă C^1, astfel încît să aibă loc :

$$|R(x)|\leqslant\eta(\rho)|x-x_0|, x\in S(x_0,\rho)\ \text{cu}\ \lim_{\rho\to 0}\eta\,(\rho)=0.$$

Amintim că pentru A avem descompunerea polară $A = TP$, unde T este o matrice de ordin n, ortogonală iar P o matrice de ordin n, simetrică şi pozitiv definită. Fie aplicaţia :

$$F(x,t) = f(x_0) + T((1-t)P(x-x_0) + t(x-x_0)) + (1-t)R(x)$$

cu $x \in \bar{S}(x_0,)$ şi $0 \leqslant t \leqslant 1$. Evident, P fiind invertibilă, avem

$$|(1-t)P(z) + tz| \geqslant c|z| \quad \forall z \in R^n \text{ şi } 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

Prin urmare, pentru $x \in \bar{S}(x_0, \rho)$, şi $0 \leqslant t \leqslant 1$, are loc :

$$|F(x,t) - f(x_0)| \geqslant |T[(1-t)P(x-x_0) + t(x-x_0)]| - (1-t)|Rx| =$$

$$= |(1-t)P(x-x_0) + t(x-x_0)| - (1-t)|Rx| \geqslant (c - \eta(\rho))|x-x_0|.$$

Dacă se ia ρ suficient de mic, încît $\eta(\rho) < c$, rezultă că $F(x,t) \neq f(x_0)$ pentru $x \neq x_0, x \in \bar{S}(x_0, \rho)$ şi $0 \leqslant t \leqslant 1$. Conform teoremei 1.2, obţinem :

$$\mathrm{d}\,[f; S(x_0,\rho), f(x_0)] = \mathrm{d}[F(.,0); S(x_0,\rho), f(x_0)] =$$

$$= \mathrm{d}[F(.,1); S(x_0,\rho), f(x_0)] = \mathrm{d}[F(.,1) - f(x_0); S(x_0,\rho), 0] =$$

$$= \mathrm{d}[T(x-x_0); S(x_0;\rho), 0].$$

Fie acum Φ ca în definiţia 1.1 cu $\varepsilon < \rho$; atunci :

$$\mathrm{d}[T(x-x_0); S(x_0,\rho), 0] = \int_{S(x_0,\rho)} \Phi(|T(x-x_0)|) I T(x-x_0) \mathrm{d}x$$

$$= \det T \int_{S(x_0,)\rho} \Phi(|x-x_0|) \mathrm{d}x = \det T \int_{Rn} \Phi(|x|) \mathrm{d}x =$$

$$= \det T = \frac{\det A}{|\det A|} = \frac{If(x_0)}{|If(x_0)|}.$$

q.e.d.

Ca o consecinţă a teoremei 1.4 şi a acestei leme, rezultă imediat

PROPOZIȚIA 1.2. *Fie f continuă pe $\overline{\Omega}$ și $x_1, x_2, \ldots, x_p \in \Omega$ soluțiile ecuației $f(x)=y$, pentru y fixat și $x \in \overline{\Omega}$; să presupunem că f este de de clasă C^1 în vecinătatea oricărui x_k, $k=1,\ldots, p$, și că $If(x_k) \neq 0$, $k=1,2,\ldots,p$.*

Fie p_+, respectiv p_-, numărul elementelor mulțimii $\{x_1,\ldots,x_p\}$, unde $If(x)$ este pozitiv, respectiv negativ; atunci

$$\mathrm{d}[f;\Omega,y]=p_+ - p_-.$$

Vom arăta acum că gradul topologic al unei aplicații continue este un număr întreg; pentru aceasta dăm în prealabil:

LEMA 1.5. *Fie $f \in C^1(\Omega)$ continuă pe $\overline{\Omega}$ și $f(x) \neq y_0$, $x \in \partial\Omega$ și y_0 fixat. Atunci pentru orice $\varepsilon < \min\limits_{x \in \partial\Omega} |f(x)-y_0|$, există $y \in R^n$ cu $|y-y_0| \leqslant \varepsilon$ astfel încît*

a) *Ecuația $f(x)=y$, $x \in \overline{\Omega}$ are cel mult un număr finit de soluții $x_1, \ldots, x_p$ în Ω;*

b) *$If(x_k) \neq 0$, $k=1,\ldots,p$.*

Demonstrație. Fie K mulțimea închisă a punctelor $x \in \overline{\Omega}$, unde $|f(x)-y_0| \leqslant \varepsilon$ și Γ submulțimea închisă a lui K, unde $If(x) = 0$. Din lema lui Sard* rezultă că $f(\Gamma)$ are măsura Lebesgue nulă și deci are interiorul vid; prin urmare există un punct $y \in \{x \,|\, |x-y_0| \leqslant \varepsilon\} \setminus f(\Gamma)$. Atunci $f(z)=y$ pentru $z \in \overline{\Omega}$, implică

$$|f(z)-y_0| \leqslant |y-y_0| \leqslant \varepsilon, \text{ deci } z \in K \text{ și } If(z) \neq 0.$$

Vom arăta că ecuația $f(x)=y$, $x \in \overline{\Omega}$, are cel mult un număr finit de soluții.

Într-adevăr, presupunînd că ar exista un șir $\{x_k\}_{k \in N} \subset \overline{\Omega}$ de vectori distincți, astfel încît $f(x_k)=y$, $\forall k \in N$ și $\lim\limits_{k \to \infty} x_k = x_0$, ar rezulta $f(x_0)=y$ și $x_0 \in \overline{\Omega}$, deci $x_0 \in K$ și $If(x_0) \neq 0$. Din

$$0 = f(x_k)-f(x_0) = A(\xi_k)\,(x-x_0), \text{ cu } x_0 \leqslant \xi_k \leqslant x_k,$$

unde $\det A(\xi_k) = If(\xi_k)$, rezultă: $(If)(\xi_k)=0$.

* Au loc $m(f(E)) \leqslant \int_E If(x)\, dx$. pentru orice $f \in C^1(\Omega)$ și $E \subset \Omega$, măsurabilă Lebesgue [164], [111].

Dar cînd $k \to \infty$, $\xi_k \to x_0$ şi deci $If(x_0) = 0$, ceea ce este o contradicţie.

q.e.d.

Teorema 1.5. *Fie f continuă pe $\overline{\Omega}$ şi $y_0 \notin f(\partial\Omega)$; atunci $[f;\Omega,y_0]$ este un întreg.*

Demonstraţie. E suficient să demonstrăm afirmaţia pentru funcţii $f \in C^1(\overline{\Omega})$. După lema precedentă există un şir $\{y_k\} \subset R^n, y_k \xrightarrow[k]{} y_0$, cu $f(y_k) \neq y_0$ astfel încît pentru y_k să fie verificate condiţiile teoremei 1.4; atunci $d[f;\Omega,y_k]$ este un număr întreg. Cum gradul $d[f,\Omega,y_0]$ este o funcţie continuă de y într-o vecinătate a lui y_0, rezultă că şi $d[f;\Omega,y_0]$ trebuie să fie un întreg.

q.e.d.

În continuare vom demonstra teorema lui Borsuk—Ulam; pentru aceasta se dau în prealabil lemele:

Lema 1.6. *Fie $K \subset R^n$ o mulţime compactă şi $f: K \to R^{n+1}$ o aplicaţie continuă pentru care $0 \notin f(K)$; atunci f poate fi extinsă la o aplicaţie continuă nenulă pe un cub $\supseteq K$.*

Demonstraţie. Fie $c = \inf_{x \in K} |f(x)|$; atunci $c > 0$ prin ipoteză. Fie pentru $\varepsilon > 0$, o funcţie $\varphi_0 \in C^1$ astfel încît $|f(x) - \varphi_0(x)| < \varepsilon$, $\forall x \in K$; putem defini $\tilde{\varphi}_0\ R^{n+1} \to R^{n+1}$ astfel: $\tilde{\varphi}_0(x, x_{n+1}) = \varphi_0(x)$, unde $x \in R^n$. Atunci, cum $I\tilde{\varphi}_0 = 0$, cu lema lui Sard rezultă că pentru orice $D \subset R^n$ măsurabil $\varphi_0(D) = \tilde{\varphi}_0(D)$ are măsura nulă; aceasta înseamnă că măs $\varphi_0(R^n) = 0$. Fie $-y_0 \notin \varphi_0(R^n)$; atunci funcţia $\varphi: R^n \to R^{n+1}$ definită prin $\varphi(x) = \varphi_0(x) + y_0$ nu se anulează pe R^n: într-adevăr, dacă ar exista x_0 cu $\varphi_0(x_0) + y_0 = 0$, ar rezulta $-y_0 \in \varphi_0(R)$, ceea ce nu se poate. Putem lua y_0 suficient de aproape de origine, adică astfel încît $|y_0| < \frac{\varepsilon}{2}$; atunci $|f(x) - \varphi(x)| < \varepsilon$, $\forall x \in K$ şi $\inf_{x \in K} |\varphi(x)| \geqslant c - \varepsilon$. Să presupunem $\varepsilon < \frac{c}{2}$; atunci $\inf_{x \in K} |\varphi(x)| > \frac{c}{2}$.

Fie $\eta: R_+ \to R$ o funcţie continuă astfel încît:

$\eta(t) = 1$ dacă $t \geqslant \frac{c}{2}$ şi $\eta(t) = \frac{2t}{c}$ dacă $t \leqslant \frac{c}{2}$. Vom defini o nouă aplicaţie $\psi(x) = \frac{\varphi(x)}{\eta(|\varphi(x)|)}$; atunci pentru orice $x \in R^n$, $|\psi(x)| \geqslant \frac{c}{2}$,

$\left(\text{deoarece dacă } |\varphi(x)| \geqslant \frac{c}{2}, \text{ atunci } \psi(x) = \varphi(x) \text{ iar dacă } |\varphi(x)| \leqslant \frac{c}{2},\right.$
$\left.\psi(x) = \frac{\varphi(x)}{|\varphi(x)|} \cdot \frac{c}{2}\right)$ și $|\psi(x) - f(x)| = |\varphi(x) - f(x)| < \varepsilon$, $\forall x \in K$ (deoarece $|\varphi(x)| \geqslant \frac{c}{2}$ și atunci $\psi(x) = \varphi(x)$

După teorema de extensie a lui Tietze, există o funcție $\delta : R^n \to R^{n+1}$, astfel încît $\delta(x) = \psi(x) - f(x)$, dacă $x \in K$. Fie $U = \{x \in R^n \mid |\delta(x)| < \varepsilon\}$; evident U este deschisă și $U \supset K$. Fie $\alpha : R^n \to R$ astfel încît $\alpha(x) = 1$ pentru $x \in K$ și $\alpha(x) = 0$ pentru $x \in R^n \setminus U$, iar $0 \leqslant \alpha(x) \leqslant 1$ în rest; fie $\psi_1 = \alpha\delta$; atunci $\psi_1 : R^n \to R^{n+1}$ are proprietățile:

$$\psi_1|_K = \delta, \quad \psi_1 = 0 \text{ pe } R^n \setminus U \text{ și } |\psi_1(x)| \leqslant \varepsilon, \ \forall x \in U.$$

Luînd acum un cub $C \supset U$, atunci $\bar{f} : C \to R^{n+1}$ definită prin $\bar{f}(x) = \psi(x) - \psi_1(x)$ este funcția căutată, deoarece:
$\bar{f}(x) = f(x)$ dacă $x \in K$ iar dacă $x \in U$, avem:

$|\bar{f}(x)| = |\psi(x) - \psi_1(x)| \geqslant \frac{c}{2} - \varepsilon > 0$; în sfîrșit, dacă $x \in C \setminus V$, avem:

$|\bar{f}(x)| \geqslant |\psi(x)| \geqslant \frac{c}{2} > 0.$

q.e.d.

LEMA 1.7. *Fie $\Omega \subset R^n$ o mulțime deschisă, mărginită și simetrică, astfel încît $0 \in \overline{\Omega}$; fie $f : \partial\Omega \to R^m$, $m > n$ o funcție impară și nulă.*

Atunci f poate fi extinsă la o funcție impară și nenulă pe întreg $\overline{\Omega}$.

Demonstrație. Vom demonstra această lemă prin inducție după dimensiunea lui R^n. Pentru $n = 1$, $\partial\Omega$ reprezintă o mulțime numărabilă și mărginită de puncte, simetric așezate pe axa reală față de origine. Fie ε inferiorul punctelor din $\partial\Omega$, pozitive; atunci $\varepsilon > 0$. După lema precedentă putem extinde funcția f restrînsă la $[\varepsilon, +\infty) \cap \partial\Omega$ la o funcție nenulă $\bar{f}$ definită pe un interval $[\varepsilon, a]$. Prin simetrie putem defini $\tilde{f}$ nenulă pe $[-a, -\varepsilon] \cup [\varepsilon, a]$. Să presupunem că lema e adevărată pentru $k < n$. Să considerăm R^{n-1} identificat cu hiperplanul $x_n = 0$ din R^n fie $\Omega \subset R^n$. După ipoteza de inducție f poate fi extinsă la o funcție $\bar{f}$ nenulă și impară pe $\partial\Omega \cup (R^{n-1} \cap \Omega)$.

Să împărțim pe R^n în mulțimile disjuncte

$$R^n_+ = \{x \in R^n \mid x_n > 0\} \text{ și } R^n_- = \{x \in R^n / x_n < 0\}.$$

Fie $\Omega_+ = \Omega \cap R^n_+$ şi $\Omega_- = \Omega \cap R^n_-$; tot după lema precedentă $\bar{f}$ poate fi extinsă la o funcţie nenulă şi continuă pe $\partial\Omega \cup (R^{n-1} \cap \Omega) \cup \Omega_+$; acum prin simetrie se obţine extensia cerută.

q.e.d.

LEMA 1.8. *Fie $\Omega \subset R^n$ o mulţime deschisă mărginită şi simetrică cu $0 \notin \bar{\Omega}$ şi $f : \partial\Omega \to R^n$ o funcţie continuă impară şi nenulă. Atunci f poate fi extinsă la o funcţie continuă şi impară pe $\bar{\Omega}$, nenulă pe $\bar{\Omega} \cap R^{n-1}$.*

Demonstraţie. Aplicăm lema precedentă lui f restrînsă la $\partial(\Omega \cap R^{n-1}) = \partial\Omega \cap R^{n-1}$; obţinem o prelungire $\bar{f}$ nenulă a lui f la $\bar{\Omega} \cap R^{n-1}$; extindem acum pe $\bar{f}$ la $\bar{\Omega}$ prin Tietze şi simetrie.

q.e.d.

LEMA 1.9. *Dacă $\Omega \subset R^n$ este o mulţime simetrică deschisă, mărginită şi $0 \notin \bar{\Omega}$, atunci pentru orice $f : \partial\Omega \to R^n$, continuă şi impară, astfel încît $0 \notin f(\partial\Omega)$, $d[f : \Omega, 0]$ este un întreg par.*

Demonstraţie. Să extindem pe f la $\bar{\Omega}$ astfel încît f să fie continuă şi impară pe $\bar{\Omega}$, nenulă pe $\bar{\Omega} \cap R^{n-1}$. Vom nota această extensie tot prin f.

Fie φ de clasă C^1, impară care aproximează pe f (aceasta există deoarece pentru orice φ, funcţie $\frac{1}{2}$ $[\varphi(x) - \varphi(-x)]$ este impară). Pentru φ suficient de apropiat de f, $0 \notin \varphi(\partial\Omega)$ şi $0 \notin \varphi(\bar{\Omega} \cap R^{n-1})$ şi în plus; $d[f; \Omega, 0] = d[\varphi; \Omega, 0]$.

Pentru a calcula $d[\varphi; \Omega, 0]$ fie $\Omega_+ = R^n_+ \cap \Omega$ şi $\Omega_- = R^n_- \cap \Omega c$ în lema 1.7. Avem:

$$d[f; \Omega, 0] = d[f; \Omega_+, 0] + d[f; \Omega_-, 0]$$

deoarece $f \neq 0$ pe $\bar{\Omega} \cap R^{n-1}$. Observăm că f fiind impară, orice derivată parţială $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ este o funcţie pară, deci If este şi ea o funcţie pară.

Atunci un calcul simplu arată că:

$$\int_{\Omega+} \Phi(|f(x)|)\, If(x) dx = \int_{\Omega-} \Phi(|f(x)|)\, If(x) dx$$

şi deci: $d[f; \Omega_+, 0] = d[f; \Omega_-, 0]$.

Rezultă prin urmare că $d[f; \Omega, 0]$ este un număr par.

q.e.d.

TEOREMA 1.6. (*Borsuk*). *Fie* $\Omega \subset R^n$ *o mulțime deschisă, mărginită și simetrică, cu* $0 \in \Omega$ *și* $f: \Omega \to R^n$ *o aplicație impară, astfel încît* $0 \notin f(\partial\Omega)$. *Atunci* $d[f; \Omega, 0]$ *este un număr impar (în particular este diferit de zero).*

Demonstrație. Fie S o sferă cu centrul în $0, S < \overline{\Omega}$ și $\varphi: \Omega \to R^n$, continuă, astfel încît :

a) φ este impară

b) $\varphi|_{\partial\Omega} = f|_{\partial\Omega}$

c) $\varphi|_S =$ identitatea.

O astfel de funcție există deoarece întotdeauna; găsim un $\tilde{\varphi}$ cu proprietățile b) și c) și luînd $\varphi(x) = \dfrac{1}{2}[\tilde{\varphi}(x) - \tilde{\varphi}(-x)]$, φ satisface a), b) și c).

După corolarul teoremei 1.2 rezultă că :

$$d[f; \Omega, 0] = d[\varphi; \Omega, 0].$$

Cum $\varphi =$ identitatea pe S, evident $\varphi \neq 0$ și ∂S și atunci

$$d[f; \Omega, 0] = d[\varphi; S \cup (\Omega \backslash \bar{S}), 0] =$$

$$= d[\varphi; S, 0] + d[\varphi; \Omega \backslash \bar{S}, 0] = 1 + d[\varphi; \Omega \backslash \bar{S}, 0].$$

Dar $d[\varphi; \Omega \backslash \bar{S}, 0]$ este un număr par după lema precedentă $(0 \notin \Omega \backslash S)$ și prin urmare afirmația rezultă

q.e.d.

Încheiem considerațiile cu următoarele referiri la cazul spațiilor generale finit dimensionale.

Fie E un spațiu real de dimensiune n; alegînd o bază în E, îl putem identifica cu R^n; aceasta ne permite să definim gradul topologic în E exact ca în R^n, pentru funcții de la E în E, cît și pentru funcții de la E în F, dacă dimensiunea lui F este aceeași.

Într-adevăr, gradul topologic este independent de bază aleasă, fapt care se poate verifica pentru funcțiile de clasă C^1; iacobianul, la o schimbare de coordonate (atît în E cît şi în F) păstrează acelaşi semn.

Referinţe. Noţiunea de grad topologic a fost introdusă în 1912 de către Brouwer, folosind metode de topologie combinatorie. De atunci s-au făcut numeroase încercări de-a stabili principalele proprietăţi ale gradului lui Brouwer cu metode elementare. O astfel de prezentare este cea dată aici care aparţine lui E. Heinz [83]. Pentru o altă prezentare folosind tot teoria funcţiilor diferenţiabile, recomandăm monografia lui I. Schwartz de unde e luată teorema lui Borsuk [164], a se vedea şi : [111], [138].

§ 2. TEOREME DE PUNCT FIX PENTRU APLICAŢII MULTIVOCE SUPERIOR SEMICONTINUE

Vom da cîteva teoreme generale de punct fix bazate pe teoreme de separare a mulţimilor convexe în spaţii local convexe.

TEOREMA 2.1. *Fie X un spaţiu local convex, $K \subset X$ o mulţime convexă şi compactă, $f : K \to X^*$ o aplicaţie continuă în topologia tare pe X^*. Există $x_0 \in K$ astfel încît să avem :*

$$< f(x_0),\ x - x_0 > \geqslant 0,\ \forall x \in K.$$

Demonstraţie. Să presupunem că afirmaţia teoremei ar fi falsă atunci pentru orice $x_0 \in K$, ar exista $y \in K$ astfel încît :

$$< f(x_0), y - x_0 > < 0.$$

Fie $N_y = \{x \in K| < f(x), y - x_0 > < 0\}$ şi fie $g_y(x)$, $< f(x), y - x >$, $x \in K$; evident $N_y = g^{-1}$ $[(-\infty, 0)]$ iar continuitatea lui f implică continuitatea lui g_y pe K. Atunci orice N_y este deschisă şi cum orice punct din K este inclus într-o astfel de mulţime, $\{N_y\}_{y \in K}$ formează o acoperire deschisă a lui K.

Există atunci o subacoperire finită $\{N_{y_1}, \ldots, N_{y_r}\}$ şi o partiţie a unităţii subordonate ei, $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_r\}$ cu $\sum_{j=1}^{r} \alpha_j(x) = 1$, $x \in K$, supp $\alpha_j \subset N_{y_j}$ şi $0 \leqslant \alpha_j(x) \leqslant 1$.

Putem defini aplicația :

$$p(x) = \sum_{j=1}^{r} \alpha_j(x)\, y_j$$

care este continuă de la K în X. Fie $K_0 < K$ submulțimea convexă, finit dimensională generată de $\{y_1, \ldots, y_r\}$; atunci p aplică pe K_0 în ea însuşi şi după teorema de punct fix a lui Brouwer, există x_1 astfel încît $p(x)_1 = x_1$.

Observăm că pentru $\forall x \in K$, avem :

$$< f(x),\ p(x) - x > = \sum_{j=1}^{r} \alpha_j(x) < f(x), y_j - x > < 0.$$

Atunci pentru x_1 aceasta înseamnă :

$$0 = < f(x)_1,\ p(x_1) - x_1 > < 0,$$

adică o contradicție.

q.e.d.

DEFINIȚIA 2.1. *Fie X un spațiu local convex și $M \subset X \times X^*$; M se numește monotonă, dacă pentru orice $[x,u]$, $[y,v] \in M$* avem

$$< u - v,\ x - y > \geqslant 0.$$

TEOREMA 2.2. *Fie X un spațiu local convex, $K \subset X$ o mulțime compactă, convexă, $f : K \to X^*$ continuă în topologia tare și $M \subset K \times X^*$, monotonă. Atunci există un element $x_0 \in K$, astfel încît pentru orice $[x,u] \in M$ și să avem :*

$$< f(x_0) - u,\quad x_0 - x > \geqslant 0.$$

Demonstrație. Să presupunem că ar exista f și M ca în teorema, pentru care afirmația nu ar fi adevărată ; atunci pentru orice $x_0 \in K$, există $[y,u] \in M$ astfel încît $< f(x_0) - u,\ x_0 - y > < 0$.

Vom pune pentru un astfel de $[y,u] \in M$:

$$N_{y,u} = \{x \in K \mid < f(x) - u,\ x - y > < 0\}.$$

Ca mai înainte se arată că $\{N_{y,u}\}_{[y,u]} \in M$ formează o acoperire deschisă a lui K; există astfel subacoperirea finită a lui K: $\{N_{y_1,u_1}, N_{y_2,u_2}, \ldots N_{y_r,u_r}\}$; fie $\{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_r\}$ partiţia unităţii asociată acestei acoperiri. Formăm aplicaţiile

$$p(x) = \sum_{j=1}^{r} \beta_j(x) y_j \quad \text{şi} \quad q(x) = \sum_{j=1}^{r} \beta_j(x) u_j .$$

Ca mai sus rezultă că p are un punct fix, $x_1 \in K$. Să considerăm şi funcţia

$$\lambda(x) = <f(x)-q(x), x-p(x)> = \sum_{j,k=1}^{r} \beta(x)\, \beta_k(x) <f(x)-u_j, x-y_k> =$$

$$= \lambda_1(x)+\lambda_2(x),$$

unde: $\lambda_1(x) = \sum_{j=1}^{r} \beta_j^2(x) <f(x)-u_j, x-y_j>$ şi

$$\lambda_2(x) = \sum_{j \neq k} \beta_j(x)\, \beta_k(x) <f(x)-u_j, x-y_k>.$$

Avem evident: $\lambda_1(x)<0$ iar pentru $\lambda_2(x)$ găsim $\lambda_2(x) \leqslant 0$ pentru că:

$$\lambda_2(x) = \sum_{1 \leqslant j < k \leqslant r} \beta_j(x)\, \beta_k(x) [<f(x)-u_j, x-y_k> + <f(x)-u_k, x-y_j>]$$

iar

$$<f(x)-u_j, x-y_k> + <f(x)-u_k, x-y_j> =$$

$$= <f(x)-u_j, x-y_j> + <f(x)-u_k, x-y_k> + <u_k-u_j, y_j-y_k> \leqslant 0$$

datorită monotonicităţii lui M şi a definiţiilor mulţimilor

$$N_{y_j,u_j}, \ 1 \leqslant j \leqslant r.$$

Prin urmare: $\lambda(x) = \lambda_1(x) + \lambda_2(x) < 0 \ \forall\, x \in K$, deci şi pentru x, adică:

$$0 = <f_1(x_1) - q(x_1), x_1 - p(x_1)> < 0$$

ceea ce este o contradicţie.

q.e.d.

LEMA 2.1. *Fie X un spaţiu local convex, K o mulţime compactă convexă în X, A o aplicaţie superior semicontinuă a lui K în 2^X, astfel încît pentru orice $x \in K$, Ax să fie o mulţime închisă convexă, nevidă în X. Fie pentru orice $x \in K$, $W_k(x)$ închiderea mulţimii $\{y \in X / \exists \lambda \geqslant 0$ cu $x + \lambda y \in K\}$ şi să presupunem că există $w \in W_k(x)$, $y \in Ax$* şi $\xi \geqslant 0$, *astfel încît $y - x = \xi w$.*

Atunci există $x_0 \in K$ astfel încît $x_0 \in Ax_0$.

Demonstraţie. Să presupunem că ar exista A pentru care teorema este falsă. Atunci pentru orice $x \in K$, $0 \notin x - Ax$. Cum $x - Ax$ este o mulţime închisă şi convexă, există o funcţională liniară

$$v \in X^*, \text{ astfel încît}: < v, x - y] > > 0, \ \forall y \in Ax.$$

Fie pentru orice $v \in X^*$, $N_v = \{x \in K / < v, x - y > > 0, \ y \in Ax\}$.

Observăm că fiecare N_v este deschisă; într-adevăr, fie $x_0 \in N_v$ şi U vecinătatea lui Ax_0 dată de $U = \{y \,|\, < v, x_0 - y > > 0\}$. Cum A este superior semicontinuă, $\exists\ V(x) \subset K$ astfel încît $A(V) \subset U$, adică $V \subset N_v$. $\{N_v\}_{v \in x^*}$ este deci o acoperire deschisă a lui K şi prin urmare există o subacoperire finită, $\{N_{v_1}, \ldots, N_{v_r}\}$ şi o partiţie a unităţii corespunzătoare $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_r\}$. Vom defini aplicaţia $q : K \to X^*$ prin

$$q(x) = \sum_{j=1}^{r} \gamma_j(x)\, v_j\,.$$

Observăm că pentru orice $x \in K$ şi $y \in Ax$, avem:

$$< q(x), x - y > = \sum_{j=1}^{r} \gamma_j(x) < v_j, x - y > > 0.$$

Cum q este continuă, putem să-i aplicăm teorema 2.1 şi deci există $x_0 \in K$, astfel încît $< q(x_0), x - x_0 > \geqslant 0 \ \forall x \in K$.
Cum $< q(x_0), x - x_0 >$ este o funcţie continuă de x, rezultă că pentru orice $w \in W_k(x_0)$, avem: $< q(x_0), w > \geqslant 0$, deoarece pentru orice y pentru care există $\lambda > 0$ astfel încît $x = x_0 + \lambda y \in K$,

$$< q(x_0), y > = \lambda^{-1} < q(x_0), x - x_0 > \geqslant 0.$$

Pe de altă parte, prin ipoteză există $y \in Ax_0$ şi $w \in W_k(x_0)$ şi $\xi > 0$ astfel încît $y = x_0 + \xi w$, deci: $0 < < q(x_0), x_0 - y > =$

$= -\xi < q(x)_0, w >$, adică pentru acest w obținem $< q(x_0), w > < 0$, ceea ce nu se poate.

q.e.d.

TEOREMA 2.3. *Fie K o submulțime compactă convexă într-un spațiu local convex X și $A : K \to 2^X$ o aplicație superior semicontinuă, astfel încît Ax să fie pentru orice $x \in K$, o mulțime închisă, convexă a cărui intersecție cu K este nevidă; atunci A are un punct fix în K.*

Demonstrație. Observăm mai întîi că pentru orice $x \in K$, mulțimea $W_k(x)$ conține toate punctele de forma $w = z - x$, $z \in K$. Fie $y \in Ax \cap K$; dacă punem $w = y - x$, atunci w și y verifică condiția din lema precedentă și afirmația rezultă.

q.e.d.

LEMA 2.2. *Fie X și Y două spații local convexe, K o mulțime compactă, convexă în X și K_1 o mulțime compactă convexă în Y. Fie $A, B : K \to 2^{K_1}$ astfel încît:*

i) *A este superior semicontinuă și $\forall\ x \in K$, Ax este o mulțime închisă, convexă în K_1*

ii) *Pentru orice $x \in K$, Bx este o mulțime deschisă a lui K_1 și pentru orice $y \in K_1$, $B^{-1}\,y$ este nevidă și convexă în K.*

Atunci există $X_0 \in K$, astfel încît $Ax_0 \cap Bx_0 \neq \emptyset$.

Demonstrație. Pentru orice $y \in K_1$, $B^{-1}\,y$ fiind nenul, familia $\{Bx\}_{x \in K}$ formează o acoperire deschisă a compactului K_1 și putem extrage deci o subacoperire finită $\{Bx_1, \ldots, Bx_r\}$; fie $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ partiția unității pe K_1 asociată acestei acoperiri.

Vom defini o aplicație continuă: $s : K_1 \to K$ astfel: $s(y) = \sum_{j=1}^{r} \alpha_j\,(y) x_j$.
Atunci pentru $y \in K_1$, $\alpha_j(y) \neq 0$ numai dacă $y \in Bx_j$, adică numai dacă $x_j \in B^{-1}\,y$.

Fie $y \in K$; atunci există un indice $_j$, cu $\alpha_j(y) = 0$. deci astfel încît $x_j \in B^{-1}y$; $B^{-1}\,y$ fiind convexă, rezultă că $s(y) \in B^{-1}\,y$, adică $y \in B(s(y))$ ($\forall\ y \in K_1$).

Definim acum o aplicație $C : K_1 \to 2^{K_1}$ astfel: $C(y) = A(s(y))$. Din proprietățile lui A, rezultă că pentru orice $y \in K_1$, $C(y)$ este nevid, închis și convex în K_1; s fiind continuă și A superior semicontinuă, rezultă că C este superior semicontinuă. Astfel putem aplica teorema 2.3 și să conchidem că există un punct $y_0 \in K_1$ astfel încît $y_0 \in$ $\in C\,(y_0) = A(s(y_0))$.

Cum y_0 este şi în $B(s(y_0))$, rezultă că pentru $x_0 = s(y_0)$, $Ax_0 \cap Bx_0 = \emptyset$.

q.e.d.

Încheiem consideraţiile din acest paragraf prin analogul teoremei 2.2 pentru aplicaţii multivoce.

TEOREMA 2.4. *Fie X un spaţiu local convex, K un compact convex în X, K_1 un compact convex în X^*, cu topologia tare.*

Fie A o aplicaţie superior semicontinuă de la K în 2^{K_1}, astfel încît pentru orice $x \in K$, Ax să fie o mulţime închisă, convexă, nevidă. Fie M o mulţime monotonă în $K \times X^*$.

Atunci există $x_0 \in K$ şi $u_0 \in Ax_0$ astfel încît pentru orice $[x,u] \in M$ să avem :

$$< u_0 - u,\ x_0 - x > \geqslant 0$$

Demonstraţie. Să observăm pentru început că dacă A este superior semicontinuă, graficul $G(A)$ este închis în $K \times K_1$.

Într-adevăr, fie $[xu,] \notin G(A)$; atunci $u \notin Ax$ care este închisă. Cum K_1 este regulat, există două vecinătăţi disjuncte V_1 a lui u şi V_2 a lui Ax ; din faptul că A este superior semicontinuă, rezultă că pentru V_2 există o vecinătate U a lui x în K, astfel încît $A(U) \subset V_2$. Prin urmare $U \times V_1$ este o vecinătate a lui $[x,u]$ care nu intersectează pe $G(A)$.

Fie acum, pentru orice submulţime finită a lui M, $F = \{[x_1,u_1], \ldots \ldots, [x_r, u_r]\}$ şi fiecare $\varepsilon > 0$, $H_{\varepsilon,F} = \{[x,u]/[x,u] \in G(A), < u - u_j, x - x_j > \geqslant -\varepsilon,\ 1 \leqslant j \leqslant r\}$. Mulţimea $H_{\varepsilon,F}$ este închisă în $K \times K_1$; să arătăm că $H_{\varepsilon,F} \neq \emptyset$. Vom defini pentru aceasta aplicaţia B : $K \to 2^{K_1}$ prin :

$$Bx = \{u/u \in K_1, < u - u_j,\ x - x_j > > -\varepsilon \quad 1 \leqslant j \leqslant r\}$$

mulţimea Bx este deschisă iar pentru orice $u \in K_1$, $B^{-1}u = \{x/x \in K, < u - u_j, x - x_j > > -\varepsilon\}$ este convexă şi conţine mulţimea :

$$Z_u = \{x | x \in K,\ < u - u',\ x - x' > \geqslant 0,\ \forall\ [x',u'] \in M\}$$

Deci pentru a arăta că $B^{-1} u \neq \emptyset$, e suficient să arătăm că $Z_u \neq \emptyset$. Aplicăm teorema 2.2 aplicaţiei $C(x) = u$, univocă şi constantă pe K ; rezultă că $Z_u \neq \emptyset$. Atunci observăm că sînt îndeplinite pentru

A şi B toate condiţiile lemei 2.2 şi există prin urmare $y_0 \in K$ astfel încît $Ay_0 \cap By_0 \neq \emptyset$. Fie $v_0 \in Ay_0 \cap By_0$; atunci $[y_0, v_0] \in H_{\varepsilon, F}$ şi cum evident familia $\{H_{\varepsilon,F}\}_{\varepsilon,F}$ are proprietatea intersecţiei finite, rezultă că există un punct în intersecţia tuturor acestor mulţimi $[x_0, u_0]$ care va verifica condiţia dată.

Ca o aplicaţie a teoremei de punct fix a lui Schauder, care nu e altceva decît teorema 2.3 pentru aplicaţii continue şi univoce, dăm următoarea teoremă de subspaţii invariante, obţinută recent de Lomonosov.

Fie $\mathcal{L}(X)$ spaţiul operatorilor liniari şi continui pe un spaţiu Banach X.

TEOREMA 2.5. *Dacă $\mathcal{A}$ este o algebră comutativă din $\mathcal{L}(X)$ iar K un operator compact nenul din $\mathcal{L}(X)$ astfel încît $AK = KA$, $\forall A \in \mathcal{A}$, atunci există un subspaţiu liniar închis al lui X, $0 \neq Y \neq X$, cu $AY \subset Y$, $\forall A \in \mathcal{A}$.*

Demonstraţie. Să presupunem că afirmaţia nu ar fi adevărată şi fie $S_1 = \{x / \|x\| \leqslant 1\}$; atunci $KX \not\subset KS_1$, deoarece KS_1 este mărginită.

Există deci $x_0 \neq 0$, cu $Kx_0 \notin \overline{KS_1}$ şi prin urmare $0 \notin \overline{KS}$, unde $S = \{x / \|x - x_0\| \leqslant 1\}$.

Fie pentru $y \in X, y \neq 0$, $\mathcal{A}\, y$ = subspaţiul liniar generat de mulţimea $\{Ay, A \in \mathcal{A}\}$; evident acesta este un subspaţiu invariant pentru orice $A \in \mathcal{A}$ şi din presupunerea făcută, rezultă $\overline{\mathcal{A}\, y} = X$. Prin urmare, $\forall\, y_0 \in \overline{KS}$ există $A_0 \in A$, astfel încît $\|A_0 y_0 - x_0\| < 1$; această inegalitate se menţine şi pentru y într-o vecinătate a lui y_0 şi deci obţinem o acoperire deschisă a mulţimii compacte $\overline{KS}$; putem extrage o sunacoperire finită: există deci $A_{n1} \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ astfel încît $\forall y \in \overline{KS}$, $\exists_j$ cu $\|A_j y - x_0\| < 1$.

Fie $f : R_+ \to R^+$, continuă, supp f $= [0,1]$ şi $\alpha_j(x) = f(\|A_j x - x_0\|)$, $x \in \overline{KS}$. Fie

$$\beta_j(x) = \frac{\alpha_j(x)}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x)}, \quad x \in \overline{KS} \text{ şi } \psi(x) = \sum_{j=1}^{x} \beta_j(Kx)\, A_j\, Kx.$$

Să arătăm că ψ aplică pe S în S; într-adevăr, $\forall x \in S$, $Kx \in KS$ şi deci $\exists | j$ cu $\|A_j\ Kx - x_0\| < 1$; atunci $\alpha_j(Kx) = f(\|A_j\, Kx - x_0\|) > 0$ şi deci $\|\psi(x) - x_0\| \leqslant \sum \beta_j(x) \|A_j\, Kx - x_0\| < 1$ (deoarece dacă $\|$

$\|A_j\, Kx - x_0\| \geqslant 1$, atunci $\alpha_j\, (K(x) = 0)$.

În plus $\psi: S \to S$ este o aplicație compactă; atunci după teorema de punct fix a lui Schauder, există x_1 cu $\psi(x_1) = x_1$ și $x_1' \neq 0$, pentru că $K(x_1) \in \overline{KS}$ iar $0 \notin \overline{KS}$.

Fie operatorul liniar $Tx = \sum_{j=1}^{n} \beta_j(Kx_1) A_j Kx$; avem $Tx_1 = x_1$; atunci $TAx_1 = Ax_1$, $\forall A \in \mathcal{A}$ și cum $\mathcal{A}x_1 = X$, rezultă $T = I$, ceea ce nu se poate, deoarece T este compact.

q.e.d.

COROLAR. *Fie $A \in \mathcal{L}(X)$ pentru care există $K \in \mathcal{L}(X)$, compact astfel încît $KA = AK$; atunci A are un subspațiu invariant propriu, astfel încît $KA = AK$; atunci A are un subspațiu invariant propriu.*

Referințe. Aceste teoreme de punct fix, de tip Schauder-Tihonov, se găsesc în [35], [39].

§3. APLICAȚII A-PROPRII ȘI GRADUL TOPOLOGIC GENERALIZAT

Gradul topologic al lui Brouwer a fost extins în 1934 de către Schauder și Leray la aplicații de forma $I+C$, unde C este un operator compact pe un spațiu Banach. În cele ce urmează vom prezenta o extensie a gradului topologic, la aplicațiile A-proprii, datorată lui Browder și Petryshyn, cu care se obțin importante teoreme de punct fix și de invarianță de domeniu. Această noțiune are meritul de-a unifica o serie de rezultate obținute pentru operatori de forma $I + C$, C compact, sau pentru operatori monotoni și de a le extinde la clase de operatori, cum ar fi operatori P—compacți, care nu pot fi tratați nici cu tehnica Leray Schauder și nici cu tehnici de „monotonie".

DEFINIȚIA 3.1. *Fie X și Y două spații Banach; prin schemă (de aproximare) proiecțional completă pentru aplicațiile de la X în Y înțelegem:*

două șiruri crescătoare $\{X_n\}_{n\in N}$ și $\{Y_n\}_{n\in N}$ de subspații finit dimensionale ale lui X, respectiv ale lui Y, astfel încît $\dim X_n = \dim Y_n$, $\forall n \in N$ *și două șiruri $\{P_n\}_{n\in N}$ și $\{Q_n\}_{n\in N}$ de proiecții liniare, $P_n: X \to X_n$, $Q_n: Y \to Y_n$, continue și surjective, astfel încît*

$$\forall x \in X,\ P_n x \xrightarrow[n]{} x \quad \text{și} \quad Q_n y \xrightarrow[n]{} y,\ \forall y \in Y.$$

Vom nota prin $\{X_n, Y_n, P_n, Q_n\}$ o astfel de schemă de aproximare. Pentru $T: D \subset X \to Y$ vom nota prin $D_n = D \cap X_n$ şi prin $T_n = Q_n T | D_n$. Avem :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{T} & Y \\ P_n \downarrow & & \downarrow Q_n \\ X_n & \xrightarrow{T_n} & Y_n \end{array}$$

DEFINIŢIA 3.2. *Fie* X şi Y *două spaţii Banach şi* $\{X_n, Y_n, P_n, Q_n\}$ *o schemă proiecţională completă; fie* $D \subset X$ *deschisă şi mărginită şi* $T: \overline{D} \to Y$ *continuă; T se numeşte A-proprii pe* $\overline{D}$ *în raport cu schema dată, dacă pentru orice şir* $\{x_{n'}\}_{n'}$ *cu* $x_{n'} \in D_{n'}$ *şi orice* $y \in Y$ *satisfăcînd :*

$$\lim_{n' \to \infty} \| T_{n'}(x_{n'}) - y \| = 0$$

există un subşir $\{x_{n''}\} \subset \{x_{n'}\}$ *şi un element* $x \in X$ *astfel încît :*

$$\lim_{n'' \to \infty} x_{n''} = x \text{ şi } T(x) = y.$$

T se numeşte local A-proprie dacă pentru orice $x_0 \in D$ *există o sferă* $S(x_0, r)$ *astfel încît* $\overline{S}(x_0, r) \subset D$ *şi T este A-proprie pe* $\overline{S}(x_0, r)$ (D aici e deschis şi nemărginit).

Observaţia 3.1. Se verifică pornind de la definiţia 3.2, că orice aplicaţie compactă a unei mulţimi deschise, mărginite din X este A-proprie ; de asemenea este A-proprie orice aplicaţie de forma $I + C$, cu C compactă.

Următoarea teoremă caracterizează o clasă de aplicaţii A-proprii definite pe întreg X, cu valori în Y, stabilind totodată strînsa lor legătură cu ecuaţiile funcţionale.

TEOREMA 3.1. *Fie* X şi Y *două spaţii Banach cu o schemă proiecţională complet şi fie* $T: X \to Y$, *continuă, cu proprietatea că există o funcţie* $\alpha: R_+ \to R_+$, *astfel încît* $\alpha(t) \to 0$ *implică* $t \to 0$, pentru care

$$1) \quad \| T_n x - T_n y \| \geqslant \alpha(\| x - y \|) \quad \forall x, y \in X_n.$$

Atunci T este A proprie dacă şi numai dacă $R(T) = Y$.

Demonstrație. Rezultă din teorema de punct fix a lui Brouwer că pentru orice $y_n \in Y_n$ există $x_n \in X_n$, unic datorită lui (1), astfel încît $T_n(x_n) = y_n$.

Fie T, A-proprie și $y \in Y$; atunci pentru orice n, există $x_n \in X_n$, astfel încît $T_n(x_n) = Q_n y$. Astfel evident: $\| Q_n T(x_n) - y \| \underset{n}{\to} 0$; există atunci $x \in X$ și un subșir $\{x_{n'}\}_{n'} \subset \{x_n\}_n$, astfel încît:

$$x_{n'} \underset{n'}{\rightrightarrows} x \in X \quad \text{și} \quad Tx = y.$$

Să presupunem că $R(T) = Y$ și fie $\{x_{n'}\} \subset X$, $x_{n'} \in X_{n'}$, $\forall n'$;

$$\text{astfel încît } \| T_{n'}(x_{n'}) - y \| \underset{n'}{\to} 0.$$

Prin ipoteză există $x \in X$ astfel încît $Tx = y$; cum $P_{n'} x \underset{n'}{\to} x$, continuitatea lui T implică:

$TP_{n'} x \underset{n'}{\to} Tx = y$. Aplicăm acum inegalitatea (1) elementelor $x_{n'}$ și $P_{n'} x$.

$$\alpha(\| x_{n'} - P_{n'} x \|) \leqslant \| T_{n'}(x_{n'}) - TP_{n'}(x) \| \leqslant$$

$$\| T_{n'}(x_{n'}) - y \| + \| TP_{n'} x - y \| \underset{n'}{\to} 0$$

Prin urmare $x_{n'} - P_{n'} x \underset{n'}{\to} 0$, deci $x_{n'} \underset{n'}{\to} x$.

q.e.d.

LEMA 3.1. *Fie $D \subset X$, deschisă și mărginită și T o aplicație continuă A-proprie a lui $\overline{D}$ în Y; fie $y \in Y$ astfel încît $y \notin T(\partial D)$*);* *atunci există un întreg $n_0 \geqslant 1$ și o constantă $d > 0$,* astfel încît:

$$\| T_n x - y \| \geqslant d, \ \forall n \geqslant n_0 \text{ și } x \in \partial D_n.$$

Demonstrație. Să presupunem prin absurd că lema ar fi falsă; ar exista atunci $x_{n'} \in \partial D_{n'}$ și $\varepsilon_{n'} > 0$, $\varepsilon_{n'} \underset{n'}{\to} 0$, astfel încît $\| T_{n'} x_{n'} - y \| \leqslant \varepsilon_{n'}$.

Dar T fiind A-proprie, există un subșir $\{x_{n''}\} \subset \{x_{n'}\}$ și $x \in X$ astfel încît $\lim_{n''} x_{n''} = x$ și $Tx = y$.

Din faptul că $x_{n''} \in \partial D_{n''} \subset \partial D$ care este închisă, rezultă că $x \in \partial D$ și deci $y \in T(\partial D)$ ceea ce nu se poate.

q.e.d.

---

*) ∂D este frontiera mulțimii D.

Fie Z mulţimea numerelor întregi iar $Z'=Z\cup\{-\infty\}\cup\{+\infty\}$ şi $D\subset X$ deschisă şi mărginită.

DEFINIŢIA 3.3. *Fie* $T:\overline{D}\to Y$, A-proprie şi continuă, şi fie $y\notin T(\partial D)$; *vom defini gradul aplicaţiei* T *prin* :

$d[T;D,y]=\{\gamma/\gamma\in Z$ *pentru care există un subşir* $\{n'\}\subset Z$, $n'\to+\infty$ *astfel încît* $\lim\limits_{\infty} d[T_{n'};D_{n'},Q_{n'}y]=\gamma\}$.

Observaţia 3.2. $d[T_{n'};D_{n'};Q_{n'}y]$ este gradul topologic al lui Brouwer pentru aplicaţia $T_{n'}:X_{n'}\to Y_{n'}$.

Atunci, dacă $\gamma\in d[T;D,y]$ este un întreg finit, $\gamma=m$, se poate presupune că $d[T_{n'},D_{n'}Q_{n'}y]=m$ pentru orice n'.

Următoarea teoremă ne arată că gradul astfel definit are aceleaşi proprietăţi cu gradul lui Brouwer (şi cel al lui Leray-Schauder).

TEOREMA 3.2. *Fie* $T:\overline{D}\to Y$ *continuă, A-proprie şi fie* $y\notin T(\partial D)$ *Atunci avem*

a) $d[T;D,y]\neq\Phi$

b) *dacă* $d[T;D,y]\neq\{0\}$, *atunci există* $x\in D$ *astfel încît* $Tx=y$

c) *Fie* $F(x,t):\overline{D}\times[0,1]\to Y$ *o aplicaţie continuă în* t, *uniform în* $x\in\overline{D}$, *astfel încît pentru orice* $t\in[0,1]$, *aplicaţia* $T_t=F(.,t)$, *să fie A-proprie*; *atunci pentru* $y\notin T_t(\partial D)$, $d[T_t;D,y]$ *este independent de* $t\in[0,1]$.

d) *Dacă* T *este impară pe* D *iar* D *este simetrică, şi dacă* $Q_ny=0$, $\forall n\in N$, *atunci* $d[T;D,y]$ *este impar (adică numerele de forma* $2m$ $2m\notin d[T:D,y]$) *şi în particular* $d[T;D,y]\neq0$, *astfel încît ecuaţia* $Tx=y$ *are o soluţie în* D.

Demonstraţie. a) După lema 3.1. există $n_0\geqslant1$ astfel încît pentru $n\geqslant n_0$, $T_nx\neq Q_ny$, $\forall x\in\partial D_n$; atunci $d[T_n;D_n,Q_ny]$ este bine definit şi au loc următoarele două alternative : sau şirul $\{d[T_n;D_n,Q_ny]\}$ este mărginit şi atunci există un întreg $m\in d[T;D,y]$, sau şirul de mai sus este nemărginit şi astfel $+\infty$ sau $-\infty$ sînt în $d[T;D,y]$.

În concluzie în ambele cazuri $d[T;D,y]\neq\Phi$.

b) Dacă $d[T;D,y]\neq\{0\}$, atunci există un subşir al numerelor naturale, $n'\to+\infty$, astfel încît $d[T_{n'};D_{n'},Q_{n'}y]\neq0$. Din teorema 1.1 există atunci $x_{n'}\in D_{n'}$ astfel încît $T_{n'}(x_{n'})=Q_{n'}y$. Dar $Q_{n'}y\xrightarrow[n']{}y$ şi T fiind A-proprie, există un subşir $\{x_{n''}\}\subset\{x_{n'}\}$ şi $x\in X$ astfel încît $x_{n''}\xrightarrow[n'']{}x$ şi $Tx=y$; dar cum x nu poate fi în ∂D, rezultă $x\in D$.

c) Cum $y \notin T_t(\partial D)$, $\forall t \in [0,1]$, $d[T_t; D, y]$ este bine definit. E suficient astfel să arătăm că există un întreg $n_0 \geqslant 1$, astfel încît pentru $n \geqslant n_0$.

(2) $$Q_n y \notin (T_t)_n(\partial D_n), \quad \forall t \in [0,1],$$

deoarece atunci după teorema 1.2 rezultă că $d[T_t)_n; D_n, Q_n y]$ este independent de t.

Să presupunem că (2) nu ar avea loc; atunci ar exista șirurile $\{x_{n'}\} \subset X$ și $\{t_{n'}\} \subset [0,1]$, cu

(3) $$t_{n'} \xrightarrow[n']{} t_0, \qquad x_{n'} \in \partial D_{n'} \quad \text{și } T_{t_{n'}}(x_n) = Q_{n'}(y).$$

Atunci, cum $T_{t_{n'}} \xrightarrow[n']{} T_{t_0}$ converge uniform pe $\overline{D}$, rezultă

$\| T_{n'}(x_{n'}) - T_{t_0}(x_n) \| \xrightarrow[n']{} 0$; în acest caz din (3) obținem:

$$\| Q_{n'} y - T_{t_0}(x_{n'}) \| = \| T_{n'}(x_{n'}) - T_{t_0}(x_{n'}) \| \xrightarrow[n']{} 0,$$

și deci $T_{t_0}(x_{n'}) \xrightarrow[n']{} y$. Aceasta înseamnă că și $(T_{t_0})_{n'}(x_{n'}) \xrightarrow[n']{} y$ și cum T_{t_0} este A-proprie, rezultă că există $x \in X$ și un subșir $\{x_{n''}\} \subset \{x_{n'}\}$ astfel încît $x_{n''} \xrightarrow[n'']{} x$ și $T_{t_0}(x) = y$; aceasta contrazice însă faptul că $y \notin T_{t_0}(\partial D)$.

d) Să observăm că și aplicațiile T_n sînt impare și $Q_n y = 0 \notin \partial D_n$, datorită lemei 3.1; prin urmare teorema lui Borsuk ne arată că $d[T_n; D_n, Q_n y] = d[T_n; D_n, 0]$ este un număr impar, de unde afirmația

q.e.d.

LEMA 3.2. *Fie $T: \overline{D} \to Y$ continuă și A-proprie; atunci pentru orice $M \subset D$, M închisă, mulțimea $T(M)$ este închisă iar $M \cap T^{-1}(L)$ este relativ compactă, dacă L este relativ compactă, în V.*

Demonstrație Fie $\{x\}_n \subset M \cap T^{-1}(L)$; atunci $Tx_n \in L$, $\forall n \in N$ și cum L este relativ compact, putem presupune trecînd la un subșir că $Tx_n \xrightarrow[n]{} y$ pentru un anumit $y \in \overline{L}$. Din faptul că $P_k x_n \xrightarrow[k]{} x_n \forall n \in N$, rezultă că pentru orice n, există $n' \geqslant n$, astfel încît:

(4) $$\| x_n - P_{n'}(x_{n'}) \| < \frac{1}{n}.$$

Din continuitatea lui T, rezultă

$$\| Tx_n - TP_{n'}(x_{n'}) \| \xrightarrow[n]{} 0.$$

Atunci din $Q_k\, Tx_n \xrightarrow[k]{} Tx_n$ şi $Tx_n \xrightarrow[n]{} y$, rezultă :

$$\| Q_{n'}\, TP_{n'}(x_{n'}) - y \| \leqslant \| Q_{n'}\, TP_{n'}(x_{n'}) - TP_{n'}(x_{n'}) \| +$$

$$+ \| TP_{n'}(x_{n'}) - Tx_n \| + \| Tx_n - y \| \xrightarrow[n]{} 0$$

deci $T_{n'}(P_{n'}\, x_{n'}) \xrightarrow[n']{} y$; T fiind *A-proprie*, există un subşir $\{P_{n''}\, x_{n''}\} \subset \subset \{P_{n'}\, x_{n'}\}$ şi $x \in D$ astfel încît $P_{n''}(x_{n''}) \xrightarrow[n'']{} x$ şi $Tx = y$. Atunci (4) implică faptul că există un subşir $\{x_{n'''}\} \subset \{x_n\}$ astfel încît $x_{n'''} \xrightarrow[n''']{} x$; atunci $x \in M$ acesta fiind compact, deci $x \in M \cap \overline{T^{-1}(L)}$.

Prin urmare $M \cap T^{-1}(L)$ este relativ compactă. Analog se arată că $T(M)$ este închisă.

q.e.d

Corolar. *În ipotezele lemei precedente, dacă $y \in Y$ este astfel $Ty(x) = Tx - y \neq 0$, $\forall x \in \partial M$, atunci există $c > 0$, pentru care :*

$$\| Tx - y \| \geqslant c, \ \forall\, x \in \partial M.$$

Demonstraţie. Cum ∂M este închisă, rezultă din lemă că $T(\partial M)$ este închis, atunci dacă ar exista pentru orice $c = \frac{1}{n}$, un $x_n \in \partial M$, astfel încît $\| Tx_n - y \| < \frac{1}{n}$, atunci $Tx_n \xrightarrow[n]{} y$, deci $y \in \overline{T(\partial M)} = T(\partial M)$, ceea ce nu se poate.

q.e.d.

Lema 3.3 *Fie $S(x_0, \gamma)$ o sferă în X şi $T : \overline{S(x_0, r)} \to Y$ continuă şi A-proprie, fie $y_0 = Tx_0$ şi $T_{y_0}(x) = Tx - y_0 \neq 0$ $\forall\, x \in \partial S(x_0, r_0)$,* *pentru* $r_0 \leqslant r$. *Dacă* $d[T_{y_0}\ S(x_0, r), 0] \neq \{0\}$ *atunci există o sferă* $S(y_0, \rho) \subset Y$ *astfel încît*

$$T\bar{S}(x_0, r_0) \supset S(y_0, \rho).$$

Demonstrație. Cum T este continuă și A-proprie și $T_{y_0}(x) \neq 0$ $\forall x \in \partial S(x_0, r_0)$, rezultă, după corolarul precedent, că

$$\| T_{y_0} x \| \geqslant c > 0, \ \forall x \in \partial S(x_0, r_0).$$

Fie $\rho = \inf\limits_{x \in \partial S(x_0, r_0)} \| T_{y_0} x \| > 0$ și fie $z \in S(y_0; \rho) \subset Y$.

Să definim aplicației $T_z : \bar{S}(x_0, r_0) \to Y$ prin $T_z(x) = Tx - z$; avem, pentru $x \in \partial S(x_0; r_0)$; $\| Tx - z \| \geqslant \| Tx - y_0 \| - \| y_0 - z \| \geqslant \geqslant \rho - \|y_0 - z\| > 0$ deci $T_z x \neq 0$ $\forall x \in S(x_0, r_0)$. Fie acum aplicația,

$$H_t(x) : \bar{S}(x_0, r_0) \times [0, 1] \to Y \text{ definită astfel:}$$

$H_t(x) = Tx - ty_0 - (1-t)z$; evident, pentru orice $t \in [0, 1]$ H_t este A-proprie și continuă în t, uniform pentru $x \in S(x_0, r_0)$, deoarece: $\| H_{t_1}(x) - H_{t_2}(x) \| \leqslant |t_1 - t_2| (\| y_0 \| + \| z \|)$. În plus $H_t(x) \neq 0$

$$\forall x \in \partial S(x_0, r_0) : \| H_t(x) \| = \| Tx - y_0 + (1-t) y_0 - (1-t) z \| \geqslant$$

$$\geqslant \| Tx - y_0 \| - (1-t) \| y_0 - z \| \geqslant s - (1-t)s = st.$$

Prin urmare $0 \notin H_t(\partial S(x_0, r_0))$ și conform teoremei 3.2. (c),

$d[H_t; S(x_0, r_0), 0]$ este independent de $t \in [0, 1]$, adică

$$d[T_z; S(x_0, r_0), 0] = d[H_0; S(x_0, r_0), 0] = d[H_1; S(x_0, r_0), 0] =$$

$$= d[T_{y_0}; S(x_0, r_0), 0] \neq 0$$

și atunci există $x \in S(x_0, r_0)$ astfel încît $Tx = z$ (conform teoremei 3.2. (b)).

q.e.d.

DEFINIȚIA 3.4. *Fie* $T : \overline{D} \to Y$ *o aplicație continuă, A-proprie; se spune că A admite o omotopie solubilă local A-proprie dacă pentru orice* $x_0 \in D$ *există* $\bar{S}(x_0, r) \subset D$ *și o aplicație continuă*

$$T_t(x) ; \bar{S}(x_0, r) \times [0,1] \to Y \text{ astfel încît}$$

i) $T_0(x) = T(x) \;\forall\, x \in S(x_0, r)$; T_t *este A-proprie* $\forall t \in [0, 1]$ *si continuă în* t, *uniform pentru* $x \in \overline{S}(x_0, r)$.

ii) *Există o sferă* $S(x_0, r_0)$ $r_0 \leqslant r$, *astfel încît*

dacă $y_0 = T(x_0)$ și $T_{y_0}(x) = T(x) - y_0 \neq 0$, $\forall\, x \in S(x_0, r_0)$ *atunci:*

$$T_{t,y_0}(x) = T_t(x) - y_0 \neq 0 \;\; \forall x \in S(x_0, r_0),\; t \in [0, 1].$$

iii) $d[T_1, y; S(x_0, r_0), 0] \neq 0$, *dacă este definit.*

TEOREMA 3.3 (*de invarianță a domeniilor*). *Fie* $T : D \to Y$ *o aplicație continuă local A-proprie care admite o omotopie solubilă local A-proprie. Dacă* T *este local biunivocă, atunci* $T(D)$ *este deschis în* Y.

Demonstrație. Vom arăta că pentru orice $y_0 \in T(D)$ există $S(y_0, \rho) \subset T(D)$. Fie $x_0 \in D$, astfel încît $y_0 = Tx_0$; după definiția de mai sus, există $\bar{S}(x_0, r) \subset D$ și o aplicație continuă $T_t(x) : \bar{S}(x_0, r) \times [0, 1] \to Y$ cu proprietățile i), ii) și iii). Cum T este local biunivocă și $T_0(x) = T(x)$ și $T_0(x_0) = y_0$, există o sferă $S(x_0, r_0)$ cu $r_0 \leqslant r$, astfel încît $T_0(x) \neq y_0$, $\forall\, x \in \partial S(x_0, r_0)$.
Prin urmare, după ii) putem presupune că

$$T_{t,y_0}(x) = T_t(x) - y_0 \neq 0 \;\; \forall\, x \in \partial S(x_0, r_0).$$

Atunci $d[T_{0,y_0}; S(x_0, r_0), 0]$ este bine definit și independent de t; iii) implică faptul că:

$$d[T_{0,y_0}; S(x_0, r_0), 0] = d[T_{1,y_0}; S(x_0, r_0), 0] \neq \{0\}.$$

Atunci conform lemei 3.2 există o sferă $S(y_0, \rho) \subset T(\bar{S}(x_0, r_0))$.

q.e.d.

Referințe. Schema de aproximare proiecțională introdusă aici este un caz particular al schemelor de aproximare studiate în [37], [39], [145] am ales totuşi prezentarea aceasta atît pentru simplitate cît şi datorită faptului că ea se întîlneşte foarte frecvent în aplicații. Pentru construcția efectivă a schemelor pe spații funcționale variate (de exemplu pe spațiile Sobolev) recomandăm lucrarea lui Aubin [1]. Aplicațiile A-proprii au fost introduse de Petryshyn [143], [144] şi studiate de Browder şi Petryshyn [41], [42] în legătură cu problema rezolvării unor ecuații funcționale cu ajutorul ecuațiilor aproximate. Rezultatele expuse aici pot fi găsite în lucrările [41], [42] [149], unde teoria gradului topologic generalizat este fundamentată.

CAPITOLUL IV

OPERATORI MONOTONI ÎN SPAȚII BANACH

§ 1. DEMICONTINUITATEA ȘI HEMICONTINUITATE

Definiția 1.1. *Fie* X *și* Y *două spații Banach,* $F : X \to Y$ *și* $A : X \to Y^*$, *doi operatori neliniari; fie* $D(F) = X$; *vom spune că* A *este* F*-monoton dacă*

$$< Ax - Ay,\ F(x - y) > \geqslant 0, \quad \forall x, y \in D(A).$$

Definiția 1.2. a) *Un operator* $A : X \to Y$ *este demicontinuu în* $x \in D(A)$ *dacă pentru orice* $x_n \in D(A)$, *cu* $x_n \xrightarrow[n]{} x$, *rezultă* $Ax_n \xrightarrow[n]{} Ax$.

b) *Un operator* $A : X \to Y$ *este local mărginit în* $x \in D(A)$, *dacă pentru orice* $x_n \in D(A)$, *cu* $x_n \xrightarrow[n]{} x$, *rezultă că șirul* $\{\| Ax_n \|\}$ *este mărginit.*

c) *Un operator* $A : X \to Y$ *este hemicontinuu în* $x \in D(A)$ *dacă pentru orice* $y \in X$ *și* $t \geqslant 0$ *cu* $t_n \xrightarrow[n]{} 0$ *și* $x + t_n y \in D(A)$, *rezultă* $A(x + t_n y) \xrightarrow[n]{} Ax$.

d) *Un operator* $A : X \to Y$ *este local hemimărginit în* $x \in D(A)$ *dacă pentru orice* $y \in X$, $t_n \geqslant 0$ *cu* $t_n \xrightarrow[n]{} 0$ *și* $x + t_n y \in D(A)$, *rezultă că șirul* $\{\| A(x + t_n y) \|\}_n$ *este mărginit.*

Relația evidentă între aceste patru noțiuni este

$$\begin{tikzcd} & b \arrow[dr] & \\ a \arrow[ur] \arrow[dr] & & d \\ & d \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Mai observăm că A este local mărginit în x dacă şi numai dacă există o vecinătate V a lui x, pentru care $A(V)$ să fie mărginită.

Ne vom ocupa cu studiul condiţiilor în care hemicontinuitatea pentru operatori F-monotoni este echivalentă cu demicontinuitatea.

Un prim rezultat (Kato [95]) este dat de

PROPOZIŢIA 1.1. *Fie A şi F doi operatori ca în definiţia* 1.1 *şi îndeplinind condiţiile* :

i) *F este pozitiv omogen, uniform continuu pe sfera unitate din X şi $R(F) = Y$,*

ii) *A este F-monoton cu $D(A)$ deschis;*

atunci A este local mărginit în $x \in D(A)$ dacă şi numai dacă el este local hemimărginit în x.

Demonstraţie. Cum local mărginirea implică local hemimărginirea, vom demonstra numai implicaţia inversă.

Pentru aceasta vom arăta că în cazul în care A este local hemimărginit, nu se poate să avem :

$$x_n \xrightarrow[n]{} x_0 \quad \text{şi} \quad 0 < r_n = \|Ax_n\| \xrightarrow[n]{} +\infty.$$

Fie $\Phi(s) = \sup\limits_{\substack{\|x\|,\|y\| \leqslant 1 \\ \|x-y\| \leqslant s}} \|Fx - Fy\|$, definit pentru $s > 0$; $\Phi(s)$ e o funcţie crescătoare, cu $\lim\limits_{s \to 0} \Phi(s) = 0$, datorită uniform continuităţii lui F; de asemeni $\Phi(s) < +\infty$ pentru orice $s > 0$, deoarece dacă am avea $\Phi(s_0) = +\infty$ pentru un $s_0 > 0$, atunci $\Phi(\lambda s_0) = +\infty$, $\forall \lambda > 0$ şi atunci $\lim\limits_{\lambda \to 0} \Phi(\lambda s_0) = +\infty$, ceea ce nu se poate, conform celor de mai sus. Mai avem următoarea proprietate evidentă.

$$\|Fx - Fy\| \leqslant \Phi(\|x - y\|), \text{ dacă } \|x\|, \|y\| \leqslant 1. \tag{1}$$

Fie :

$$t_n = \max\left\{\frac{1}{r_n}, \|x_n - x_0\|^{1/2}, \Phi(\|x_n - x_0\|)^{1/2}\right\} \tag{2}$$

atunci :

$$t_n \geqslant 0, \; t_n r_n \geqslant 1, \; \|x_n - x_0\| \leqslant t_n^2, \; \Phi(\|x_n - x_0\|) \leqslant t_n^2. \tag{3}$$

Cum $r_n \underset{n}{\to} +\infty$ şi $\|x_n - x_0\| \underset{n}{\to} 0$, avem :

(4) $$\Phi(\|x_n - x_0\|) \underset{n}{\to} 0 \text{ şi } t_n \underset{n}{\to} 0.$$

Fie $y \in X$ şi $y_n = x_0 + t_n y$; cum $x_0 \in D(A)$ care este deschisă, rezultă că pentru n suficient de mare, $y_n \in D(A)$; atunci, cum $< Ay_n - Ax_n, F(y_n - x_n) > \geqslant 0$, avem

(5) $$< Ax_n, Fy > \leqslant t_n^{-1} < Ay_n, F(y_n - x_n) > + \\ + t_n^{-1} < Ax_n, F(t_n y) - F(y_n - x_n) >.$$

Să evaluăm membrul drept al lui (5); pentru aceasta observăm că din $t_n^{-1}\|x_n - x_0\| \leqslant t_n \to 0$, rezultă :

$$t_n^{-1}(y_n - x_n) = y - t_n^{-1}(x_n - x_0) \underset{n}{\to} y.$$

Cum F este continuă, avem :

$$t_n^{-1} F(y_n - x_n) = F[t_n^{-1}(y_n - x_0)] \underset{n}{\to} Fy.$$

Atunci primul termen din membrul drept al lui (5) este mărginit, deoarece $\{\|Ay_n\|\}$ este mărginită prin ipoteză.

Pentru a evalua al doilea termen, să observăm, că atît $t_n y \underset{n}{\to} O$ şi $y_n - x_n \underset{n}{\to} 0$ şi deci pot fi considerați în sfera unitate şi atunci cu inegalitățile (1) şi (3), obținem :

$$\|F(t_n y) - F(y_n - x_n)\| \leqslant \Phi(\|t_n - y_n + x_n\|) = \Phi(\|x_n - x_0\|) \leqslant t_n^2$$

şi deci acest termen este majorat de $t_n \|Ax_n\| = t_n r_n$.

Prin urmare (5) devine

(6) $$< Ax_n, Fy > \leqslant C + t_n r_n$$

care împărțită prin $t_n r_n \geqslant 1$, ne dă

(7) $$\overline{\lim_n} < (t_n r_n)^{-1} Ax_n, Fy > < +\infty.$$

Cum F este o surjecţie, pentru orice $z \in Y$, există $y \in X$, cu $Fy = z$; atunci (7) implică faptul că $\{<(t_n r_n)^{-1} Ax_n, z>\}_{n \in N}$ este mărginită, $\forall z \in Y$. Dar aceasta înseamnă că $\{\|(t_n r_n)^{-1} Ax_n\|\}_n$ este mărginită, ceea ce este în contradicţie cu faptul că

$$(t_n r_n)^{-1} Ax_n = (t_n r_n)^{-1} = t_n^{-1} \xrightarrow[n]{} +\infty.$$

q.e.d.

Teorema 1.1. *Fie îndeplinite pentru operatorii A şi F condiţiile* i) şi ii); *atunci A este demicontinuu dacă şi numai dacă este hemicontinuă.*

Demonstraţie. Fie operatorul A hermicontinuu în $x_0 \in D(A)$; atunci, după propoziţia precedentă el este local mărginit în acest punct şi deci şirul $\{r_n\}_n = \{\|Ax_n\|\}_n$ este mărginit, dacă $x_n \xrightarrow[n]{} x$.

Să punem $t = \max\ [\|x_n - x_0\|^{1/2}, \Phi(\|x_n - x_0\|)^{1/2}]$; atunci (3) şi (4) au loc, cu excepţia inegalităţii $t_n r_n \geqslant 1$. Cu $y_n = x_0 + t_n y$, are loc (5) şi ca mai sus rezultă $t_n^{-1} F(y_n - x_n) \to Fy$.

De aici şi din faptul că $Ay_n = A(x_0 + t_n y) \xrightarrow[n]{} Ax_0$, rezultă că primul termen din membrul drept al lui (5) tinde către $<Ax_0, Fy>$.

Termenul al doilea este majorat de $t_n r_n$, exact ca în demonstraţia precentă; cum $\{r_n\}_n$ este mărginit, acest termen tinde la 0. Astfel:

$$\overline{\lim_n} <Ax_n - Ax_0, \ Fy> \leqslant 0.$$

Dar $Fy = z$ poate fi ales arbitrar în Y, şi deci

$$\underline{\lim_n} <Ax_n - Ax_0, \ Fy> \geqslant 0.$$

Prin urmare $Ax_n \xrightarrow[n]{} Ax_0$.

q.e.d.

Observaţia 1.1 Dacă $X = Y$ şi $F = I$, operatorul A din definiţia 1.1 este monoton.

În acest caz afirmaţiile propoziţiei 1.1 şi teoremei 1.1 rămîn adevărate şi cînd $D(A)$ este un subspaţiu liniar dens în X. Într-adevăr, se pornește în acest caz în propoziția 1.1 cu $y \in D(A)$ și (7) devine:

$$(7') \qquad \overline{\lim_n} <(t_n r_n)^{-1} Ax_n, y> < +\infty, \forall y \in D(A)$$

iar densitatea presupusă, implică mărginirea lui $\{||(t_n r_n)^{-1} Ax_n||\}_n$.

Prin urmare avem:

TEOREMA 1.2. *Pentru un operator monoton $A: D(A) \to X^*$ demicontinuitatea și hemicontinuitatea sînt echivalente dacă $D(A)$ este o mulțime deschisă în X sau un subspațiu liniar dens în X.*

Un rezultat important dă teorema 1.1, după cum se va vedea, și pentru operatori acretivi.

Referințe. Rezultatele acestui paragraf sînt ale lui T. Kato [94] [95].

§ 2. APLICAȚII MONOTONE ȘI MAXIMAL MONOTONE, PROPRIETĂȚI GENERALE ȘI EXEMPLE

Vom lucra în cele ce urmează cu aplicații multivoce, sprecificînd de fiecare dată cînd ele sînt univoce.

Fie $A: X \to 2^Y$; prin $D(A)$ vom nota domeniul efectiv al aplicației A, adică: $D(A) = \{x / Ax \neq \emptyset\}$. Suma $A + B$ este definită prin.

$$(A + B)(x) = Ax + Bx \text{ dacă } Ax \neq \emptyset \text{ și } Bx \neq \emptyset \text{ iar}$$

$$(A + B)(x) = \emptyset \text{ dacă } Ax = \emptyset \text{ sau } Bx = \emptyset.$$

Dacă $G(A) = \{(x, u)/x \in Au\}$, prin A^{-1} înțelegem operatorul pentru care $G(A^{-1}) = \{(u, x)/(x, u) \in G(A)\}$.

Vom spune că $\tilde{A}$ extinde pe A, dacă $\tilde{A}x \supset Ax$, $\forall x \in X$. Pentru $V \subset X$, notăm prin $A(V) = \bigcup_{x \in V} Ax$.

DEFINIȚIA 2.1. *Fie X un spațiu Banach și o aplicație $A: X \to 2^{X^*}$; atunci*

a) *A se numește monotonă dacă pentru orice $x, y \in D(A)$ și orice $u \in Ax$, $v \in Ay$, avem:*

$$<u - v, x - y> \geq 0$$

b) *A se numește maximal monotonă dacă este monotonă și graficul său este maximal în mulțimea graficelor de operatori monotoni (față de incluziune).*

c) *A se numește hipermaximal monotonă dacă există o aplicație univocă, monotonă $F : X \to X^*$ astfel încît $R(A + F) = X^*$* și *$(A + F)^{-1}$ să fie univocă și continuă de la X^* în X.*

Observația 2.1. A este maximal monoton, dacă și numai dacă

$$u_0 \in Ax_0 \Leftrightarrow < u - u_0, \ x - x_0 > \geqslant 0 \qquad \forall (x, u) \in G(A).$$

PROPOZIȚIA 2.1. *Dacă $A : X \to 2^{X^*}$ este hipermaximal monoton, atunci el este maximal.*

Demonstrație. Să presupunem că există $x_0 \in X$ și $u_0 \in X^*$ astfel încît:

$$(1) \qquad < u - u_0, x - x_0 > \geqslant 0, \ \forall \ (x, u) \in G(A).$$

Va trebui să arătăm că $u_0 \in Ax_0$. Cum F este monotonă, avem

$$(2) \qquad < Fx - Fx_0, x - x_0 > \geqslant 0 \ \forall \ x \in X$$

Sumînd 1) și 2), obținem:

$$(3) \qquad < u + Fx - (u_0 + Fx_0), x - x_0 > \geqslant 0$$

Fie $v \in X^*$ arbitrar, $t > 0$ și fie

$$y_t = u_0 + Fx_0 + tv \text{ și } x_t = (A + F)^{-1} (y_t).$$

Evident $y_t \in (A + F)x_t$ și există deci $z_t \in Ax_t$ astfel încît:

$$z_t + Fx_t = y_t.$$

Înlocuind acum în (3) x prin x_t, obținem:

$$0 \leqslant < y_t - (u_0 + Fx_0), x_t - x_0 > = t < v, x_t - x_0 >.$$

Prin urmare $<v, x_t - x_0> \geqslant 0$, Cînd $t \to 0_+$, $y_t \to u_0 + Fx_0$ şi deci $x_t \underset{t\to 0_+}{\to} (A + F)^{-1}(u_0 + Fx_0) = y_0$, $(A + F)^{-1}$ fiind continuă. Atunci

$$<v, y_0 - x_0> \geqslant 0, \ \forall\, v \in X, \text{ deci } <v, y_0 - x_0> = 0,$$

$$\forall\, v \in X, \text{ adică } y_0 = x_0.$$

Astfel $x_0 = (A + F)^{-1}(u_0 + Fx_0)$ şi deci

$$u_0 + Fx_0 \in Ax_0 + Fx_0, \text{ adică } u_0 \in Ax_0.$$

q.e.d.

PROPOZIȚIA 2.2. *Fie* $A : X \to 2^{X^*}$ *maximal monotonă; atunci* $\forall\, x \in X$, *mulțimea* Ax *este convexă şi închisă în* X*-topologia pe* X^*.

Demonstrație. Din observația 2.1 rezultă că pentru orice $x_0 \in X$,

$$Ax_0 = \bigcap_{(x,u)\in G(A)} \{u_0 \in X^*, <u - u_0, x - x_0> \geqslant 0\}.$$

Dar fiecare din mulțimile intersecției este convexă şi închisă în X-topologia pe X^*, de unde afirmația.

q.e.d.

PROPOZIȚIA 2.3. *Fie* $A : X \to 2^{X^*}$ *o aplicație maximală monotonă; dacă pentru un şir* $x_n \underset{n}{\rightharpoonup} x_0$ *(respectiv* $x_n \underset{n}{\to} x_0$*) există un şir* $u_n \in Ax_n$ *cu* $<u_n, x> \to <u_0, x> \forall\, x \in X$ *(respectiv* $u_n \underset{n}{\to} u_0$*) atunci* $u_0 \in Ax_0$.

Demonstrație. Pentru orice $(x, u) \in G(A)$, avem:

$<u_n - u, x_n - x> \geqslant 0$. Atunci, făcînd $n \to \infty$, obținem în ambele cazuri:

$$<u_0 - u, x_0 - x> \geqslant 0 \text{ şi deci } (x_0, u_0) \in G(A).$$

q.e.d.

DEFINIȚIA 2.2 a) *Fie* $A : X \to 2^Y$, X *şi* Y *fiind două spații Banach; se spune că* A *este local mărginită în* $x \in X$, *dacă există o vecinătate* V *a lui* x_0 *astfel încît* $A(V)$ *să fie mărginită,*

b) A *este local hemimărginită în* $x \in X$, *dacă este local mărginit pe orice semidreaptă pe capăt* x.

c) *A se numește *-superior semicontinuă (respectiv superior demicontinuă) în $x \in X$, dacă ea este superior semicontinuă în $x \in X$, cînd pe X^* se ia X-topologia (respectiv pe X^* se ia topologia slabă).*

d) *A se numește *-superior hemicontinuă (respectiv superior hemicontinuă) în $x \in X$, dacă ea este superior semicontinuă pe orice semidreaptă de capăt x, cînd pe X^* se ia X-topologia (respectiv pe X^* se ia topologia slabă).*

Observația 2.2. Evident A este local mărginită (respectiv local hemimărginită) dacă și numai dacă orice secțiune a sa este local mărginită (respectiv local hemimărginită). Atunci ca urmare a rezultatelor din paragraful precedent, avem :

PROPOZIȚIA 2.4. *Fie $A : X \to 2^{X^*}$ o aplicație monotonă cu $D(A)$ deschis; A este local mărginită dacă și numai dacă ea este local hemimărginită.*

TEOREMA 2.1. *O aplicație monotonă $A : X \to 2^{X^*}$ pentru care $D(A)$ este deschis, este local mărginită.*

Demonstrație. După propoziția de mai sus, este suficient să arătăm că A este local hemimărginită.

Vom arăta de fapt că pentru orice subspațiu finit dimensional $X_0 \subset X$, A este local mărginită în $D(A) \cap X_0$. Fie i_{X_0} injecția lui X_0 în X și $i^*_{X_0}$ aplicația duală care aplică X^* pe X^*_0.

A va fi local mărginită în $D(A) \cap X_0$ dacă pentru orice subspațiu finit dimensional $X_1 \subset X$, aplicația $i^*_{X_1} \circ A$ este local mărginită pe $D(A) \cap X_0$.

Într-adevăr, în aceste ipoteze ar rezulta că pentru orice $y \in X_1$, mulțimea :

$$\{< i^*_{X_1} \circ Ax, y >\}_{x \in D(A) \cap X_0} = \{< Ax, i_{X_1} y >\}_{x \in D(A) \cap X_0}$$

este mărginită și cum orice $x \in X$ este de forma $x = i_{X_1 v}$, pentru un X_1 convenabil ales, cu principiul uniform mărginirii afirmația rezultă.

Dacă extindem pe X_0 pînă la un subspațiu finit dimensional care să conțină pe X_1, e suficient să arătăm deci că $i^*_{X_0} \circ A$ este local mărginită pe $D(A) \cap X_0$.

Dacă notăm prin $A_{X_0} = i^*_{X_0} \circ A$, atunci A_{X_0} este o aplicație monotonă a lui X_0 în 2^{X_0}.

Într-adevăr, dacă $x, y \in X_0$, atunci $u \in A_{X_0}(x)$ şi $v \in A_{X_0}(y)$ dacă şi numai dacă $u = i^*_{X_0}(u')$ şi $v = i^*_{X_0}(v')$ cu $u' \in Ax$ şi $v' \in Ay$. Astfel:

$$<u - v, x - y> = <i^*_{X_0}(u' - v'), x - y> =$$

$$= <u' - v', i_{X_0}(x - y)> = <u' - v', x - y> \geqslant 0.$$

Prin urmare se constată că problema inițială se reduce la următoarea:

Fie X un spațiu finit dimensional şi A o aplicație monotonă, cu $D(A)$ deschis; atunic A este local mărginită pe $D(A)$.

Să presupunem prin absurd că ar exista $\{x_n\}_n \subset D(A)$, cu $x_n \underset{n}{\to} x_0 \in D(A)$ şi $u_n \in Ax_n$, cu $||u_n|| \underset{n}{\to} +\infty$. Fie $x \in D(A)$ şi $u \in Ax$; atunci:

$$(4) \qquad <u_n - u, \quad x_n - x> \geqslant 0.$$

Să punem $r_n = ||u_n||$ şi $v_n = r_n^{-1} u_n$; atunci $||v_n|| = 1$ şi trecînd la un subşir, putem presupune că $<v_n, x> \underset{n}{\to} <v_0, x>$, $\forall x \in X$ cu $||v||_0 = 1$. Inegalitatea (4) devine:

$$r_n < v_n - r_u^{-1} u, x_n - x > \geqslant 0, \text{ deci } < v_n - r_n^{-1} u, x_n - x > \geqslant 0.$$

Cînd $n \to \infty$, obținem

$$(5) \qquad <v_0, x_0 - x> \geqslant 0.$$

Dacă y este un element arbitrar în X, atunci $x_t = x_0 - ty \in D(A)$, pentru $t > 0$, suficient de mic. Înlocuind pe x prin x_t în (5) obținem: $t<v_0, y> \geqslant 0$, adică $< v_0, y> = 0$, $\forall y \in X$. Deci $v_0 = 0$, ceea ce contrazice faptul că $||v_0|| = 1$

q.e.d.

DEFINIȚIA 2.3. *Vom spune că* $A: X \to 2^{X^*}$ *este maximal monotonă pe* $D(A)$, *dacă* $x_0 \in D(A)$ şi $u_0 \in X^*$ *verificînd* $<u - u_0, \ x - x_0> \geqslant 0$ $\forall (x, u) \in G(A)$, *implică* $u_0 \in Ax_0$.

TEOREMA 2.2. *Dacă A este maximal monoton pe $D(A)$, atunci A este *-superior semicontinuă.*

Demonstrație. După teorema precedentă, A este local mărginită pe $D(A)$. Să presupunem că A nu ar fi $*$-superior semicontinuă; atunci ar exista un șir $\{x_n\}_n \subset D(A)$, cu $x_n \xrightarrow[n]{} x_0 \in D(A)$ și $u_n \in Ax$, pentru care există o vecinătate V a lui Ax_0 în X-topologia pe X^*, astfel încît $u_n \notin V$. Putem presupune că șirul $\{x_n\}_n$ este conținut într-o vecinătate U a lui x_0 pentru care $A(U)$ este mărginită.

Atunci $A(U)$ este conținută într-o submulțime $K \subset X^*$, compactă în X-topologia pe X^*.

Pentru orice întreg m, vom defini $R_m = \bigcup\limits_{n \geqslant m} \{u_n\}$; familia $\{\overline{R}_m\}_{m \in N}$ are proprietatea intersecției finite și deci există $u_0 \in K/V$ astfel încît $u_0 \in \overline{R}_m$, $\forall m \in N$.

Fie $(x,u) \in G(A)$; cum A este monoton, avem :

$$< u_n - u, \; x_n - x > \geqslant 0$$

și deci

$$<u_n - u, x_0 - x > = <u_n - u, x_n - x > + < u_n - u, x_0 - x > \geqslant$$

$$\geqslant < u_n - u, x_0 - x_n > > -2M \; ||x_n - x_0||$$

deoarece $||u_n|| + ||u|| \leqslant 2M$, unde M depinde doar de u.

Deci, dacă $n \geqslant m$, cu m suficient de mare încît $||x_0 - x_n|| \leqslant (2M)^{-1}\,\varepsilon$, avem, $<u_n - u, x_0 - x> \geqslant -\varepsilon$.

Cum aceasta are loc pentru toți u_n din R_m și cum funcția $<v-u, x_0-x>$ este continuă în v în X-topologia pe X^*, pentru u, x_0, și x fixați, rezultă că aceeași inegalitate are loc și pentru u_0, adică :

$$< u_0 - u, \quad x_0 - x > \geqslant -\varepsilon,$$

ε fiind arbitrar, aceasta implică $<u_0 - u_1 \; x_0 - x> \geqslant 0 \; \forall (x,u) \in G(A)$. Cum A este maximal monoton pe $D(A)$ rezultă că $u_0 \in Ax_0$, ceea ce nu se poate.

q.e.d.

TEOREMA 2.3. *Fie $A : X \to 2^{X^*}$ o aplicație monotonă astfel încît pentru orice $x \in X$, mulțimea Ax este nevidă, convexă și închisă în*

X-topologia pe X^*; atunci dacă A este — superior hemicontinuă, A este maximal monotonă.*

Demonstrație. Să presupunem că ar exista $x_0 \in X$ și $u_0 \in X^*$, astfel încît: $< u - u_0,\ x - x_0 > \geqslant 0$, pentru orice $(x,u) \in G(A)$ și că $u_0 \notin Ax_0$.
Cum Ax_0 este închisă și convexă în X, există $y \in X$, astfel încît

$$< u_0, y > \geqslant \sup_{u \in Ax_0} < u, y >.$$

Vom pune $x_t = x_0 + ty$ și fie $x_t \in Ax_t$ și V vecinătatea în X-topologia pe X^* dată de

$$V = \{ u / u \in X^*,\ <u,y> < < u_0, y > \}.$$

Cum A este* — superior hemicontinuă, rezultă că pentru $t > 0$ suficient de mic, $u_t \in V$. Atunci:

$$0 \leqslant < u_t - u_0,\ x_t - x_0 > = t < u_t - u_0, y > < 0$$

ceea ce este o contradicție. Prin urmare A este maximal monoton.

q.e.d

COROLAR. *Orice aplicație de dualitate pe X este maximal monotonă.*

Demonstrație. Aceasta este o consecință a teoremei precedente și a faptului că orice aplicație de dualitate este *— superior semicontinuă (propoziția 3.5 cap. I).

Observația 2.3. Observăm că dacă in ipotezele teoremei precedente $D(A) \neq X$, dar este deschisă, atunci pentru orice $x_0 \in D(A)$ și $u_0 \in X^*$ astfel încît $< u - u_0,\ x - x_0 > \geqslant 0$, $\forall (x,u) \in G(A)$; rezultă că $u_0 \in Ax_0$, deci A este maximal monoton pe $D(A)$. Putem da acum:

TEOREMA 2.4. *Fie A monotonă cu $D(A)$ deschisă astfel încît pentru orice $x \in D(A)$, Ax să fie o mulțime convexă și închisă în X-topologia pe X^*.*

*Atunci A este *— superior hemicontinuă dacă și numai dacă este *— superior semicontinuă.*

Demonstrație. Una din implicații este evidentă. Pentru a doua, se constată că după observația de mai sus, A este maximal monotonă pe $D(A)$; dar atunci teorema 2.2 ne asigură că A este* — superior semicontinuă.

q.e.d.

În continuare vom da cîteva exemple de operatori monotoni şi maximali monotoni.

I. Clasa cea mai importantă de operatori monotoni este cea a subdiferenţialelor de funcţii convexe : este uşor de verificat pornind de la definiţia subgradientului că ∂f este monotonă.

Fie C o mulţime convexă şi închisă în X, $C \neq \emptyset$, funcţia indicatoare a lui C este :

$$\delta_c(x) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } x \in C \\ +\infty & \text{dacă } x \notin C. \end{cases}$$

Se observă că $x^* \in \partial\delta_C(x) \Leftrightarrow \langle x^*, y-x \rangle \leqslant 0$, $\forall y \in C$. În cazul simplu $X=R$ şi $C=[0,1]$:
$\partial(\delta_C)(0) = (-\infty,0)$; $\partial(\delta_C)(\alpha) = 0$ pentru $0<\alpha<1$ şi $\partial(\delta_C)(1) = [0,+\infty)$ şi este evident maximal monotonă.

II. Fie T operatorul diferenţial neliniar de ordinul doi sub formă de divergenţă :

$$Tf = a_0(x,f, \operatorname{grad} f) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} a_i\,(x,f, \operatorname{grad} f),$$

unde $\operatorname{grad} f = (f_{x_1}, \ldots, f_{x_n})$, derivatele fiind înţelese distribuţional iar $a_i(x,\xi) = a_i(x,\xi_0,\xi_1,\ldots,\xi_n)$ sînt funcţii continuu de $\xi \in R^{n+1}$ pentru orice x fixat în $\Omega \subset R^n$ şi măsurabile în x pentru ξ fixat. Vom presupune în plus că a_i sînt astfel încît forma :

$$\langle Tf, g \rangle = \int_\Omega a_0(x,f, \operatorname{grad} f)\, g\, dx + \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \alpha_i\,(x,f, \operatorname{grad} f)\, g_{x_i}\, dx$$

să fie finită, pentru orice $f,g \in H^{1,p}$ şi să satisfacă condiţia

$$|\langle Tf, g \rangle| \leqslant \gamma(\|f\|_{H^{1,p}})\, \|g\|_{H^{1,p}}$$

cu γ, o funcţie continuă pe $(0,+\infty)$.

Aceasta are loc dacă $a_i(x,\xi)$ sînt polinoame cu creştere lentă în ξ, adică :

$$a_i(x,\xi) \leqslant c(1+|\xi|^{p-1}) \qquad x \in \Omega, \qquad \xi \in R^{n+1}$$

(ceea ce implică în particular că $a_i(x,f, \text{grad } f) \in L^q(\Omega)$). Atunci Tf este bine definit ca element din dualul lui $H^{1,p}(\Omega)$.

Operatorul T va fi monoton de la $H^{1,p}$ în $(H^{1,p})^*$ dacă presupunem că funcțiile $a_i(x,\xi)$ satisfac condiția de elipticitate slabă neliniară, adică :

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i(x, \xi) - a_i(x, \xi'))(\xi_i - \xi_1') \geqslant 0 \ \forall \ \xi, \xi' \in R^{n+1}.$$

Într-adevăr :

$$< Tf - Tg, f-g > = < Tf, f-g > - < Tg, f-g > =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \int_{\Omega} [a_i(x, f, \text{grad } f) - a_i(x, g, \text{grad } g)](fx_i - gx_i)\, dx \geqslant 0.$$

În cazul în care funcțiile a_i au forma

$$a_i(x,\xi) = \frac{\partial}{\partial \xi} \Phi(x,\xi) \text{ a.p.t. în } \Omega,\ i = 0, 1, \ldots, n,$$

operatorul T este diferențiala integralei multiple

$$F(f) = \int_{\Omega} \Phi(x, f, \text{grad } f)\, dx.$$

Într-adevăr :

$$\frac{d}{dt} F(f + tg)\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \Phi(x, f + tg, \text{ grad }(f + tg)\, dx\Big|_{t=0} =$$

$$= \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \xi_0}\right) g\, dx + \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \xi_i}\right) \cdot g\, dx = < Tf, g >.$$

În particular, dacă vom lua

$$F(t) = \psi(\|f\|) = \frac{1}{p} \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|^p dx,\ f \in H_0^{1,p}(\Omega),$$

operatorul monoton T care se obține drept diferențială a lui $F(f)$ nu este altul decît aplicația de dualitate din $H_0^{1,p}$ în dualul său.

Observația 2.4. Exemplul I ne arată că noțiunea de monotonicitate este o extindere la aplicațiile generale de la X în 2^{X^*} a proprietății caracteristice a subdiferențialei funcțiilor convexe pe X, iar exemplul II motivează introducerea acestei noțiuni, pornind de la rezolvarea problemei Dirichlet generalizate; aceasta este problema Dirichlet clasică în care se înlocuiește condiția la bord prin $f \in H_0^{1,p}$, iar ecuația respectivă prin ecuația $Tf=f_0$, unde $f_0 \in (H_0^{1,p})^*$ iar soluția este căutată în $H_0^{1,p}$.

Rezolvarea unor ecuații funcționale de forma $Tf=f_0$ impune studiul surjectivității operatorilor monotoni pe care îl vom face în paragraful următor.

Referințe. Operatorii neliniari monotoni au fost studiați de G. Minty [117]–[122] și F. Browder [27], [36], [39]. Rezultatele acestui paragraf se găsesc în [39] iar aplicațiile în [28]. A se vedea și [138].

§ 3. ASUPRA UNOR ECUAȚII FUNCȚIONALE PENTRU OPERATORI MONOTONI

După cum s-a arătat, dacă A este un operator maximal monoton, atunci relația $u_0 \in Ax_0$ este caracterizată prin așa numita inegalitate variațională :

$$<u-u_0,\ x-x_0> \geqslant 0,\ \forall\ (x,u) \in G(A)$$

care nu e altceva decît un sistem infinit de inegalități neliniare pe care le satisface vectorul x_0. Cu rezolvarea unor astfel de inegalități variaționale ne vom ocupa în cele ce urmează :

DEFINIȚIA 3.1. *Fie $A : X \to 2^{X^*}$; A se numește finit continuă, dacă :*

a) *$D(A)$ este închisă și convexă în X iar pentru orice $x \in D(A)$, Ax este o mulțime închisă și convexă*

b) *Pentru orice submulțime finită $X_r = \{x_1, \ldots, x_r\} \subset D(A)$, A este * -superior semicontinuă pe acoperirea închisă convexă a lui X_r.*

Un exemplu de aplicație finit continuă este aplicația de dualitate.

DEFINIȚIA 3.2. *Fie X un spațiu Banach și $A: X \to 2^{X^*}$ o aplicație; se spune că A este coercivă în raport cu $u_0 \in X^*$ dacă există $R > 0$ astfel încît*

$$<u - u_0, x> > 0 \text{ pentru orice } x \in D(A) \text{ cu } ||x|| > R \text{ și } u \in Ax$$

Observația 3.1. Dacă pentru aplicația

$$A: X \to 2^{X^*} \text{ avem } < u, x > \geqslant c(||x||)\ x, \ \forall u \in Ax \text{ și}$$

$$c(r) \xrightarrow[r \to +\infty]{} +\infty$$

atunci, A este coercivă în raport cu orice $u_0 \in X$. Într-adevăr pentru $u_0 \in X$, există R astfel încît pentru $||x|| > R$, să avem $c(||x||) > ||u_0||$ Atunci

$$<u, x> \geqslant c(||x||)\,||x|| \geqslant ||u_0||\,||x|| \geqslant < u_0, x>.$$

Evident, orice aplicație de dualitate este coercivă.

DEFINIȚIA 3.3. *O aplicație $A: X \to 2^{X^*}$ se numește mărginită dacă pentru orice $R > 0$, există $M(R) > 0$ astfel încît pentru orice x cu $||x|| \leqslant R$, există $u \in Ax$ pentru care $||u|| \leqslant M(R)$.*

Primul rezultat pe care îl vom demonstra este următorul

PROPOZIȚIA 3.1. *Fie X un spațiu Banach reflexiv $0 \in K \subset X$, o submulțime închisă și convexă iar $A, B: K \to 2^{X^*}$ două aplicații monotone, cu $0 \in A(0)$ iar B finit continuă, mărginită și coercivă în raport cu un $w_0 \in X$. Atunci există $(x_0, u_0) \in G(B)$ astfel încît pentru orice $(x, u) \in G(A)$ să avem*

(1) $$<u + u_0 - w_0,\ x - x_0> \geqslant 0.$$

Vom avea nevoie de o serie de rezultate auxiliare.

LEMA 3.1. *Fie X reflexiv și $K_0 \subset X$, închisă, convexă și mărginită iar $K_1 \subset X^*$; dacă pentru orice $u \in K_1$ există $x \in K_0$ astfel încît $<u, x> \geqslant 0$, atunci există $x_0 \in K_0$ astfel încît $< u, x_0 > \geqslant 0 \ \forall u \in K_1$.*

Demonstrație. Să presupunem prin absurd că pentru orice $x \in K_0$, ar exista $u = u(x) \in K_1$, astfel încît $<u, x> < 0$.

Fie $u \in K_1$ și $N_u = \{x \in K_0; <u, x> < 0\}$; N_u este o mulțime deschisă în topologia slabă pe K_0 și orice punct din K_0 este conținut în cel puțin o mulțime de forma N_u. Cum X este reflexiv iar K_0 închis şi mărginit, K este slab compactă; există deci pentru acoperirea $\{N_u\}_{u\in K1}$, o subacoperire a lui K_0 prin submulţimile $\{N_{u_1},\ldots,N_{u_r}\}$. Fie $\{\alpha_1,\ldots,\alpha_r\}$ partiţia unităţii în topologia slabă asociată acestei acoperiri şi să considerăm aplicaţia $p: K_0\to K_1$ dată prin $p(x)=\sum_{j=1}^{r}\alpha_j(x)\,u_j$; p este continuă de la topologia slabă pe K_0 la topologia tare pe submulţimea finit dimensională a lui K_1, egală cu închiderea convexă a mulţimii $\{u_1,\ldots,u_r\}$. În plus avem:

$$<p(x),x>=\sum_{j=1}^{r}\alpha_j(x)<u_j,\ x> \ < 0$$

deoarece pentru $x\in N_{u_j}$, $<u_j,\ x> \ < 0$ iar pentru $x\notin N_{u_j}$, $\alpha_j(x)=0$. Fie acum aplicaţia $T: K_1\to 2^{K_0}$ definită prin

$$Tu=\{x/x\in K_0,\ <u,x>\geqslant 0\},\ u\in K_1.$$

Prin ipoteză $Tu\neq\emptyset$ $\forall u\in K$ şi Tu este o submulţime convexă slab închisă a lui K.

T este superior semicontinuă de la K_1 cu topologia tare în 2^{K_0}, cu topologia slabă pe K_0. Într-adevăr, să presupunem prin absurd cu $u_j\to u_0$ în K_1 şi că ar exista o vecinătate V a lui Tu_0 în topologia slabă, astfel încît $Tu_j\cap(K_0\setminus V)\neq\emptyset$, $\forall j\in N$.

Fie $x_j\in Tu_j\cap(K_0\setminus V)$; cum $x_j\in K_0$ care este mărginit şi slab compact, trecînd la un subşir, putem presupune că x_j converge slab către un $x_0\in K_0\setminus V$.

Prin urmare:

$$<u_j,\ x_j> \xrightarrow[j]{} <u_0,\ x_0>\geqslant 0 \text{ adică } x_0\in Tu_0,$$

ceea ce nu se poate, deoarece $Tu_0\in V$.

Să definim aplicaţia $T_1: K_0\to 2^{K_0}$ prin $T_1(x)=Tp(x)$; din proprietăţile de continuitate, respectiv de superior semicontinuitate ale funcţiilor care se compun, rezultă că T_1 este superior-semicontinuă în topologia slabă pe K_0 considerat atît ca domeniu de definiţie cît şi ca domeniu de valori.

Pentru orice $x\in K_0$, $T_1x=Tp(x)$ este o submulţime slab închisă, convexă a lui K_0; atunci conform teoremei 2.3 capitolul III, există $x_0\in T_1x_0$.

Pentru x_0 avem: $x_0\in Tp(x_0)$, deci $<p(x_0),\ x_0>\geqslant 0$; dar cum $<p(x),x><0$, $\forall x\in K$, aceasta este o contradicţie.

q.e.d.

Fie $K\subset X$ închisă şi convexă, $F\subset K$ o submulţime finită, $\widetilde{F}$ închiderea convexă a lui F, şi F_0 subspaţiul finit dimensional generat de F. Observăm că $\widetilde{F}$ este o submulţime finit dimensională a lui K, compactă în topologia indusă de K. Fie i_{F_0} injecţia lui F_0 în X şi $i_{F_0}^*$ proiecţia lui X^* pe F_0^*, duală lui i_{F_0}.

Vom presupune că ori de cîte ori considerăm o submulţime finită F, atunci $0\in F$. Fie $A: F\to 2^{X^*}$; vom nota prin $A_F: \widetilde{F}\to 2^{F_0^*}$ aplicaţia

$$A_F(x) = i_F^*(Ax).$$

Avem :

LEMA 3.2. *Fie X un spaţiu Banach reflexiv, $K\subset X$ închisă şi convexă, $A,B: K\to 2^{X^*}$, astfel încît A să fie monotonă iar B finit continuă, mărginită şi coercivă pe K în raport cu $w_0\in X$.*

Fie $0\in K$, $(0,0)\in G(A)$ şi $F\subset K$ finită; există atunci constantele R_1, R_2 ce nu depind de F şi o soluție $(x_F^0, u_F^0)\in G(B_F)$ a sistemului de inegalităţi :

$$(2)\quad <u_F+u_F^0-i_{F_0}^*(w_0),\ x_F-x_F^0> \geqslant 0,\ \forall (x_F, u_F)\in G(A_F)$$

cu $\|x_F^0\|\leqslant R_1$ şi $u_F^0= i_{F_0}^*(v_F^0)$ pentru un $v_F^0\in B(x_F^0)$ cu $\|v_F^0\|\leqslant R_2$.

Demonstraţie. Din coercivitatea lui B, există $R>0$ astfel încît pentru $\|x\|>R$, $x\in K$ şi $u\in Bx$, să avem :

$$<u,x> - <w_0,x> > 0.$$

Vom lua $R_1=R$. Fie $R_0>R$; avem :

a) prin ipoteză B este mărginit, deci există $M(R_0)>0$ astfel încît pentru orice $x\in K$, cu $\|x\|\leqslant R_0$, să existe $u\in Bx$ cu $\|u\|\leqslant M(R_0)$.

b) Fie $S^*_{M(R_0)}$ sfera închisă de centru O şi rază $M(R)$, în X^*; $\widetilde{F}$ fiind mărginită, putem găsi o constantă $M(F)>M(R_0)$ astfel încît pentru orice $x\in\widetilde{F}$, să existe $u\in Bx$, cu $\|u\|\leqslant M(F)$.

Să definim o nouă aplicaţie $B': K\to 2^{X^*}$:

$$B'(x)=\begin{cases} Bx\cap S^*_{M(R_0)} & \text{pentru } \|x\|<R_0\\ Bx\cap S^*_M(F) & \text{pentru } \|x\|\geqslant R_0.\end{cases}$$

Observăm că din a) şi b) rezultă că pentru orice $x\in\widetilde{F}$, $B'(x)$ este o submulţime nevidă, închisă a lui X şi deci este slab compactă.

În plus B' este superior semicontinuă de la $\widetilde{F}$ în 2^{X^*}, cu topologia slabă pe X^* deoarece B are proprietatea corespunzătoare. Cum $i^*_{F_0}$ este continuă de la X^* cu topologia slabă, în F_0^*, rezultă că pentru orice $x\in F$, $B'_F x$ este o mulţime nevidă convexă şi compactă a lui F_0 deci închisă; în plus B'_F este şi superior semicontinuă.

Cum $G(B'_F)\subset G(B_F)$ e suficient să demonstrăm propoziţia noastră pentru B'_F.

Putem aplica teorema §2.4 capitolul III în care înlocuim pe A prin $-B'_F$, pe X prin F_0, pe X^* prin F_0^* şi pe M prin $G(A_F)-i^*_F(w_0)$. Prin urmare există un punct $(x^0_F, u^0_F)\in G(B'_F)$ cu $u^0_F=i^*_{F_0}(v^0_F)$, $v^0_F\in B'(x^0_F)$ astfel încît pentru orice $(x_F, u_F)\in G(A_F)$ să avem:

$$<u_F + u^0_F - i^*_{F_0}(w_0),\ x_F - x^0_F> \geqslant 0.$$

În particular, deoarece $(0,0)\in G(A)$, putem alege $x_F=u_F=0$ şi obţinem

$$0\leqslant < i^*_{F_0}(v^0_F - w_0),\ - x^0_F> = -< v^0_F - w_0, x^0_F >$$

adică

$$<v^0_F - w_0,\ x^0_F> \leqslant 0.$$

Cum $v^0_F\in B'(x^0_F)\cap B(x^0_F)$, rezultă din coercivitatea lui B că $\|x^0_F\|\leqslant R< R_0$; prin urmare, din definiţia lui $B'(x^0_F)$ rezultă că $v^0_F\in S^*_{M(R_0)}$, deci $\|v^0_F\|\leqslant M(R_0)$.

Vom pune deci $R_2=M(R_0)$ şi atunci inegalităţile cerute sînt toate verificate.

q.e.d.

Demonstraţia propoziţiei 3.1. Pentru orice submulţime finită $E\subset K$, cu $0\in E$, formăm submulţimea $W_E = \bigcup_{E\subset F}(x^0_F, v^0_F)\subset K\times X^*$, unde (x^0_F, v^0_F) este elementul din $K\times X^*$, care satisface concluziile propoziţiei precedente pentru F. Cum X şi X^* sînt reflexive şi familia $\{W_E\}$ are proprietatea intersecţiei finite, putem găsi un punct $(x_0,v_0)\in K\times X^*$ în închiderea slabă a oricărui W_E.

Fie $(x,u)\in G(A)$ și $E=\{0,x_0,x\}$, pentru orice $F\supset E$ $(x,\ i^*_{F_0}\ u)\in G(A_F)$ și atunci avem :

$$0\leqslant\ <i^*_{F_0}\ (u+v^0_F-w_0),\ x-x^0_F>=<u+v^0_F-w,\ x-x^0_F>.$$

Pe de altă parte, B fiind monoton, rezultă că pentru orice $(y,v)\in G(B)$, avem

$$<v-v^0_F,\ y-x^0_F>\ \geqslant 0.$$

Adunînd aceste ultime două inegalități, obținem :

$$0\leqslant <u+v^0_F-w_0,\ x-x^0_F+v-v^0_F,\ y-x^0_F>=$$

$$=\ <u,x-x^0_F>+<v^0_F,\ x-y>+<v,y-x^0_F>-<w_0,x-x^0_F>.$$

Să considerăm funcția $g:\ (S_{R1}\times S^*_{R2})\cap(K\times X^*)$ dată prin :

$$g(\ \xi,\zeta)=<u,x-\xi>+<\zeta,x-y>+<v,y-\xi>-<w_0,x-\xi>.$$

Cum g este continuă în topologia slabă și este nenegativă pentru $(\xi,\zeta)\in W_E$, ea trebuie să fie nenegativă pe închiderea slabă a lui W_E, deci : $g(x_0,v_0)\geqslant 0$, adică :

$$0\leqslant <u,\ x-x_0>+<v_0,\ x-y>+<v,\ y-x_0>-<w,\ x-x_0>$$

$$=\ <u+v_0+w_0,x-x_0>+<v-v_0,y-x_0>.$$

Prin urmare, are loc :

(3) $$<u+v_0-w_0,x-x_0>+<v-v_0,y-x_0>\ \geqslant 0$$

pentru orice $(x,u)\in G(A)$ și $(y,v)\in G(B)$.

Putem presupune fără restrîngere a generalității că A este maximal monotonă ; vom arăta că din (3) rezultă inegalitățile

(4) $$<u+v_0-w_0,x-x_0>\ \geqslant 0,\ \forall(x,u)\in G(A)$$

şi

(5) $$<v-v_0,\ y-x_0> \geqslant 0 \ \forall\ (y,v)\in G(B).$$

Într-adevăr să presupunem că ar exista $(x,u)\in G(A)$ astfel încît $<u+v_0-w_0,\ x-x_0><0$. Atunci alegînd un element de forma $(x_0,\ v)\in G(B)$, obţinem din (3) $<u+v_0-w_0,\ x-x_0>=<u+v_0-w_0,\ x-x_0>+<v-v_0,\ x_0-x_0>\geqslant 0$ ceea ce nu se poate, deci (4) are loc.

Să presupunem că ar exista $(y,v)\in G(B)$ pentru care $<v-v_0,\ y-x_0><0$
Atunci din (3) rezultă că $\forall\ (x,u)\in G(A)$, avem :

(6) $$<u+v_0-w_0,\ x-x_0>>0$$

Cum A este maximal monoton, rezultă că $w_0-v_0\in Ax_0$, adică $(x_0,w_0-v_0)\in G(A)$.

Înlocuim în (6) pe (x,u) prin (x_0,w_0-v_0) şi obţinem

$$0=<w_0-v_0+v_0-w_0,\ x_0-x_0>>0$$

adică o contradicţie, din care rezultă (5).

Pentru a încheia demonstraţia propoziţiei 3.1 trebuie să trecem de la sistemul de inegalităţi (4) şi (5) la sistemul de inegalităţi (1). Fie pentru aceasta $x\in K$ şi $x_t=(1-t)x_0+tx=x_0+t(x-x_0)$, $1\geqslant t>0$; cum $x_0,\ x\in K$, rezultă că $x_t\in K$. Fie $u_t\in B(x_t)$ şi să scriem (5) pentru $(x_t,\ u_t)$; obţinem :

$$t<u_t-v_0,\ x-x_0> \geqslant 0, \quad \text{adică} \quad <u_t-v_0,\ x-x_0> \geqslant 0,$$

B fiind mărginit, există $R_3>0$ astfel încît $\|u_t\|\leqslant R_3,\ \forall t>0$, dacă alegem pe u_t convenabil.

Atunci există un subşir $u_j=u_{t_j}$ astfel încît $u_j \xrightarrow[j]{} u'$ în X^* şi prin urmare :

(7) $$<u'-v_0,\ x-x_0> \geqslant 0.$$

Cum B este finit continuă, rezultă $u'\in B(x_0)$ şi deci pentru orice punct $x-x_0\in K-x_0$, există punctul $u'-v_0\in(Bx_0\cap S^*_{R_3})-v_0$ astfel încît să aibă loc (7). Aplicăm atunci lema 3.1, luînd

$$K_0=Bx_0\cap S^*_{R_3}-v_0, K_1=K-x_0.$$

Există atunci $u_0 \in Bx_0$ astfel încît să avem pentru orice $x-x_0 \in K_1$,

$$<u_0-v_0,\ x-x_0> \geqslant 0,$$

sau

$$<u_0,\ x-x_0> \geqslant <v_0, x-x_0>, \quad \forall x \in K.$$

Revenind la sistemul de inegalități (4) găsim că pentru orice $(x,u) \in G(A)$ avem:

$$<u+u_0-w_0,\ x-x_0> \geqslant <u+v_0-w_0,\ x-x_0> \geqslant 0$$

și deci am găsit elementul $(x_0,u_0) \in G(A)$, soluție a sistemului de inegalități (1).

q.e.d.

Observăm că ipoteza $(0,0) \in G(A)$ poate fi înlăturată înlocuind operatorul A prin A_1 definit astfel:

$$A_1 x = A(x-x_0)+u_0, \text{ unde } (x_0,\ u_0) \in G(A);$$

atunci $(0,0) \in G(A_1)$ și nu ne rămîne decît să modificăm corespunzător condiția de coercivitate; atunci rezultatele pentru A derivă direct din cele obținute astfel pentru A_1.

Următoarea teoremă ne arată cum sistemul de inecuații variaționale 1) ajută la rezolvarea unor ecuații funcționale.

TEOREMA 3.1. *Fie X un spațiu Banach reflexiv $K \subset X$ închisă și convexă iar A și B două aplicații monotone ale lui K în 2^{X^*}, cu B finit continuă, coercivă în raport cu $w_0 \in X^*$ și mărginită, iar A maximal monotonă.*

Atunci există $x_0 \in K$, $u_0 \in Bx_0$ și *$v_0 \in Ax_0$ astfel încît $w_0 = u_0 + v_0$, adică*

$$w_0 \in (A+B)x_0.$$

Demonstrație. Conform propoziției 3.1 există, un element $(x_0,u_0) \in G(B)$, astfel încît pentru orice $(x,u) \in G(A)$ să avem:

$$<u-w_0+u_0,\ x-x_0> \geqslant 0.$$

Cum A este maximal monoton, rezultă că

$$(x_0, w_0 - u_0) \in G(A) \text{ şi atunci } v_0 = w_0 - u_0 \in A x_0.$$

q.e.d.

TEOREMA 3.2. *Fie X un spaţiu Banach reflexiv, $K \subset X$, o mulţime închisă şi convexă, A maximal monoton şi coerciv pe K în raport cu $w_0 \in X^*$.*

Atunci există $x_0 \in K$, astfel încît $w_0 \in A x_0$.

Demonstraţie. Fie un şir $\varepsilon_j \xrightarrow[j]{} 0$; $\varepsilon_j > 0$ şi aplicaţiile $A + \varepsilon_j \mathcal{J}$, unde $\mathcal{J}$ este o aplicaţie de dualitate pe X; $\mathcal{J}$ este finit continuă şi coercivă şi putem lua aplicaţia $\varepsilon_j \mathcal{J}$ în rol de B în teorema 3.1 şi astfel putem găsi pentru orice $j \in N$, un $x_j \in K$ şi $u_j \in \mathcal{J} x_j$, $v_j \in A x_j$, astfel încît :

$$w_0 = \varepsilon_j u_j + v_j .$$

Cum A este coerciv în raport cu w_0, există o constantă $R > 0$, astfel încît pentru $\|x\| > R$ şi orice $u \in Ax$, să avem : $< u - w_0, x >> 0$. Pe de altă parte :

$$< v_j - w_0, x_j > = - \varepsilon_j < u_j, x_j > = - \varepsilon_j \varphi(\|x_j\|) \|x_j\| < 0.$$

Prin urmare $\|x_j\| \leqslant R$ şi cum $\|u_j\| = \varphi(\|x_j\|)$ rezultă :

$$(8) \qquad \|w_0 - v_j\| = \varepsilon_j \|u_j\| = \varepsilon_j \varphi(\|x_j\|) \leqslant \varepsilon_j \varphi(R) \xrightarrow[j]{} 0.$$

Şirul $\{x_j\}_j$ este mărginit iar X reflexiv ; putem presupune deci, trecînd la un subşir că $x_j \xrightarrow[j]{} x_0 \in K$. Cum A este monotonă, pentru $(x,u) \in G(A)$, avem : $< u - v_j, x - x_j > \geqslant 0$.
Dar din (8) rezultă că : $u - v_j \xrightarrow[j]{} u - w_0$ şi este evident că $x - x_j \xrightarrow[j]{} x - x_0$; deci la limită inegalitatea de mai sus devine

$$< u - w_0, x - x_0 \geqslant 0 \qquad \forall (x,u) \in G(A).$$

Cum A este maximal monotonă, rezultă $w_0 \in A x_0$.

q.e.d.

Ca o consecinţă a teoremei precedente obţinem unul din rezultatele de bază al teoriei operatorilor monotoni:

TEOREMA 3.3 *Dacă X este un spaţiu Banach reflexiv iar $A:K\to 2^{X^*}$, K închisă şi convexă, o aplicaţe maximal monotonă coercivă, atunci $R(A)=X^*$.*

Vom aplica această teoremă operatorului T din exemplul II considerat în paragraful precedent.

Dacă presupunem în plus că a_j sînt astfel încît

$$<Tf,f> \geqslant c(\|f\|_{H^{1,p}})\,\|f\|_{H^{1,p}},$$

unde $c(r)$ este o funcţie reală cu $c(r)\xrightarrow[r\to\infty]{}+\infty$, atunci operatorul T este coerciv. Din condiţiile de continuitate impuse coeficienţilor $a_j(x,\zeta)$, rezultă că T este hemicontinuu, şi fiind definit peste tot, el este maximal monoton.

Atunci existenţa soluţiei ecuaţiei $Tf=f_0$ în $H^{1,p}$ este asigurată prin teorema de mai sus.

Referinţe. Rezultatele din acest paragraf aparţin lui Browder. [39]. Presupunerea de reflexivitate în teorema 3.3 este esenţială pentru ca A să fie surjecţie. Fără reflexivitate, se ştie doar că dacă A este subdiferenţială a unei funcţii convexe inferior semicontinuă proprie, atunci $R(A)$ este dens în X [13].

Această proprietate de densitate nu are loc în general, după cum arată un exemplu al lui I.P. Gossez [80]: el construieşte un operator univoc, demicontinuu, monoton de la l^1 în l^∞, coerciv, dar pentru care imaginea nu e densă în l^∞. Tot el a arătat că dacă $D(A)=X$, atunci $R(A)$ este dens în X^*, în X-topologia lui X^*.

§ 4. PROPRIETĂŢI DE CONVEXITATE ALE DOMENIULUI ŞI CODOMENIULUI OPERATORILOR MAXIMALI MONOTONI

Următorul rezultat ne arată faptul că operatorul $(A+\lambda\mathcal{J})^{-1}$ este, într-un sens generalizat, rezolvanta operatorului A.

TEOREMA 4.1. *Fie X un spaţiu Banach reflexiv strict convex, cu X^* strict convex, K o submulţime închisă, convexă a lui X, $A:K\to 2^X$ o aplicaţie maximal monotonă, cu $(0,0)\in G(A)$ şi $\mathcal{J}$ o aplicaţie de dualitate pe X. Atunci pentru $\lambda>0$, $A+\lambda\mathcal{J}$ este maximal monoton şi $R(A+\lambda\mathcal{J})=X^*$; există $(A+\lambda\mathcal{J})^{-1}$ care este continuă de la X^* cu* *topologia tare în X cu topologia slabă iar dacă X are proprietatea (H), atunci această aplicație este continuă în topologiile tare.*

Demonstrație. În condițiile teoremei $\mathfrak{J}$ este univocă și există $\mathfrak{J}^{-1}=\mathfrak{J}^*$ tot univocă.

Faptul că $R(A+\lambda\mathfrak{J})=X^*$ rezultă din teorema 3.1 deoarece $\lambda\mathfrak{J}$ este coercivă pentru orice $\lambda>0$.

Dacă $w\in(A+\lambda\mathfrak{J})(x_1)\cap(A+\lambda\mathfrak{J})(x_2)$, atunci există $u_1\in Ax_1$ și $u_2\in Ax_2$ astfel încît $w=u_1+\lambda\mathfrak{J}x_1=u_2+\lambda\mathfrak{J}x_2$ și prin urmare

$$<u_1-u_2,\ x_1-x_2>+\lambda<\mathfrak{J}x_1-\mathfrak{J}x_2,\ x-x_2>=0.$$

Cum amîndoi termenii sînt pozitivi, rezultă: $<\mathfrak{J}x_1-\mathfrak{J}x_2\ .\ x_1-x_2>=0$, de unde $x_1=x_2$ și deci $(A+\lambda\mathfrak{J})^{-1}$ este o aplicație univocă.

Pentru a arăta că $B=(A+\lambda\mathfrak{J})^{-1}$ are proprietatea de continuitate enunțată, fie $u_j\xrightarrow[j]{}u$ în X^* și $x_j=B\,u_j$; există atunci $v_j\in Ax_j$ astfel încît: $u_j=v_j+\lambda\mathfrak{J}x_j$. Fie $x=Bu$ și $v\in Ax$ astfel încît $u=v+\lambda\mathfrak{J}x$. Atunci

$$(1)\quad <u_j-u,\ x_j-x>=<v_j-v,\ x_j-x>+\lambda<\mathfrak{J}x_j-\mathfrak{J}x,x_j-x>.$$

Dar, din:

$$||u_j||\ ||x_j||\geqslant<u_j,x_j>=<v_j,x_j>+\lambda<\mathfrak{J}x_j,\ x_j>\geqslant\lambda||x_j||\,\varphi(||x_j||)$$

rezultă:

$$\varphi(||x_j||)\leqslant\lambda^{-1}||u_j||\leqslant M_0,\text{ deci }||x_j||\leqslant M_1,$$

cu M_0, M_1 constante pozitive. Atunci:

$$<u_j-u,\ x_j-x>\xrightarrow[j]{}0.$$

Cum cei doi termeni din membrul drept al lui (1) sînt pozitivi, rezultă $<\mathfrak{J}x_j-\mathfrak{J}x,\ x_j-x>\xrightarrow[j]{}0$.

Atunci $x_j\xrightarrow[j]{}x$ conform propoziției 3.7 §3, capitolul II; dacă X are proprietatea (H), rezultă că $x_j\xrightarrow[j]{}x$, de data aceasta conform propoziției 5.1. capitolul II.

Să arătăm acum că $A+\lambda J$ este maximal monoton. Să presupunem prin absurd că ar exista $(x_0,u_0)\in K\times X^*$ astfel încît să avem :

$$(2) \qquad <u+\lambda Jx-u_0,\ x-x_0>\geqslant 0 \quad \forall(x,u)\in G(A).$$

Vom pune pentru orice $t>0$, $u_t=u_0+tv$ cu $v\in X^*$ arbitrar și $x_t=B\,u_t$. Atunci există $v_t\in Ax_t$, astfel încît $u_t=v_t+\lambda Jx_t$.
Înlocuind în (2) pe (x,u) prin (x_t,v_t), obținem :

$$0\leqslant <v_t-u_0,\ x_t-x_0>=t<v,\ Bu_t-x_0>,\ \text{adică}$$

$$<v,\ Bu_t-x_0>\ \geqslant 0.$$

Făcînd pe $t\to 0_+$ și folosind proprietatea de continuitate de mai sus a lui B, găsim

$$<v, Bu_0-x_0>\geqslant 0,\ \forall v\in X^*.$$

Prin urmare $x_0=Bu_0$ și deci $u_0\in(A+\lambda J)x_0$.

q.e.d.

Observația 4.1. Maximal monotonia lui A nu a fost folosită decît pentru a arăta că $R(A+\lambda J)=X^*$ iar acest rezultat are loc fără ipotezele de strict convexitate ale lui X și X^*.

Rezolvanta $(A+\lambda J)^{-1}$ ne ajută să caracterizăm elementele din imaginea lui A, chiar cînd ea nu e univocă.

PROPOZIȚIA 4.1. *Fie X un spațiu Banach reflexiv, A maximal monotonă, $u_0\in X^*$ și $x_\lambda\in(A+\lambda J)^{-1}u_0$, $\lambda>0$; atunci $u_0\in R(A)$ dacă și numai dacă $\{x_\lambda\}_{\lambda>0}$ este mărginit.*

Demonstrație. Prin ipoteză $u_0\in Ax_\lambda+\lambda Jx_\lambda$, adică $u_0-\lambda u_\lambda\in Ax_\lambda$, cu $u_\lambda\in Jx_\lambda$.
Fie $u_0\in R(A)$; există $x\in X$ astfel încît $u_0\in Ax$, cum A este monotonă, are loc :

$$<u_0-(u_0-\lambda u_\lambda),\ x-x_\lambda>\ \geqslant 0$$

adică : $<u_\lambda,\ x-x_\lambda>\ \geqslant 0$. De aici rezultă :

$$\|x_\lambda\|\ \|u_\lambda\|=<u_\lambda,\ x_\lambda>\leqslant<u_\lambda,x>\leqslant\|u_\lambda\|\ \|x\|$$

deci $\|x_\lambda\|\leqslant\|x\|$.

Fie invers $\{x_\lambda\}_{\lambda>0}$ mărginit ; trecînd la un subşir, putem presupune că $x_\lambda \xrightarrow[\lambda]{} x_0$. Cum A este monotonă, avem pentru orice $(y,v)\in G(A)$:

$$<v-(u_0-\lambda u_\lambda),\ y-x_\lambda> \geqslant 0.$$

Făcînd $x\to 0_+$, rezultă :

$$<v-u_0,\ y-x_0> \ \geqslant 0,\ \forall\ (y,v)\in G(A).$$

Maximal monotonia lui A implică $u_0\in Ax_0$.

q.e.d.

Avem următorul criteriu de maximal monotonie :

TEOREMA 4.2. *Fie X un spaţiu Banach reflexiv, $K\subset X$ închisă şi convexă, $A : K\to 2^{X^*}$ monotonă.*

Pentru ca A să fie maximal monotonă este necesar şi suficient ca pentru norma echivalentă pe X în care X şi X^* sînt strict convexe şi pentru aplicaţia de dualitate corespunzătoare să avem $R(A + \mathfrak{J}) = X^*$.

Demonstraţie. Să presupunem că A este maximal monotonă; atunci $R(A+\mathfrak{J})=X^*$ datorită teoremei 3.1.

Pentru a demonstra afirmaţia reciprocă, fie pe X o normă pentru care atît X cît şi X^* să fie strict convexe (teorema 3.3 cap.II). Atunci pentru orice aplicaţie de dualitate corespunzătoare acestei norme $(A+\mathfrak{J})^{-1}$ este univocă şi continuă de la X^* cu topologia tare în X cu topologia slabă, iar dacă $R(A+\mathfrak{J})=X^*$, atunci $A+\mathfrak{J}$ este maximal monotonă, toate aceste afirmaţii rezultînd din observaţia 4.1. Vom arăta că însuşi A este maximal monoton. Într-adevăr, să presupunem că ar exista $(x_0,\ u_0)\in K\times X^*$, astfel încît pentru orice $(x,u)\in G(A)$ să avem $<u_0-u,\ x_0-x>\geqslant 0$. Cum $\mathfrak{J}$ este monotonă, avem: $<\mathfrak{J}x_0-\mathfrak{J}x,\ x_0-x>\geqslant 0$; adunînd aceste inegalităţi, găsim

$$<u_0+\mathfrak{J}x_0-(u+\mathfrak{J}x),\ x_0-x>\geqslant 0\ \ \forall (x,u+\mathfrak{J}x)\in G(A+\mathfrak{J}).$$

Din maximal monotonia lui $A+\mathfrak{J}$ rezultă că $u_0+\mathfrak{J}x_0\in(A+\mathfrak{J})x_0=Ax_0+\mathfrak{J}x_0$, deci $u_0\in Ax_0$.

q.e.d.

Vom studia acum noţiunile şi proprietăţile de convexitate pentru domeniul şi codomeniul unui operator maximal monoton, introduse de T.R. Rockafellar.

DEFINIŢIA 4.1. *Numim simplex, acoperirea convexă a unui număr finit de puncte dintr-un spaţiu Banach.*

Vom nota prin conv$K$ acoperirea convexă a unei submulţimi $K \subset X$, prin $\overline{K}$ — închiderea lui K.

DEFINIŢIA 4.2. *O mulţime $K \subset X$ se numeşte finit convexă (respectiv virtual convexă), dacă pentru orice simplex $C \subset$ conv K (respectiv pentru orice mulţime relativ compactă $C \subset$ conv K) şi pentru orice $\varepsilon > 0$, există o aplicaţie continuă $\varphi_\varepsilon : C \to K$, astfel încît $\|\varphi_\varepsilon(x) - x\| \leq \varepsilon$, $\forall x \in C$.*

PROPOZIŢIA 4.2. *O mulţime $K \subset X$ este finit convexă dacă şi numai dacă ea este virtual convexă.*

Demonstraţie. Evident, orice mulţime virtual convexă este şi finit convexă.

Să presupunem K finit convexă şi fie $C \subset$ conv K o mulţime relativ compactă iar $U = \{x \mid \|x\| < \varepsilon\}$; mulţimea C poate fi acoperită cu un număr finit de translatate ale lui U:

$$\{U + x_i\}_{i=1,\ldots,n_0}, \text{ cu } x_i \in C.$$

Să punem pentru $x \in C$

$$f_i(x) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } x \notin U + x_i \\ 1 - \inf\{r > 0 \mid x - x_i \in r\, U & \text{dacă } x \in U + x_i \end{cases}$$

şi $F(x) = \dfrac{\sum_{i=1}^{n_0} f_i(x)\, x_i}{\sum_{i=1}^{n_0} f_i(x)}$. Fiecare funcţie f_i este nenegativă şi continuă şi deci F este continuă de la C în simplexul $S = \operatorname{conv}\{x_1, \ldots, x_{n_0}\} \subset \subset$ conv K.

În plus, din:

$$F(x) - x = \frac{\sum_{i=1}^{n_0} f_i(x)\,(x_i - x)}{\sum_{i=1}^{n_0} f_i(x)} = x_{i_x} - x \in U,$$

unde i_x este indicele pentru care $x \in U + x_{i_x}$ rezultă $\|F(x) - x\| < \varepsilon$, $\forall x \in C$.
Cum K este finit convexă, există $\varphi : S \to K$ continuă, astfel încît $\|\varphi(x) - x\| < \varepsilon, \forall x \in S$. Fie $\psi = \varphi \circ F : C \to K$; ψ este continuă şi verifică:

$$\|\psi(x) - x\| = \|\varphi(F(x)) - x\| \leqslant \|\varphi(F(x)) - F(x)\| + \|F(x) - x\| \leqslant 2\varepsilon$$

pentru orice $x \in C$ şi demonstraţia e completă.

q.e.d.

Observaţia 4.2. 1). Evident, orice mulţime convexă este virtual convexă (se ia φ egală cu identitatea) dar există mulţimi virtual convexe care nu sînt convexe. Un astfel de exemplu este următorul

$$X = R^2 \text{ şi } K = \{(x_1, x_2)/0 \leqslant x_1 < 1,\ 0 \leqslant x_2 < 1\} \cup \{(0,1),\ (1,1)\}.$$

Într-adevăr, pentru $\varepsilon > 0$, putem defini

$$\varphi_\varepsilon(x_1, x_2) = (x_1, (1 - \varepsilon)\, x_2) \text{ şi avem}$$

$$\|\varphi_\varepsilon(x_1, x_2) - (x_1, x_2)\| = \|(0,\ \varepsilon x_2)\| \leqslant \varepsilon.$$

2). Se ştie că închiderea unei mulţimi virtual convexe este convexă. Într-adevăr, să presupunem K virtual convex şi $x_0, y_0 \in \bar{K}$, $\lambda \in [0,1]$; atunci $\forall\, \varepsilon > 0$, există $x, y \in K$ astfel încît $\|x - x_0\| \leqslant \varepsilon$ şi $\|y - y_0\| \leqslant \varepsilon$. Segmentul $[x, y] \subset \operatorname{conv} K$ şi astfel există $\varphi : [x, y] \to K$, continuă, astfel încît $\|\varphi(z) - z\| \leqslant \varepsilon$, $\forall z \in [x, y]$. Deci pentru

$$z = x + (1 - \lambda)\, y, \text{ notînd prin } u = \varphi(z), \text{ avem:}$$

$$\|u - \lambda x_0 - (1 - \lambda) y_0\| \leqslant \|\lambda x_0 + (1 - \lambda) y_0 - \lambda x - (1 - \lambda) y\| +$$

$$+ \|\lambda x + (1 - \lambda)\, y - u\| \leqslant 2\varepsilon.$$

ε fiind arbitrar, rezultă că $x_0 + (1 - \lambda) y_0 \in \bar{K}$

Observăm că nu a fost necesară continuitatea lui φ.

3) Reciproca proprietății de mai sus nu este adevărată, adică o mulțime a cărei închidere este convexă, nu e necesar virtual convexă.

Un exemplu în acest sens este dat de:

$$X = R, K = [0,1/2\,[\cup]\frac{1}{2}, 1].$$

Într-adevăr, fie $\varepsilon = \frac{1}{4}$; dacă mulțimea K ar fi virtual convexă, ar exista $\varphi : [0,1] \to K$ astfel încît: $|\varphi(x) - x| < \frac{1}{4} \forall x \in K$.

În particular: $|\varphi(0)| \leqslant \frac{1}{4}$, deci $\varphi(0) \in [0, \frac{1}{2}[$; pentru $x = 1$, obținem la fel: $|\varphi(1) - 1| < \frac{1}{4}$ deci $\varphi(1) \in \frac{1}{2}, 1]$. Dar φ fiind continuă, $\varphi([0,1])$ trebuie să fie conexă, deci un interval și atunci $\frac{1}{2}$ trebuie să aparțină lui $\varphi([0,1]) \subset K$, ceea ce nu se poate.

Pe un spațiu Banach reflexiv X există o normă echivalentă pentru care X cît și X^* să aibă proprietatea (H) (teorema 3.5 cap. II). Vom considera în cele ce urmează această normă pe X.

TEOREMA 4.3. *Fie X un spațiu Banach reflexiv și A un operator maximal monoton: $X \to X^*$; atunci $D(A)$ și $R(A)$ sînt virtual convexe.*

Demonstrație. Deoarece $D(A) = R(A^{-1})$ și A^{-1} este maximal monoton: $X^* \to X$, e suficient să demonstrăm că $R(A)$ este virtual convexă, iar după propoziția 4.2 e suficient să arătăm că $R(T)$ este finit convexă. Fie S un simplex din conv(RT); el este conținut într-un simplex de forma:

$$S' = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \mu_i u_i / \mu_i \geqslant 0, \ \sum_{i=1}^{n} \mu_i = 1, \ u_i \in R(A) \right\};$$

Fie $x = (A + \lambda \mathfrak{J})^{-1} u$, unde $\lambda > 0$ iar $u \in S'$; atunci $u = Ax_\lambda + \lambda \mathfrak{J} x_\lambda$. Fie $\varphi(u) = u - \lambda \mathfrak{J} x_\lambda$; după teorema 4.1, funcția φ este univocă, aplică S' în $R(T)$ și este continuă în topologiile normelor. Fie $\varepsilon > 0$;

vom arăta că avem:

$$\|\varphi(u) - u\| \leqslant \varepsilon, \ \forall\, u \in S', \tag{3}$$

de îndată ce λ este suficient de mic.

Pentru $u \in S'$, există $\mu_i \geqslant 0$ cu $\sum_{i=1}^{n} \mu_i = 1$ astfel încît $u = \sum_{i=1}^{n} \mu_i u_i$. Fie $y_{i,\lambda} = (A + \lambda \mathfrak{J})^{-1} u_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$; atunci $u_i = \lambda \mathfrak{J}\, y_{i,\lambda} + A y_{i,\lambda}$.

După propoziţia 4.1, fiecare din şirurile $\{y_{i,\lambda}\}_\lambda$ este mărginit; cum A este monotonă, pentru $i = 1, \ldots, n$, avem:

$$< A y_{i,\lambda} - A x_\lambda, x_\lambda - y_{i,\lambda} > = < (u_i - \lambda \mathfrak{J} y_{i,\lambda}) - (u - \lambda \mathfrak{J}\, x_\lambda), x_\lambda - y_{i,\lambda} > \geqslant 0$$

adică

$$< (1 - \mu_i)\, u_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \mu_i\, u_i - \lambda \mathfrak{J}\, x_\lambda - \lambda \mathfrak{J}\, y_{i,\lambda}, x_\lambda - y_{i,\lambda} > \leqslant 0. \tag{4}$$

Înmulţind inegalitatea din (4) corespunzătoare lui $i = 1$ prin μ_1, cea corespunzătoare lui $i = 2$ prin $\mu_2, \ldots$, şi adunînd, obţinem:

$$\lambda \sum_{i=1}^{n} \mu_1 < \mathfrak{J}\, x_\lambda - \mathfrak{J}\, y_{i,\lambda}, x_\lambda - y_{i,\lambda} > \leqslant M,$$

unde M nu depinde decît de u_i nu şi de λ şi $u \in S'$. De aici rezultă:

$$\lambda \sum_{i=1}^{n} \mu_i (\|x_\lambda\| - \|y_{i,\lambda}\|)^2 \leqslant \lambda \sum_{i=1}^{n} \mu_i < \mathfrak{J}\, x_\lambda - \mathfrak{J}\, y_{i,\lambda}, x_\lambda - y_{i,\lambda} >$$

sau $\lambda \sum_{i=1}^{n} \mu_i (\|x_\lambda\| - M_0)^2 \leqslant M$, adică

$$\sqrt{\lambda}\, \|x_\lambda\| \leqslant \alpha, \ \forall\, x > 0 \tag{5}$$

(unde M_0 este constanta ce majorează şirurile $\{\|y_{i,\lambda}\|\}_\lambda$, α nu depinde de $u \in S'$ şi am presupus aplicaţia de dualitate $\mathfrak{J}$ normalizată).

Rezultă astfel că:

$$\|\varphi(u) - u\| = \|\lambda \mathfrak{J} x_\lambda\| = \sqrt{\lambda}\|\mathfrak{J}(\sqrt{\lambda} x_\lambda)\| = \sqrt{\lambda}\|\sqrt{\lambda}\, x_\lambda\|$$

dorim oricît de mic cînd $\lambda \to 0_+$.

q.e.d.

Observăm că în demonstrația precedentă am folosit proprietatea (H) pentru a obține continuitatea aplicației φ.

Conform observației 4.2. (2), rezultă în acest caz convexitatea mulțimilor $\overline{D(A)}$ și $\overline{R(A)}$, deci:

TEOREMA 4.4. *Fie X un spațiu Banach reflexiv și A un operator maximal monoton: $X \to X^*$; atunci $\overline{D(A)}$ și $\overline{R(A)}$ sînt convexe.*

Încheiem acest paragraf cu cîteva aplicații ale teoriei generale din ultimele două paragrafe la cazul subdiferențialelor de funcții convexe, inferior semicontinue.

TEOREMA 4.5. *Fie X un spațiu Banach reflexiv $O \in K \subset X$, închisă și convexă; atunci pentru orice funcție $f: K \to \bar{R}$, inferior semicontinuă și convexă, ∂f este o aplicație maximal monotonă.*

Demonstrație. După teorema 4.2 e suficient să arătăm că $R(\partial f + \mathfrak{J}) = X^*$, unde $\mathfrak{J}$ este o aplicație de dualitate corespunzătoare unei norme strict convexe pe X, pentru care și X^* este strict convex. Fie $f_0(x) = \frac{1}{2}\|x\|^2$; conform teoremei 1.6 capitolul I, are loc:

$$\partial f + \mathfrak{J} = \partial f + \partial f_0 = \partial(f + f_0).$$

Pentru o funcție convexă g, $O \in \partial g(x)$ dacă și numai dacă g are un minim în x. Astfel $u \in \partial(f + f_0)(x_0)$ dacă și numai dacă $f(x) + f_0(x) - \langle u, x \rangle$ are un minim în x_0.

Notînd prin $f_1(x) = f(x) - \langle u, x \rangle$, observăm că f_1 este o funcție convexă, inferior semicontinuă și totul revine la a arăta că $f_1(x) + f_0(x)$ are un minim în K.

Cum $f_1 + f_0$ este slab inferior semicontinuă, este clar că aceasta se va întîmpla dacă arătăm că

$$f_1(x) + f_0(x) \xrightarrow[\|x\| \to +\infty]{} +\infty \tag{6}$$

(deoarece mulţimile mărginite din X sînt slab relativ compacte şi orice funcţie slab inferior continuă îşi atinge minimul pe ele, propoziţia 1. cap. I).

Să presupunem că (6) nu ar avea loc; există atunci un şir

$\{x_k\}_{k\in N} \subset K$, cu $||x_k|| = t_k \underset{k\to\infty}{\to} \infty$ în timp ce $f_1(x_k) + f_0(x_k) \leqslant M$.

Dar aceasta implică:

$$f_1(x_k) \leqslant M - \frac{1}{2} t_k^2.$$

Fie $y_k = t_k^{-1} x_k$; atunci $||y_k|| = 1$; avem:

$$(7)\quad f_1(x_k) = f_1(t_k^{-1} x_k + (1 - t_k^{-1}) O) \leqslant t_k^{-1} f_1(x_k) + (1 - t_k^{-1}) f_1(O) \leqslant$$
$$\leqslant t_k^{-1} \cdot M - \frac{1}{2} t_k + (1 - t_k^{-1}) f_1(O) \underset{k}{\to} -\infty.$$

Pe de altă parte intersecţia lui K cu sfera unitate este o mulţime slab compactă şi atunci f_1 îşi atinge minimul pe această intersecţie şi aceasta contrazice relaţia (7).

q.e.d.

Folosind maximal monotonia subdiferenţialelor şi rezultatele din paragraful precedent putem deriva rezultate pentru rezolvarea unor inegalităţi variaţionale de forma:

$$< Tx_0 - w_0, x - x_0 > \geqslant f(x_0) - f(x) \quad x \in K,$$

unde x_0 e soluţia căutată iar f este o funcţie convexă inferior semicontinuă. Într-adevăr, are loc:

TEOREMA 4.6. *Fie X reflexiv, $K \subset X$, închisă şi convexă cu $O \in K$ şi f o funcţie convexă, inferior semicontinuă avînd un minim în O. Fie B o aplicaţie finit continuă, mărginită şi coercivă în raport cu $w_0 \in X$.*

Atunci există $x_0 \in K$ şi $u_0 \in B(x_0)$ astfel încît

$$< u_0 - w_0, x - x_0 > \geqslant f(x_0) - f(x) \quad \forall x \in K$$

Demonstrație. După teorema precedentă ∂f este maximal monotonă : $K \to 2^X$ și cum f își are minimul în O, rezultă $O \in (\partial f)(0)$. Inegalitatea de mai sus e echivalentă cu $(w_0 - u_0) \in \partial f(x_0)$ adică cu $w_0 \in (\partial f + B)\, x_0$ și atunci existența lui x_0 e o consecință a teoremei 3.1 în care $A = \partial f$.

q.e.d.

Referințe. Teoremele 4.1 și 4.2 sînt ale lui F. Browder [39], iar pentru cazuri particulare ele au fost demonstrate de Minty [118], Moreau [129], Browder [36]. Noțiunea de virtual convexitate a fost introdusă de R.T. Rockafellar [159] iar cea de finit convexitate de către Halkin [82], echivalența lor a fost demonstrată de I.P. Gossez [78]. Teorema de virtual convexitate este a lui Rockafellar [159], demonstrația însă, a lui Gossez [78]. Teorema 4.5 e tot a lui Rockafellar [39]; ea are loc chiar în spații Banach generale dar pentru simplitate am prezentat cazul spațiilor reflexive. [158].

Tot Rockafellar a dat o condiție necesară și suficientă ca un operator multivoc să fie subdiferențiala unei funcții convexe inferior semicontinue; aceasta este condiția de monotonie ciclică, maximală adică

$$\sum_{k=1}^{n} < u_k, x_k - x_{k-1} > \geqslant 0 \;\forall\, (x_1, \ldots, x_n) \in X \text{ și } \forall\, u_k \in A x_k \;[154], [155].$$

§ 5. GRADUL TOPOLOGIC AL APLICAȚIEI DE DUALITATE

Pentru aplicațiile de la X la X^*, multivoce, sînt considerate următoarele scheme de aproximare proiecțional complete : (scheme de aproximare proiective).

X_n este un șir crescător de subspații finit dimensionale ale lui X, $P_n : X \to X_n$ proiecție astfel încît $P_j P_k = P_j$ dacă $k \geqslant 1$, cu $\| P_n \| = 1$ și $P_n x \underset{n}{\to} x$.

Vom pune $X'_n = R(P^*_n)$ și e ușor de verificat că X'_n este un șir crescător de subspații ale lui X^*, cu dim $X_n =$ dim X'_n (datorită faptului că $P^*_n : X^*_n \to X'_n$ sînt homeomorfisme). Condiția $P^*_n x^* \underset{n}{\to} x^*$ este verificată evident, deci schema noastră va fi $\{X_n, P_n, X'_n, P^*_n\}$. Următorul rezultat ne arată cît de utilă este aplicația de dualitate în teoria gradului topologic pentru aplicaţii A-proprii de la X în X^* — ea joacă un rol asemănător cu identitatea în teoria gradului Laray-Schauder pentru operatori compacţi.

PROPOZIŢIA 5.1. *Dacă X şi X^* au proprietatea (H), atunci aplicaţia de dualitate normalizată este A-proprie. Pentru $r>0$ şi $x^* \in X^*$, cu $\mathfrak{J}_{x^*}(x) = \mathfrak{J}x - x^* \neq 0, \forall x \in S(0, r)$, rezultă că $d[\mathfrak{J}_{x^*}; S(0, r), 0] \neq \{0\}$ pentru $\|x^*\| < r$ şi $d[\mathfrak{J}_{x^*}; S(0, r), 0] = \{0\}$ pentru $\|x^*\| > r$.*

Demonstraţie. Fie $\{x_{n'}\}_{n'} \subset X$, $x_{n'} \in X_{n'}$, cu $P^*_{n'} \mathfrak{J} x_{n'} \xrightarrow[n']{} x^*$ pentru un $x^* \in X$. După corolarul propoziţiei 5.7 capitolul II, $P^*_{n'} \mathfrak{J}x = \mathfrak{J} x, \forall x \in X_{n'}$, şi atunci $\{\|\mathfrak{J}x_{n'}\|\}_{n'} = \{\|P^*_{n'} \mathfrak{J}x_{n'}\|\}_{n'}$ este mărginit, deci $\{\|x_{n'}\|\}_{n'}$ este un şir mărginit. Există atunci un subşir $x_{n''} \xrightarrow[n'']{} x \in X$. Din inegalitatea

$$<\mathfrak{J}x - \mathfrak{J}y, x - y> \geqslant (\varphi(\|x\|) - \varphi(\|y\|))(\|x\| - \|y\|) \quad \forall x, y \in X$$

se obţine :

$$(1) \quad <\mathfrak{J}x - JP_{n''}x, x_{n''} - P_{n''}x> \geqslant [\varphi(\|x_n\|) - \varphi(\|P_{n''}x\|)] (\|x_{n''}\| - \|P_{n''}x\|).$$

Din continuitatea lui $\mathfrak{J}$ în topologiile normei şi din faptul că $x_{n''} - P_{n''}x \xrightarrow[n'']{} 0$, rezultă că membrul stîng în (1) tinde la 0; prin urmare $\|x_{n''}\| \xrightarrow[n'']{} \|x\|$.

Cum X are proprietatea (H) rezultă $x_{n''} \xrightarrow[n'']{} x$. În plus, $\mathfrak{J} x_{n''} \xrightarrow[n'']{} \mathfrak{J}x$ şi din $< P^*_{n''} \mathfrak{J}x_{n''}, x > = < \mathfrak{J} x_{n''}, P_{n''} x >$ rezultă la limită $< x^*, x > = < \mathfrak{J} x, x >$, deci $x^* = \mathfrak{J} x$, ceea ce demonstrează că $\mathfrak{J}$ este A-proprie.

Fie acum $r > 0$ şi $x^* \in X^*$; să definim aplicaţia continuă $\mathfrak{J}_{t,x^*}(x) = \mathfrak{J}(x) - tx^* : \bar{S}(0, r) \times [0,1] \to X^*$.

Atunci pentru orice $t \in [0,1]$ fixat şi $x^* \in X$ cu $\|x^*\| < r$, $\mathfrak{J}_{t,x^*}$ este A-proprie, continuă în t uniform în raport cu $x \in \bar{S}(0, r)$ şi $\mathfrak{J}_{t,x^*}(x) \neq 0$ pentru orice $t \in [0,1]$ şi $x \in \partial \bar{S}(0, r)$. Într-adevăr, ar exista $\|x_0\| = r$ şi $t_0 \in [0,1]$, astfel încît $\mathfrak{J} x_0 - t_0 x^* = 0$, am avea : $\|x_0\| = \|\mathfrak{J} x_0\| = t_0 \|x^*\| < r$, ceea ce nu se poate. Atunci după teorema 3.1 (c) capitolul III, rezultă că d $[\mathfrak{J}_{t,x^*}; S(0, r), 0]$ este bine definit şi este independent de t; prin urmare, cum $\mathfrak{J}_{0,x^*} = \mathfrak{J}$, d $[\mathfrak{J}; S(0, r), 0] = d[\mathfrak{J}_{1,x^*}; S(0, r), 0]$. Dar d $[\mathfrak{J}; S(0, r), 0]$ este impar, deci $\neq \{0\}$ (conform teoremei lui Borsuk, $\mathfrak{J}$ fiind impară); dacă $\|x^*\| > r$, atunci $\mathfrak{J}x \neq x^*$ $\forall\, x \in S(0, r)$, pentru că astfel am avea: $\|\mathfrak{J}x\| = \|x\| = \|x^*\| = r$, ceea ce nu se poate; atunci $d[J_{x^*}; S(0, r), 0]$ este bine definit și egal cu $\{0\}$, deoarece în caz contrar, conform teoremei 3.2 (b) capitolul III ecuația $\mathfrak{J}x = x^*$ ar avea o soluție în $S(0, r)$, ceea ce nu se poate pentru că $\|x^*\| > r$.

q.e.d.

O altă clasă de aplicații de la X în X^* care sînt A proprii sînt cele avînd proprietatea (S) (definiția 5.2 cap. II).

PROPOZIȚIA 5.2. *Fie X reflexiv și $T : D \to X^*$, $D \subset X$ deschisă, o aplicație continuă și mărginită care satisface condiția (S) pe D; atunci T este local A-proprie.*

Demonstrație. Fie $x_0 \in D$; există $S(x_0, r) \subset D$ încît pentru $r_0 < r$, $\bar{S}(x_0, r_0) \subset D$; fie $x_{n'} \in \bar{S}(x_0, r_0) \cap X_{n'}$, astfel încît:

$$P^*_{n'}\, Tx_{n'} \underset{n'}{\to} x^* \qquad x^* \in X. \tag{2}$$

Cum $\|x_{n'}\| \leqslant r_0$ și X este reflexiv, există un subșir $x_{n''} \underset{n''}{\rightharpoonup} x$, $x \in X$. Vom arăta că $x_{n''} \underset{n''}{\to} x$ și $Tx = x^*$. Fie $y \in X_n$, pentru n'' suficient de mare, $x_{n''} - y \in X_{n''}$ și avem

$$|< Tx_{n''} - x^*, x_{n''} - y >| = |< Tx_{n''} - x^*, P_{n''}\, x_{n''} - P_{n''}\, y > =$$

$$= |< P^*_{n''}(Tx_{n''}) - P^*_{n''}(x^*), x_{n''} - y >| \leqslant$$

$$\leqslant \|P^*_{n''}(Tx_{n''}) - P^*_{n''}(x^*)\|\; \|x_{n''} - y\| \underset{n''}{\to} 0$$

deoarece (2) implică evident faptul că:

$$P^*_{n''}(Tx_{n''}) - P^*_{n''}(x^*) \underset{n''}{\to} 0.$$

Prin urmare, cum $< x^*, x_{n''} - y > \underset{n''}{\to} < x^*, x - y > \qquad \forall\, y \in X_{n''}$,

avem

$$< Tx_{n''}, x_{n''} - y > \underset{n''}{\to} < x^*, x - y > \qquad y \in X_{n''}. \tag{3}$$

Dar $y = \lim\limits_{n''} P_{n''}\, y$ şi $P_{n''}\, y \in X_{n''}$ şi deci relaţia (3) are loc pentru orice $y \in X$, ţinînd cont că putem trece la limită cu n'' deoarece $\{\| Tx_{n''}\|\}_{n''}$ este mărginit.

Făcînd atunci în (3) $y = x$, găsim

$$< Tx_{n''}, x_{n''} - y > \underset{n''}{\rightarrow} 0$$

şi prin urmare

$$< Tx_{n''} - Tx, x_{n''} - y > \underset{n''}{\rightarrow} 0.$$

Dar T are proprietatea (S) şi deci $x_{n''} \underset{n''}{\rightarrow} 0$; atunci $Tx_{n''} \underset{n''}{\rightarrow} Tx$ şi

$$P^*_{n''}\, Tx_{n''} - Ty = (P^*_{n''}\, Tx_{n''} - P^*_{n''}\, Tx) + (P^*_{n''}\, Tx - Tx) \underset{n''}{\rightarrow} 0$$

şi atunci (2) implică $Tx = x^*$.

q.e.d.

COROLAR. *Fie $T : D \to X^*$, (D deschis, mărginit) o aplicaţie continuă, mărginită satisfăcînd condiţia (S) pe D; atunci T este A-proprie.*

COROLAR. *Fie $T : D \to X^*$, (D deschis mărginită, X reflexiv) o aplicaţie continuă mărginită astfel încît:*

$$<Tx - Ty, x - y> \geqslant \alpha(\|x - y\|) \qquad \forall\, x, y \in \overline{D},$$

unde $\alpha(r)$ este continuă, crescătoare pe R^+, $\alpha(0) = 0 \alpha(r) > 0$ şi $r_j \to 0$ dacă $\alpha(r_j) \to 0$. Atunci T este A proprie.

Evident, datorită faptului că T are proprietatea (S).

Putea da acum următoarea teoremă de invarianţă de domeniu:

TEOREMA 5.1. *Fie X şi X^* cu proprietatea (H) şi $T : D \to X^*$, D deschisă, o aplicaţie continuă, local monotonă şi local biunivocă satisfăcînd condiţia (S); atunci $T(D)$ este deschisă în X.*

Demonstraţie. După teorema 3.3 capitolul III, este suficient să arătăm că T admite o omotopie solubilă local A-proprie. Fie $x_0 \in D$ şi $\overline{S}(x_0, r) \subset D$ pe care T să fie mărginită şi monotonă; cum monotonia şi condiţia (S) sînt invariante la translaţii, putem presupune că $x_0 = 0$ şi $T(0) = 0$. Fie acum aplicaţia $T_t : \overline{S}(0, r) \times [0,1] \to X^*$, definită prin $T_t\, x = (1 - t)\, Tx + t\, \mathfrak{J}\, x$.

Cum T şi $\mathfrak{J}$ sînt continue şi mărginite pe $\overline{S}(0, r)$, rezultă că $T_t(x)$ este o aplicaţie continuă de la $\overline{S}(0, r) + [0,1] \to X^*$. Observăm că $T_1 = \mathfrak{J}$ care este A-proprie, conform propoziţiei 5.1 iar $T_0 = T$ este A-proprie, conform propoziţiei 5.2. Pentru a demonstra că T_t este A-proprie pentru orice $t \in (0,1)$, vom arăta că T_t satisface condiţia (S) pe $\overline{S}(0, r)$.

Fie deci $x_n \in \bar{S}(0, r)$, $x_n \xrightarrow[n]{} x \in \bar{S}(0, r)$ pentru care

(4) $$< T_t x_n - T_t x, x_n - x > \xrightarrow[n]{} 0, \qquad t \in (0,1).$$

Dar:

$$< T_n x_n - T_n x, x_n - x > = (1 - t) < T x_n - T x, x_n - x > +$$
$$+ t < \mathfrak{J} x_n - x, x_n - x >,$$

unde cei doi termeni din dreapta sînt pozitivi; atunci (4) implică în particular: $< \mathfrak{J} x_n - \mathfrak{J} x, x_n - x > \xrightarrow[n]{} 0$. $\mathfrak{J}$ satisface însă condiția (S) (propoziția 5.1 cap. II) și atunci $x_n \xrightarrow[n]{} x$ ceea ce înseamnă că T_t este A-proprie.

Continuitatea lui T_t în t, uniform pe $\bar{S}(0, \mathrm{r})$, rezultă din faptul că T și $\mathfrak{J}$ sînt mărginite pe $\bar{S}(0, \mathrm{r})$ și din:

$$T_t(x) - T_s(x) = (s - t)(Tx - \mathfrak{J}x), x \in \bar{S}(0, r) \; t, s \in [0,1].$$

Prin urmare e verificată i) din definiția 3.4 capitolul III a omotopiei solubile local A-proprie.

Să arătăm că are loc și ii) din aceeași definiție. Într-adevăr, cum T este biunivocă pe $\bar{S}(0, r)$ și $T(0) = 0$, rezultă că $Tx \neq 0$, $\forall x \in S(0, r)$; atunci $T_t(x) \neq x \; \forall \; x \in \partial S(0, r)$ și $t \in [0,1]$, deoarece dacă am avea $T_{t_0}(x_0) = 0$ pentru un $x_0 \in \partial S(0, \;)$ și $t_0 \in (0, 1)$, ar rezulta:

$$0 = < T_{t_0}(x_0) - T_t(0), x_0 - 0 > = (1 - t_0) < T(x_0) - T(0), x_0 - 0 > +$$
$$+ t_0 < \mathfrak{J} x_0 - \mathfrak{J} 0, x_0 - 0 >.$$

Din monotonia lui T și $\mathfrak{J}$ rezultă de aici, în particular, că:

$$0 = < \mathfrak{J} x_0 - \mathfrak{J} 0, x - 0 > = < \mathfrak{J} x, x > = \| x \|^2$$

ceea ce contrazice faptul că $\| x \| = r$.

Pentru a verifica iii), observăm că $y = T(0) = 0$, $T_1(x) = \mathfrak{J} x \neq 0$, $x \in \partial S(0, r)$ și din propoziția 5.2 avem: $d[T_1; S(0, r), 0] = \mathrm{d}[J; S(0, r), 0]$ este bine definit și diferit de $\{0\}$.

q.e.d.

Referințe. Rezultatele din acest paragraf aparțin lui W.V. Petryshyn [149]. Cu studiul schemelor proiecționale pentru operatori de la X în X^* s-au ocupat T. Browder — W. V. Petryshyn [41] [42], W.V. Petryshyn [145].

CAPITOLUL V

OPERATORI ACRETIVI ÎN SPAŢII BANACH ŞI SEMIGRUPURI DE CONTRACŢII NELINIARE

§ 1. OPERATORI ACRETIVI ŞI MAXIMAL ACRETIVI, PROPRIETĂŢI GENERALE

În cele ce urmează $\mathfrak{J}$ va fi aplicaţia de dualitate normalizată pe X.

DEFINIŢIA 1.1. *Fie X un spaţiu Banach şi $A : X \to 2^X$;*

a) *A se numeşte acretivă dacă pentru orice $x, y \in D(A)$ şi $u \in Ax$, $v \in Ay$, există $x^* \in \mathfrak{J}(x - y)$, astfel încît*

$$<x^*, u - v> \geqslant 0,$$

A se numeşte disipativă dacă $-A$ este acretivă.

b) *A se numeşte maximal acretivă dacă este acretivă iar $G(A)$ este o mulţime maximală în mulţimea graficelor de operatori acretivi.*

c) *A se numeşte hiperacretivă dacă $R(A + I) = X$ iar A este hiperdisipativă dacă $-A$ este hiperacretivă.*

E evident că avem

LEMA 1.1. *Fie A maximal acretiv şi x, $u \in X$ astfel încît pentru orice $y \in D(A)$ şi $v \in Ay$, există $x^* \in \mathfrak{J}(x-y)$, cu $<x^*, u-v> \geqslant 0$; atunci $x \in D(A)$ şi $u \in Ax$.*

Putem defini noţiunea de aplicaţie maximal acretivă pe o mulţime $K \supset D(A)$: *este o aplicaţie acretivă pentru care nu mai există altă aplicaţie acretivă B cu $D(B) = K$* şi $G(A) \subset G(B)$.

PROPOZIŢIA 1.1. *Aplicaţia* $A : X \to 2^X$ *este acretivă dacă şi numai dacă pentru orice* $\lambda > 0$, *are loc*

$$(1) \qquad \| x - y + \lambda (u - v) \| \geqslant \| x - y \|$$

$$\forall\ x, y \in D(A) \text{ şi } u \in Ax,\ v \in Ay.$$

Demonstraţie. Propoziţia este o consecinţă a propoziţiei 3.3 capitolul I în care se ia $x - y$ în rol de x şi $u - v$ în rol de y.

q.e.d.

Din (1) rezultă că pentru $x \neq y$, $(I + \lambda A)x \cap (I + \lambda A)\, y = \emptyset$, deci are loc:

COROLAR. *A este o aplicaţie acretivă dacă şi numai dacă pentru orice* $\lambda > 0$, $(I + \lambda A)^{-1}$ *este o aplicaţie univocă şi contractivă de la* $R(I + \lambda A)$ *în* X, *adică*:

$$\| (I + \lambda A)^{-1} u - (I + \lambda A)^{-1} v \| \leqslant \| u - v \|.$$

Vom nota prin $Q_\lambda = (I + \lambda A)^{-1}$.

PROPOZIŢIA 1.2. *Dacă* $A : X \to 2^X$ *este hiperactivă, atunci* $R(I + \lambda A) = X$ *pentru orice* $\lambda > 0$.

Demonstraţie. Fie $y_0 \in X$ şi $\frac{1}{2} < \lambda < \infty$; existenţa unui $x_0 \in D(A)$ astfel încît $y_0 \in (I + \lambda A)x_0$ este echivalentă cu existenţa unui x_0 astfel încît:

$$x_0 = (I + A)^{-1}\left(\frac{y_0}{\lambda} - \frac{1 - \lambda}{\lambda} x_0 \right).$$

Aplicaţia $Py_0\,(x) = (I + A)^{-1}\left(\frac{y_0}{\lambda} - \frac{1 - \lambda}{\lambda} x \right)$ este prin ipoteză definită pe întreg X şi verifică.

$$\| P_{y_0}\, x - P_{y_0}\, y \| = \| (I + A)^{-1} \left(\frac{y_0}{\lambda} - \frac{1 - \lambda}{\lambda} x \right) - (I + A)^{-1}$$

$$\left(\frac{y_0}{\lambda} - \frac{1 - \lambda_y}{\lambda} \right) \| \leqslant \frac{\| 1 - \lambda \|}{\lambda} \| x - y \| < \| x - y \|.$$

Atunci P_{y_0} are un punct fix, x_0 care este tocmai punctul căutat.

Să luăm acum $\frac{1}{2} < \lambda_1 < 1$ și aplicînd cele de mai sus operatorului $\lambda_1 A$, rezultă că $R(I + \lambda A) = X$ pentru $\frac{\lambda_1}{2} < \lambda$, unde $\frac{\lambda_1}{2} < \frac{1}{2}$; deci continuînd în acest mod se găsește că proprietatea are loc și pentru $0 < \lambda \leqslant \frac{1}{2}$.

TEOREMA 1.1. *Fie X și X^* uniform convexe și $A : X \to 2^X$ o aplicație hiperacretivă; atunci $\overline{D(A)}$ este convexă.*

Demonstrație. Fie $y, z \in D(A)$ și $x = \mu y + (1 - \mu)z$ cu $\mu \in (0,1)$; să presupunem că $x \notin \overline{D(A)}$.

Fie $y_\lambda \in (I + \lambda A)y$, $\lambda > 0$; atunci $Q_\lambda y_\lambda = y$ și deci

$$\|Q_\lambda x - y\| = \|Q_\lambda x - Q_\lambda y_\lambda\| \leqslant \|x - y_\lambda\| \text{ de unde:}$$

$\overline{\lim\limits_{\lambda \to 0+}} \|Q_\lambda x - y\| \leqslant \|x - y\|$. Analog se obține:

$\overline{\lim\limits_{\to +0}} \|Q_\lambda x - z\| \leqslant \|x - z\|$. Dar are loc:

$$\|y - z\| \leqslant \|y - Q_\lambda x\| + \|Q_\lambda x - z\| \text{ și deci}$$

$$\|y - z\| \leqslant \underline{\lim\limits_{\lambda \to 0+}} (\|y - Q_\lambda x\| + \|Q_\lambda x - z\|) \leqslant$$

$$\leqslant \overline{\lim\limits_{\lambda \to 0+}} (\|y - Q_\lambda x\| + \|Q_\lambda x - z\|) \leqslant$$

$$\leqslant \|y - x\| + \|x - z\| = \mu\|y - z\| + (1 - \mu)\|y - z\| =$$

$$= \|y - z\|.$$

Aceasta înseamnă că:

$$\lim_{\lambda \to 0+} (\|y - Q_\lambda x\| + \|Q_\lambda x - z\|) = \|y - z\| \text{ și} \tag{2}$$

$$\lim_{\lambda \to 0+} \|y - Q_\lambda x\| = \|x - y\|. \tag{3}$$

Propoziția 2.4. capitolul II implică faptul că există

$$\lim_{\lambda \to 0+} Q_\lambda x = \nu y + (1 - \nu) z = x', \text{ cu } \nu \in (0,1). \tag{4}$$

Din (3) și (4) rezultă: $\|x - y\| = \|x' - y\|$, de unde $\nu = \mu$ și deci $x = x'$. Prin urmare $\lim\limits_{\lambda \to 0+} Q_\lambda x = x$ ceea ce contrazice presupunerea că $x \notin \overline{D(A)}$ deoarece, hiperactivitatea lui A implică faptul că $Q_\lambda x \in D(A)$, $\forall x \in X$, $\lambda > 0$.

q.e.d.

PROPOZIȚIA 1.3. *Dacă $A : X \to 2^X$ este hiperacretivă atunci ea este maximal acretivă.*

Demonstrație. Fie $A_1 \supset A$, A_1 acretiv și $u \in A_1 x$; cum A este hiperacretiv, există $(I + A)^{-1} (x + u) = y \in D(A)$.

Dar aceasta înseamnă că există $v \in Ay$ astfel încît $x + u = y + v$, adică $y - x = u - v$. Atunci (1) implică: $\|x - y\| = 0$ și deci $x = y \in D(A)$, adică $u = v$; așadar $A_1 x \subset Ax$.

q.e.d.

PROPOZIȚIA 1.4. *Fie X^* strict convex; dacă A este maximal acretivă pe $D(A)$, atunci mulțimea Ax este închisă și convexă, $\forall x \in D(A)$.*

Demonstrație. Fie $x \in D(A)$ și $u_1, u_2 \in Ax$; pentru orice $y \in D(A)$ și $v \in Ay$, avem:

$$< \mathfrak{J}(x - y), u_1 - v > \geqslant 0 \text{ și } < \mathfrak{J}(x - y), \quad u_2 - v > \geqslant 0, \tag{5}$$

Atunci, dacă $u = \lambda u_1 + (1 - \lambda) u_2$, avem, înmulțind prima inegalitate din (5) prin λ a doua prin $(1 - \lambda)$ și sumînd: $< \mathfrak{J}(x \cdot y), u - v > \geqslant 0$.

Maximal acretivitatea lui A pe $D(A)$, implică faptul că $u \in Ax$. Să arătăm că Ax este închisă: fie $u_n \in Ax$ cu $u_n \underset{n}{\to} u$; avem $< \mathfrak{J}(x - y), u_n - v > \geqslant 0$ $\forall n \in N$ și la limită găsim:

$$< \mathfrak{J}(x - y), u - v > \geqslant 0, \ \forall y \in D(A) \text{ și } v \in Ay.$$

Aceasta înseamnă însă că $u \in Ax$.

q.e.d.

DEFINIȚIA 1.3. *Un operator univoc $A : X \to X$ se numește f-maximal acretiv dacă este acretiv și nu are nici o extensie univocă acretivă.*

Evident, un operator univoc maximal acretiv este și f-maximal acretiv, dar invers nu avem decît:

PROPOZIȚIA 1.5. *Fie X și X^* uniform convexe; o aplicație $A : X \to X$, hemicontinuă și f-maximal acretivă este maximal acretivă dacă*

i) *$D(A)$ este deschisă*

sau dacă

ii) *$D(A)$ este convexă și densă în X*

Demonstrație. i) Să presupunem că există $(x_0, u_0) \in X \times X$ astfel încît aplicația $A_1 x = Ax$ pentru $x \in D(A)$ și $A_1 x_0 = u_0$ să fie acretivă; cum A este f-maximal acretivă, $x_0 \in D(A)$ care fiind deschisă, implică faptul că și $x_t = x_0 - t(Ax_0 - u_0) \in D(A)$, $t > 0$ (pentru t suficient de mic). Atunci:

$$<\mathfrak{J}(x_t - x_0), Ax_t - y_0> = t <\mathfrak{J}(u_0 - Ax_0), Ax_t - u_0> \geqslant 0.$$

Facem acum $t \to 0_+$ și datorită hemicontinuității lui A, găsim

$$<\mathfrak{J}(u_0 - Ax_0), Ax_0 - u_0> = -\|Ax_0 - u_0\|^2 \geqslant 0$$

și deci $Ax_0 = u_0$.

ii) Fie A_1 la fel definit și $x_0 \in D(A)$; atunci $x_t = ty + (1 - t)x_0 \in D(A)$. $\forall y \in D(A)$ și avem $<\mathfrak{J}(x_t - x_0), Ax_t - u_0> = t<\mathfrak{J}(y - x_0), Ax_t - u_0>$, deci $<\mathfrak{J}(u_0 - x_0), Ax_t - u_0> \geqslant 0$. Facem $t \to 0_+$ și găsim: $<\mathfrak{J}(u_0 - x_0), Ax_0 - u_0> \geqslant 0$ $\forall y \in D(A)$. Dar $D(A)$ este dens în X și $\mathfrak{J}$ este continuă în topologiile normelor și atunci rezultă că $<\mathfrak{J} z, Ax_0 - u_0> \geqslant 0$ $\forall z \in X$ și deci $Ax_0 = u_0$, dacă luăm $z = u_0 - Ax_0$.

q.e.d.

PROPOZIȚIA 1.6. *Fie X și X^* uniform convexe și $A : X \to X$ liniară acretivă, neavînd nici o extensie liniară acretivă; atunci A este f-maximal acretivă iar dacă $D(A)$ este dens în X, atunci A este maximal acretivă.*

Demonstrație. Să presupunem că A nu ar fi f-maximal acretivă, adică că ar exista $x \notin D(A)$ și $u \in X$, astfel încît $<J(x - y)$,

$u - Ay > \geqslant 0 \quad \forall y \in D(A)$. Definim operatorul A_1, extensie liniară proprie a lui A la subspaţiul generat de $D(A) \cup \{x\}$, prin :

$$A'(y + tx) = Ay + tu, \qquad \forall y \in D(A).$$

Se verifică că A' astfel definit este acretiv, deci o contradicţie. Ultima afirmaţie rezultă din propoziţia precedentă.

q.e.d.

PROPOZIŢIA 1.7. *Fie X^* uniform convex şi $A : X \to 2^X$ o aplicaţie maximal acretivă (resp maximal acretivă pe $D(A)$; atunci dacă pentru $x_n \in D(A)$ cu $x_n \xrightarrow[n]{} x_0 \in X$ (resp. $\in D(A)$) există $u_n \in Ax_n$ cu $u_n \xrightarrow[n]{} u_0$, rezultă $(x_0, u_0) \in G(A)$.*

Demonstraţie. Fie $x_n \in D(A)$, $x_n \xrightarrow[n]{} x_0$ şi $u_n \in Ax_n$ cu $u_n \xrightarrow[n]{} u_0$; atunci avem :

$$< \mathfrak{J}(x_n - y), \quad u_n - v > \geqslant 0, \qquad \forall y \in D(A) \text{ şi } v \in Ay.$$

Aplicaţia de dualitate fiind în acest caz uniform continuă, pe mulţimile mărginite din X, rezultă prin trecere la limită : $< \mathfrak{J}\ (x_0 - y),\ u_0 - v > \geqslant 0$. Atunci lema 1.1 implică faptul că $(x_0, u_0) \in G\ (A)$.

q.e.d.

DEFINIŢIA 1.4. *O aplicaţie $A : X \to 2^X$ se numeşte demiînchisă dacă pentru $x_n \in D(A)$, cu $x_n \to x_0$ şi $u_n \in Ax_n$, cu $u_n \xrightarrow[n]{} u_0$, rezultă $(x_0, u_0) \in G\ (A)$.*

Atunci din propoziţia 1.7 rezultă :

COROLAR. *Dacă X^* este uniform convex, orice aplicaţie $A : X \to 2^X$ maximal acretivă este demiînchsiă.*

TEOREMA 1.2. *Fie X^* uniform convex şi $A : X \to X$ o aplicaţie univocă, acretivă, cu $D(A)$ deschis; atunci A este demicontinuă dacă şi numai dacă este hemicontinuă.*

Demonstraţie. Se aplică teorema 1.1 capitolul IV în care se ia $Y = X^*$ şi $F = \mathfrak{J}$.

q.e.d.

Şi în cazul aplicaţiilor multivoce se pot face consideraţii asemănătoare.

PROPOZIȚIA 1.8. *Fie X^* uniform convex și $A : X \to 2^X$ o aplicație acretivă cu $D(A)$ deschis; A este local mărginită dacă și numai dacă este local hemimărginită.*

Demonstrație. Afirmația rezultă din faptul că o aplicație este local mărginită (respectiv local hemimărginită) dacă și numai dacă orice secțiune a ei are aceeași proprietate, iar pentru secțiuni se aplică propoziția 1.1 capitolul IV.

q.e.d.

PROPOZIȚIA 1.9. *Fie X uniform convex și $A : X \to 2^X$ o aplicație maximal acretivă pe $D(A)$; dacă A este local mărginită atunci A este superior-demicontinuă.*

Demonstrație. Cum proprietatea lui A de a fi superior demicontinuă este o proprietate locală și A este local mărginit, putem presupune că A este mărginit pe întreg $D(A)$, deci că $A(X)$ este o submulțime mărginită a lui X. X fiind reflexiv, există o submulțime K slab compactă a lui X, astfel încît $A(X) \subset K$.

Fie $x_0 \in D(A)$ și să presupunem că A nu ar fi superior demicontinuă în x_0; atunci ar exista o vecinătate V a lui Ax_0, în topologia slabă și două șiruri $\{x_n\} \subset D(A)$, $x_n \xrightarrow[n]{} x_0$, și $u_n \in Ax_n$ astfel încît $u_n \notin V$; deci $u_n \in K/V$ și trecînd la un subșir putem presupune că u_n converge slab către un element $u_0 \in X \setminus V$. Dar aceasta este în contradicție cu propoziția 1.7 care afirmă că $u_0 \in Ax$.

q.e.d.

Următoarele două teoreme sînt analoagele teoremelor 2.3 și 2.4. de la operatori monotoni.

TEOREMA 1.3. *Fie X^* uniform convex și $A : X \to 2^X$ o aplicație acretivă superior hemicontinuă, cu $D(A)$ deschis, pentru care Ax este o mulțime închisă și convexă, $\forall x$; atunci A este maximal acretivă pe $D(A)$.*

Demonstrație. Să presupunem că ar exista $x_0 \in D(A)$ și $u_0 \in X$ astfel încît:

6) $$< J(x - x_0),\ u - u_0 > \geqslant 0 \quad \forall\, (x, u) \in G(A$$

și că $u_0 \notin Ax_0$. Cum Ax_0 este închisă și convexă, există $y^* \in X^*$ astfel încît:

(7) $$< y^*, u_0 > > \sup_{u \in Ax_0} < y^*, u >$$

iar $\mathfrak{J}$ fiind o surjecţie, există $y \in X$ cu $\mathfrak{J}\ y = y^*$; atunci (7) devine:

$$<\mathfrak{J}\, y, u_0>\ >\ <\mathfrak{J}\, y, u> \qquad \forall\, u \in Ax_0.$$

Fie $t \in (0,1)$ şi $x_t = x_0 + ty$; atunci $x_t \in D(A)$ dacă t este suficient de mic. Fie V vecinătatea lui Ax_0, în topologia slabă a lui X, dată de

$$V = \{u \in X / <\mathfrak{J}\, y, \quad u - u_0> < 0\}.$$

Cum A este superior hemicontinuă, rezultă că pentru t suficient de mic, $u_t = Ax_t \in V$. Atunci din (6) rezultă

$$0 \leqslant <\mathfrak{J}\,(x_t - x_0), \quad u_t - u_0> = t <\mathfrak{J}\, y, \quad u_t - u_0> < 0$$

ceea ce este o contradicţie.

q.e.d.

COROLAR. *Fie X^* uniform convex şi $A: X \to X$ o aplicaţie univocă, acretivă, definită pe întreg X, hemicontinuă; atunci A este maximal acretivă.*

TEOREMA 1.4. *Fie X^* uniform convex şi $A: X \to 2^X$ o aplicaţie acretivă cu $D(A)$ deschis şi Ax mulţime închisă şi convexă $\forall\, x \in D(A)$; atunci A este superior demicontinuă dacă şi numai dacă A este superior hemicontinuă.*

Demonstraţie. Una din implicaţii este evidentă.

Fie A superior hemimărginită; după teorema precedentă rezultă că A este maximal acretivă pe $D(A)$ şi atunci propoziţia 1.9 implică faptul că A este superior demicontinuă.

q.e.d.

Încheiem aceste consideraţii cu cîteva exemple de operatori acretivi.

Exemplul 1. Orice operator monoton într-un spaţiu Hilbert este acreativ.

Exemplul 2. Fie $A: X \to 2^X$ o aplicaţie acretivă şi fie operatorul $\mathcal{A}$ definit în $Y = L^p([0,1]); X)$ astfel: $G(\mathcal{A}) = \{(f, g)/(f(t), g(t)) \in G(A),\ \text{ap.t.}\}$.

$\mathcal{A}$ este acretiv; într-adevăr, dacă $(f, g) \in G(\mathcal{A})$ și $(f', g') \in G(\mathcal{A})$ și $\lambda > 0$, atunci:

$$||f(t) - f'(t) + \lambda[g(t) - g'(t)]|| \geqslant ||f(t) - f'(t)|| \quad \text{a.p.t.}$$

deci

$$\left(\int_0^1 ||f(t) - f'(t) + \lambda\,(g\,(t) - g(t)||^p \,\mathrm{d}t\right)^{1/p} \geqslant$$

$$\geqslant \left(\int_0^1 ||f(t) - f'(t)||^p \,\mathrm{d}t\right)^{1/p}$$

adică

$$||f - f' + \lambda\,(g - g')||_Y \geqslant ||\,f - f^1||_Y.$$

Referințe. Operatorii acretivi au fost introduși de F. Browder [29] [31]—[34] și F. Browder — G. de Figueiredo [40] sub denumirea de operatori $\mathfrak{J}$ -monotoni și studiați apoi și de T. Kato [97] (aceasta folosește denumirea de m-acretivitate pentru hiperacretivitate). Noțiunile de maximal acreativitate și de hiperacreativitate coincid doar în spații Hilbert după cum se va arăta ulterior. Un exemplu care infirmă acest lucru în spații mai generale este dat de Crandall — Liggett [53].

Rezultatele din acest paragraf sînt din [39] [50] [97]. Teorema 1.1 a fost dată prima dată de Minty în spații finit dimensionale [117] și de Komura [101] în spații Hilbert. Un exemplu interesant e dat în [39].

§ 2. RESTRICȚIA CANONICĂ

Fie $A : X \to 2^X$ o aplicație acretivă, $Q_\lambda = (I + \lambda A)^{-1}$, $\lambda > 0$ și $A_\lambda = \lambda^{-1}\,(I - Q_\lambda)$. Vom nota și $|K| = \inf\limits_{x \in K} ||x||$, $D_\lambda = D(A_\lambda) = R\,(I + \lambda A)$.

PROPOZIŢIA 2.1. a) $\|Q_\lambda x - Q_\lambda y\| \leqslant \|x - y\|$, $\forall\ x, y \in D_\lambda$;

b) $\|A_\lambda x - A_\lambda y\| \leqslant 2\lambda^{-1}\|x - y\|$, $\forall\ x, y \in D_\lambda$;

c) A_λ *este un operator acretiv*;

d) $A_\lambda x \in AQ_\lambda x$ *şi* $|AQ_\lambda x| \leqslant \|A_\lambda x\|$, $x \in D_\lambda$ *şi dacă* $x \in D(A) \cap D_\lambda$, *atunci*:

$|AQ_\lambda x| \leqslant \|A_\lambda x\| < |Ax|$;

e) $\lim\limits_{\lambda \searrow 0+} Q_\lambda x = x$, $\forall\ x \in \bigcap\limits_{\lambda > 0} (D(A) \cap D_\lambda)$.

Demonstraţie. a) rezultă din definiţia acretivităţii iar pentru b) avem:

$$\|A_\lambda x - A_\lambda y\| = \lambda^{-1}\|(x - y) + (Q_\lambda x - Q_\lambda y)\| \leqslant 2\lambda^{-1}\|x - y\|.$$

c) Fie $x, y \in Y$ şi $x^* \in \mathfrak{J}(x - y)$; atunci:

$$<x^*, A_\lambda x - A_\lambda y> = \lambda^{-1}<x^*, x - y> - \lambda^{-1}<x^*, Q_\lambda x - Q_\lambda y>$$

$$\geqslant \lambda^{-1}\|x - y\|^2 - \lambda^{-1}\|Q_\lambda x - Q_\lambda y\| \ \|x^*\| \geqslant$$

$$\geqslant \lambda^{-1}\|x - y\|^2 - \lambda^{-1}\|x - y\|^2 = 0.$$

d) Fie $Q_\lambda x = y$; atunci $x = y + \lambda v$ cu $v \in Ay$ şi deci $A_\lambda x = \lambda^{-1}(y + \lambda v - y) = v$, de unde rezultă că: $A_\lambda x \in A\,y = AQ_\lambda x$ şi evident $|AQ_\lambda x| \leqslant \|A_\lambda x\|$.

Dacă $x \in D(A) \cap D_\lambda$, atunci $x = Q_\lambda(x + \lambda y)$, pentru orice $y \in Ax$ şi deci $\|A_\lambda x\| = \lambda^{-1}\|x - Q_\lambda x\| = \lambda^{-1}\|Q_\lambda(x + \lambda y) - Q_\lambda y\| \leqslant \lambda^{-1}\|x + \lambda y - x\| = y$ de unde rezultă că $\|A_\lambda x\| \leqslant |Ax|$.

e) $\|Q_\lambda x - x\| = \lambda\|A_\lambda x\| \leqslant \lambda|Ax| \xrightarrow[\lambda \to 0]{} 0.$

q.e.d.

DEFINIŢIA 2.1. *Se numeşte restricţie canonică a unei aplicaţii* $A : X \to 2^X$, *aplicaţia* $A^\circ : X \to 2^X$ *definită prin*

$$A^\circ x = \{u \in X / u \in Ax, \|u\| = |Ax|\}.$$

PROPOZIȚIA 2.2. *Fie X și X^* strict convex iar A o aplicație maximal acretivă pe $D(A)$; atunci restricția canonică A^0 a lui A este univocă. Dacă X este reflexiv, atunci $D(A^0) = D(A)$.*

Demonstrație. După propoziția 1.4, Ax este o mulțime închisă și convexă, $\forall\, x \in D(A)$; atunci, după propoziția 3.1, cap. II $\inf\limits_{u \in Ax} \|u\|$ este atins în cel mult un punct, deci A^0 este univocă; dacă X este reflexiv, acest infim este atins pentru orice $x \in D(A)$ și deci $D(A) = D(A^0)$.

q.e.d.

PROPOZIȚIA 2.3. *Fie X și X^* uniform convexe și A o aplicație maximal acretivă pe $D(A)$, $x_0, x_\lambda \in D(A)$ cu $\lim\limits_{\lambda \to 0+} x_\lambda = x_0$. Dacă $y_\lambda \in Ax_\lambda$ și*

(1) $$\overline{\lim_{\lambda \to 0+}} \|y_\lambda\| \leqslant \|A^0 x\|$$

atunci

$$\lim_{\lambda \to 0+} y_\lambda = A^0 x_0.$$

Demonstrație. Fie $\lambda_n \to 0$; vom arăta că șirul $\{y_{\lambda_n}\}_n$ conține un subșir convergent la $A^0 x$ și din acest fapt rezultă evident afirmația.

Rezultă din (1) că există un subșir $\{y_{\lambda_k}\}_k \subset \{y_{\lambda_n}\}_n$ astfel încît $y_{\lambda_k} \underset{k}{\rightharpoonup} y_0$. Propoziția 1.7 din paragraful precedent implică faptul că $y_0 \in A\, x_0$ și deci $\|y_0\| \geqslant \|A^0 x_0\|$. Dar avem și

$$\|y_0\| \leqslant \underline{\lim_{k}} \|y_{\lambda_k}\| \leqslant \overline{\lim_{k}} \|y_{\lambda k}\| \leqslant \|A^0 x_0\|$$

deci $\|y_0\| = \|A^0 x_0\|$ și din definiția lui A^0 rezultă $y_0 = A^0 x_0$.

q.e.d.

TEOREMA 2.1. *Fie X, X^* uniform convexe și $A : X \to 2^X$ un operator hiperacretiv; avem:*

a) $\|A_\lambda\, x\| \leqslant \|A^\circ x\|$ și $\lim\limits_{\lambda \to 0+} A_\lambda\, x = A^\circ x$

pentru orice $x \in D(A)$.

b) *Dacă $\lim\limits_{\lambda \to 0+} x_\lambda = x_0$ și mulțimea $\{A_\lambda x_\lambda\}_\lambda$ este mărginită, atunci*

$x_0 \in D(A)$; *dacă în plus*

$$A_\lambda x_\lambda \underset{\lambda}{\rightharpoonup} y_0, \text{ atunci } y_0 \in Ax_0$$

c) $\lim\limits_{\lambda \to 0+} A^0 J_\lambda x_\lambda = A^0 x$, *pentru orice* $x \in D(A)$.

Demonstraţie. a) Fie $x_\lambda = Q_\lambda x$ şi $y_\lambda = A_\lambda x$; atunci $y_\lambda \in Ax_\lambda$ iar $\lim\limits_{\lambda \to 0+} x_\lambda = x$, după cum rezultă din propoziţia 2.1. În plus, avem şi

$$\| y_\lambda \| = \| A_\lambda x \| \leqslant |Ax| = \| A^0 x \|,$$

şi atunci a) rezultă din propoziţia precedentă.

b) Fie $y_\lambda = Q_\lambda x_\lambda$; atunci $y_\lambda \in D(A)$ şi din:

$$\lim_{\lambda \to 0+} (x_\lambda - y_\lambda) = \lim_{\lambda \to 0+} \lambda A_\lambda x_\lambda = 0$$

rezultă că $\lim\limits_{\lambda \to 0+} y_\lambda = x_0$. Şirul $\{A_\lambda x_\lambda\}_\lambda$ conţine un subşir slab convergent şi cum $A_\lambda x_\lambda \in A\, Q_\lambda x_\lambda = Ay_\lambda$, propoziţia 1.7 implică: $x_0 \in D(A)$. Aceeaşi proprietate de demiînchidere din propoziţia 1.7 implică faptul că $y_0 \in Ax_0$ dacă $A_\lambda x_\lambda \underset{\lambda}{\rightharpoonup} y_0$.

Observăm că la acest punct ajunge doar condiţia ca X^* să fie uniform convex.

c) Din $\| A^0 Q_\lambda x \| \leqslant \| A_\lambda x \| \leqslant \| A^0 x \|$

notînd cu $x_\lambda = Q_\lambda x$ şi $y_\lambda = A^0 Q_\lambda x \in Ax_\lambda$, rezultă cu propoziţia precedentă că $\lim\limits_{\lambda \to 0+} A^0 Q_\lambda x = A^0 x$.

q.e.d.

TEOREMA 2.2. *Fie X şi X^* uniform convexe iar $A = X \to 2^X$ o aplicaţie hiperacretivă; avem:*

i) *funcţia* $\lambda \to \| A_\lambda x \|$ *este descrescătoare în* $\lambda > 0$, *oricare ar fi* $x \in X$.

ii) *funcţia* $\lambda \to A_\lambda x$ *este Lipschitz continuă pe* $[\delta, +\infty)$ *pentru orice* $\delta > 0$

iii) *funcţia* $\lambda \to \| x - Q_\lambda x \|$ *este diferenţiabilă a.p.t. pentru* $\lambda > 0$ *şi*

$$\frac{d}{d\lambda} \| x - Q_\lambda x \| \leqslant \| A^0 Q_\lambda x \| \quad \text{a.p.t. } \lambda > 0.$$

Demonstrație. i) Pentru $\lambda > 0$, $x = Q_\lambda x + \lambda A_\lambda x$, $\forall\ x \in X$ şi punînd $x(\lambda) = Q_\lambda x$ şi $y(\lambda) = A_\lambda x$, rezultă $y(\lambda) \in Ax(\lambda)$ şi deci:

$$(2)\qquad < \mathfrak{J}\,(x(\lambda') - x(\lambda)), y(\lambda) - y(\lambda') > =$$

$$= < \mathfrak{J}(\lambda y(\lambda) - \lambda' y(\lambda')), y(\lambda) - y(\lambda') > \leqslant 0$$

deci

$$\|\lambda y(\lambda) - \lambda' y(\lambda')\|^2 = < \mathfrak{J}\,(\lambda y)(\lambda) - \lambda' y(\lambda')), \lambda y(\lambda) - \lambda' y(\lambda')) > \leqslant$$
$$\leqslant (\lambda - \lambda') < \mathfrak{J}\,(\lambda y(\lambda) - \lambda' y)), y(\lambda') > \leqslant$$
$$\leqslant |\lambda - \lambda'|\ \|y(\lambda')\|\ \|\lambda y(\lambda) - \lambda' y(\lambda')\|$$

care implică :

$$(3)\qquad \|\lambda y(\lambda) - \lambda' y(\lambda')\| \leqslant |\lambda - \lambda'|\ \|y(\lambda')\|.$$

Atunci, dacă $\lambda > \lambda'$

$$\lambda \|y(\lambda)\| \leqslant \|\lambda y(\lambda) - \lambda' y(\lambda')\| + \lambda' \|y(\lambda')\| \leqslant$$
$$\leqslant (\lambda - \lambda')\|y(\lambda')\| + \lambda' \|y(\lambda')\| = \lambda \|y(\lambda')\|$$

deci $\|y(\lambda)\| \leqslant \|y(\lambda')\|$.

ii) Folosind (3), găsim pentru $\delta \leqslant \lambda' \leqslant \lambda < +\infty$

$$\|(\lambda + \lambda')\,[(y(\lambda) - y(\lambda')] + (\lambda - \lambda')\,[y(\lambda) - y(\lambda')]\,\| \leqslant$$
$$\leqslant 2(\lambda - \lambda')\ \|y(\lambda')\|$$

şi deci

$$\|y(\lambda) - y(\lambda')\| \leqslant \frac{\lambda - \lambda'}{\lambda + \lambda'}\,(\|y(\lambda)\| + \|y(\lambda')\| +$$

$$+ 2\|y(\lambda')\|) \leqslant \frac{\lambda - \lambda'}{2\delta}\ \|y(\delta)\|$$

ceea ce ne arată că ii) are loc.

Dar atunci X fiind reflexiv, din teorema 3.8 capitolul II rezultă că funcţia $y(\lambda) = A_\lambda x$ este a.p.t. diferenţiabilă. Dacă dividem (2) prin $(\lambda - \lambda')^2$ se face $\lambda' \to \lambda$, găsim prin multiplicare prin $\lambda > 0$:

$$< \mathfrak{J}\left(\frac{\lambda\, dy(\lambda)}{d\lambda} + y(\lambda)\right), \lambda\frac{dy(\lambda)}{d\lambda} > \leqslant 0 \quad \text{a.p.t.} \quad \text{pentru} \lambda > 0.$$

Dar $A^0 x(\lambda) \in Ax(\lambda)$ şi de aceea din (2) obţinem

$$(4) \qquad < \mathfrak{J}(\lambda' y(\lambda') - \lambda y(\lambda), A^0 x(\lambda) - y(\lambda) > \leqslant 0$$

ceea ce împărţit prin $\lambda - \lambda'$, cu $\lambda' < \lambda$ (respectiv $\lambda' > \lambda$) şi făcînd $\lambda' \to \lambda$ ne dă:

$$< \mathfrak{J}\left(\lambda\frac{dy(\lambda)}{d\lambda} + y(\lambda)\right), A^0 x(\lambda) - y(\lambda) > \leqslant 0 \text{ (resp.} \geqslant 0)$$

şi deci

$$< \mathfrak{J}\left(\lambda\frac{dy(\lambda)}{d\lambda} + y(\lambda)\right), A^0 x(\lambda) - y(\lambda) > 0 \quad \text{a.p.t.} \quad \lambda > 0$$

Avem deci

$$\|A^0 x(\lambda)\| \; \left\|\lambda\frac{dy(\lambda)}{d\lambda} + y(\lambda)\right\| \geqslant < \mathfrak{J}\left(\lambda\frac{dy(\lambda)}{dy} + y(\lambda), \; A^0 x(\lambda) >= \right.$$

$$= < \mathfrak{J}\left(\lambda\frac{dy(\lambda)}{d\lambda} + y(\lambda)\right), y(\lambda) > \geqslant < \mathfrak{J}\left(\lambda\frac{dy(\lambda)}{dy} + y(\lambda)\right), y(\lambda) +$$

$$+ \lambda\frac{dy(\lambda)}{dy} > = \left\| y(\lambda) + \lambda\frac{dy(\lambda)}{d\lambda}\right\|^2 \text{ a.p.t.}$$

Prin urmare, om obţinut

$$\left\| y(\lambda) + \lambda\frac{dy(\lambda)}{d\lambda}\right\| \leqslant \|A^0 x(\lambda)\| \quad \text{sau}$$

$$\frac{d}{d\lambda}\|\lambda y(\lambda)\| \leqslant \left\|\frac{d}{d\lambda}(\lambda y(\lambda))\right\| \leqslant \|A^0 x(\lambda)\| \quad \text{a.p.t.} \quad \lambda > 0$$

şi cum $\lambda y(\lambda) = x - Q_\lambda x$, demonstraţia este încheiată.

q.e.d.

COROLAR *Fie* $x \in D(A)$; *dacă în condițiile teoremei precedente există* $M > 0$ și $0 < p < 1$, *astfel încît*

$$\| A^0 Q_\lambda x \| \leqslant M \| A_\lambda x \|^p, \qquad \lambda > 0$$

atunci $x \in D(A)$.

Demonstrație. După teorema de mai sus, avem :

$$\frac{d}{d\lambda} \| \lambda A_\lambda x \| = \frac{d}{d\lambda} \| x - Q_\lambda x \| \leqslant M \| A_\lambda x \|^p \quad \text{a.p.t.} \quad \lambda > 0$$

și atunci, pentru $\lambda > \lambda' > 0$, rezultă :

$$M \int_{\lambda'}^{\lambda} \tau^{-p} d\tau \geqslant \int_{\lambda'}^{\lambda} \| \tau A \; x \|^{-p} \frac{d}{d\tau} \| \tau A_\tau x \| d\tau$$

sau

$$M (\lambda^{1-p} - \lambda'^{1-p}) \geqslant \| \lambda A_\lambda x \|^{1-p} - \| \lambda' A_{\lambda'} x \|^{1-p}.$$

Cînd $\lambda' \to 0_+$ observînd că $\| \lambda' A_{\lambda'} x \| = \| x - Q_\lambda x \| \to 0$, găsim $\| \lambda A_\lambda x \|^{1-p} \leqslant M \lambda^{1-p}$ deci $\| A_\lambda x \|^{1-p} \leqslant M$ și de aici, utilizînd teorema 2.1. rezultă că $x \in D(A)$.

q.e.d.

Vom arăta în continuare că restricția canonică determină în anumite cazuri în mod unic un operator acretiv.

TEOREMA 2.3. *Fie* X, X^* *uniform convexe,* $A : X \to 2^X$ *o aplicație hiperacretivă și* $B : X \to 2^X$ *o aplicație acretivă; atunci*

a) *dacă* $B \supseteq A^0$, *atunci* $Bx \subseteq Ax$, $x \in D(A)$

b) *dacă* B *este maximal acretiv și* $B \supseteq A^0$, *atunci* $B^0 \supseteq A^0$

c) *dacă* B *este maximal acretiv și* $B^0 = A^0$; atunci $B = A$.

Demonstrație. a) Fie $x_0 \in D(A)$ și $y_0 \in Bx_0$, adică $< \mathfrak{J} (x - x_0) A^0 x - y_0 > \geqslant 0$, $\forall x \in D(A)$; vom arăta că de aici rezultă $y_0 \in Ax_0$. Fie aplicația $A_1 : X \to 2^X$ definită prin $A_1 x = Ax - y_0$; A_1 este hiperacretivă, după cum se verifică imediat.

Avem : $x_0 = Q_{1\lambda} x_0 + \lambda A_{1\lambda} x_0$ și $A_{1\lambda} x_0 = A_1 Q_{1\lambda} x_0$ sau : $A_{1\lambda} x_0 + y_0 \in A \, Q_{1\lambda} x_0$. Fie $x_\lambda = Q_{1\lambda} x_0$, și $y_\lambda = A_{1\lambda} x_0 + y_0$; atunci

$x_0 = x_\lambda + \lambda(y_\lambda - y_0)$ cu $y_\lambda \in Ax_\lambda$. Conform teoremei 2.1 (a), avem :

$$\lim_{\lambda \to 0+} (y_\lambda - y_0) = \lim_{\lambda \to 0+} A_{1\lambda} x_0 = A_1^0 x_0.$$

Atunci $\{y_\lambda\}_{\lambda > 0}$ este mărginit și deci și șirul $\{A^0 x_\lambda\}_\lambda$ este mărginit. Cum X este reflexiv, există un element $y_1 \in X$, astfel încît $A^0 x_{\lambda'} \underset{\lambda'}{\rightharpoonup} y_1$, $\{x_{\lambda'}\}_{\lambda'}$ fiind un subșir al lui $\{x_\lambda\}_\lambda$,
Cum A este demiînchis, rezultă $y_1 \in Ax_0$ și deci $y_1 - y_0 \in A_1 x_0$; avem și

$< \mathfrak{J}(x_{\lambda'} - x_0), A_{\lambda'}^0 - y_0 > = < \mathfrak{J}[-\lambda'(y - y_0)], A^0 x_{\lambda'} - y_0 > \geqslant 0$
și deci $< \mathfrak{J}(y_0 - y_{\lambda'}), y_0 - A^0 x_{\lambda'} > \leqslant 0$ și la limită cînd $\lambda' \to 0$, obținem

$$< \mathfrak{J}(-A_1^0 x_0), y_0 - y_1 > \leqslant 0.$$

Atunci propoziția 1.4, capitolul II implică, datorită faptului că $y_0 - y_1 \in -A_1 x_0$; $\|A_1^0 x_0\|^2 \leqslant < \mathfrak{J}(-A_1^0 x_0), y_0 - y_1 > \leqslant 0 \Rightarrow A_1^0 x = 0 \Rightarrow 0 \in A_1 \cdot x_0 = (A - y_0) x_0$, adică $y_0 \in Ax_0$.

b) Fie $B \supseteq A^0$ o aplicație maximal acretivă; dacă $x \in D(A)$ și $y \in Bx$, din a) rezultă $y \in Ax$ și deci $\|A^0 x\| \leqslant \|y\|$. Dar $A^0 x \in Bx$ și fiind elementul de normă minimă din Bx, rezultă $VB^0 x = A^0 x$.

c) Fie B maximal acretiv și $B^0 = A^0$; atunci $D(A) = D(B)$ și cum $B \supseteq B^0 = A^0$, rezultă din a) că $Bx \leqslant Ax$, deci $B \leqslant A$. Din maximalitatea lui B, rezultă $B = A$.

q.e.d.

Dacă notăm pentru submulțimea $K \supset D(A)$, prin $\mathcal{S}[A; K]$ mulțimea tuturor aplicațiilor maximal acretive pe K, extinzînd pe A, atunci rezultă imediat din b) și c) :

Corolar. *Dacă X și X^* sînt uniform convexe iar A este o aplicație hiperacretivă, atunci* :

$$\mathcal{S}[A^0, D(A)] = \{A\}.$$

Referințe. Cu studiul operatorilor acretivi și maximal acretivi și anume de probleme legate de aproximarea lor prin operatori lipschitzieni precum și de determinarea lor prin restricția canonică s-au ocupat T. Kato [97], M. Brézis — M. Crandall — A. Pazy [20] M. Brezis — A. Pazy [21] M. Crandall — A. Pazy [49]. Rezultatele din acest paragraf pot fi găsite în [49] și [50].

§ 3. SEMIGRUPURI DE CONTRACȚII NELINIARE ÎN SPAȚII BANACH UNIFORM CONVEXE CU DUALUL UNIFORM CONVEX

DEFINIȚIA 3.1. *Fie X un spațiu Banach și $C \subset X$; un semigrup de contracții neliniare pe C este o funcție*

$S : [0, +\infty) \times C \to C$ cu proprietățile:

i) $S_{t+s}(x) = S_t(S_s(x)) \quad \forall t, s \geqslant 0, \quad x \in C$

ii) $\| S_t(x) - S_t(y) \| \leqslant \| x - y \| \quad \forall t \geqslant 0, \quad x, y \in C$

iii) $S_0(x) = x$.

TEOREMA 3.1. *Fie S un semigrup de contracții pe $C \subset X$, $x_0 \in C$; dacă funcția $t \to S_t x_0$ este tare măsurabilă pentru $t \in (0, \infty)$ atunci ea este normic continuă pe* $(0, +\infty)$.

Demonstrație. Pentru $t, s > 0$, avem:

$$\text{(1)} \qquad \| S_{t+s}(x) - x \| = \| S_t(S_s(x)) - S_t(x) - S_t(x) - x \| \leqslant$$

$$\leqslant \| S_t(S_s(x)) - S_t(x) \| + \| S_t(x) - x \| \leqslant \| S_s(x) - x \| +$$

$$+ \| S_t(x) - x \| .$$

Astfel funcția $f(t) = \| S_t(x) - x \|$ este subaditivă pe $(0, +\infty)$ și deci este mărginită pe submulțimile compacte din $(0, +\infty)$ [84].

Atunci există $\int_a^b S_\eta(x_0)\, \mathrm{d}\eta$ pentru $0 < a \leqslant b < +\infty$.

Fie $t > 0$ și α, β astfel ca $0 < \alpha < \beta < t$; atunci pentru δ suficient de mic, avem:

$$(\beta - \alpha) S_t(x_0) = \int_\alpha^\beta S_t(x_0)\, \mathrm{d}\eta = \int_\alpha^\beta S_\eta[S_{t-\eta}(x_0)]\, \mathrm{d}\eta,$$

de unde

$$(\beta - \alpha) \| S_{t+\delta}(x_0) - S_t(x_0) \| \leqslant \int_\alpha^\beta \| S_\eta[S_{t+\delta-\eta}(x_0)] -$$

$$- S_\eta[S_{t-\eta}(x_0)] \| \mathrm{d}\eta \leqslant \int_\alpha^\beta \| S_{t+\delta-\eta}(x_0) - S_{t-\eta}(x_0) \| \mathrm{d}\eta$$

Cum $S_t(x_0)$ este tare integrabilă ca funcţie de t, rezultă că membrul al doilea în inegalitatea de mai sus tinde la zero cînd $\delta\to 0$, de unde continuitatea este astfel evidentă.

q.e.d.

DEFINIŢIA 3.2. *Un semigrup S pe $C\subset X$ se numeşte tare (respectiv slab) continuu, dacă pentru orice $x\in C$, $S_t(x)$ este o funcţie tare (respectiv slab) continuă la dreapta în $t=0$.*

Observaţia 3.1. Proprietăţile (i) şi (ii), implică continuitatea la dreapta în orice $t\in[0,+\infty)$, pentru funcţia $S_t(x)$, dacă ea are loc în $t=0$; într-adevăr avem :

$$\|S_{t+\delta}(x)-S_t(x)\|=\|S_t([S_\delta(x)-x]\|\leqslant\|S_\delta(x)-x\|$$

În ceea ce priveşte legătura între continuitatea tare şi cea slabă, avem :

TEOREMA 3.2. *Dacă X este un spaţiu Banach uniform convex iar C este o submulţime închisă şi convexă a lui X, atunci un semigrup de contracţii slab continuu pe C este tare continuu.*

Demonstraţie. Dacă $\{S_t\}$ este slab continuu pentru $t\geqslant 0$, atunci funcţia $t\to S_t(x)$ este slab măsurabilă, $\forall\, x\in C$; conform unei teoreme a lui Pettis [84], [182], atunci ea este şi tare măsurabilă şi astfel afirmaţia rezultă pentru $t>0$. Să studiem comportarea acestei funcţii în $t=0$.

Fie pentru aceasta $C_0=\{x\in C\mid \lim\limits_{t\to 0+} S_t x=x\}$; vom arăta că $C_0=C$. Avem

$$C_0\supset C_1=\{y\,|\,y=S_\tau(x),\ \tau\to 0,\ x\in C\}.$$

Cum prin ipoteză $S_\tau(x)\xrightarrow[\tau]{} x$, închiderea în topologia slabă a lui C_1 conţine pe C; demonstraţia este completă dacă arătăm că C_0 este o mulţime închisă şi convexă (în acest caz va fi închisă atît în topologia tare cît şi în cea slabă). Fie $x_n\xrightarrow[n]{} x_0$, $x_n\in C_0$. Atunci $\|S_t(x_n)-$ $-S_t(x_0)\|\leqslant\|x_n-x_0\|$ şi astfel $S_t(x_0)$ este continuă în $t=0$ ca limită uniformă a funcţiilor $S_t(x_n)$ care sînt continue în $t=0$; deci C_0 este închisă;

Să arătăm că C_0 este convexă; fie $x_i\in C_i$ $i=1,2$ cu $\lim\limits_{t\to 0+} S\,(x_i)=$ $=x_i$ şi fie $y=\alpha x_1+(1-\alpha)\,x_2$ $0<\alpha<1$.

Atunci :

$$\|S_t(x_1) - S_t(x_2)\| \leqslant \|S_t(x_1) - S_t(y)\| + \|S_t(y) - S_t(x_2)\| \leqslant$$

$$\leqslant \|x_1 - y\| + \|x_2 - y\| = (1 - \alpha)\|x_1 - x_2\| + \alpha\|x_1 - x_2\| =$$

$$= \|x_1 - x_2 = \|x_1 - x_2\|.$$

Trecînd la limită cu $t \to 0_+$, găsim :

$$\lim_{t\to 0_+} (\|S_t(x_1) - S_t(y)\| + \|S_t(y) - S_t(x_2)\|) = \|x_1 - x_2\|$$

şi deci :

(2) $$\lim_{t\to 0_+} \|S_t(x_i) - S_t(y)\| = \|x_i - y\| \quad i = 1,2.$$

Dar funcţia $t \to S_t(x_i) - S_t(y)$ este slab continuă în $t = 0$ şi prin urmare :

(3) $$S_t(x_i) - S_t(y) \underset{t\to 0_+}{\rightharpoonup} x_i - y \quad i = 1,\ 2,$$

X fiind uniform convex, din (2) şi (3) rezultă :

$$\lim_{t\to 0_+} (S_t(x_i) - S_t(y)) = x_i - y \quad i = 1,\ 2, \quad \text{adică}$$

$$\lim_{t\to 0_+} S_t(y) = y.$$

q.e.d.

În cele ce urmează vom considera numai semigrupuri tare continui.

LEMA 3.1. *Fie S un semigrup de contracţii neliniare pe $C \subset X$ şi $x_0 \in C$ astfel încît :*

$$\lim_{t\to 0_+} \left\| \frac{S_t(x_0) - x_0}{t} \right\| = L < +\infty.$$

Atunci :

a) $$\| S_{t+\delta}(x_0) - S_t(x_0) \| \leqslant \delta L, \forall t, \ \delta \geqslant 0$$

b) $$f(t) = \lim_{h \to 0_+} \frac{\| S_{t+h}(x_0) - S_t(x_0) \|}{h}$$

există pentru $t \geqslant 0$, *este o funcție descrescătoare și* $f(t) \leqslant L$.

Demonstrație. a) E suficient să arătăm că dacă

$$t_h \searrow 0, \ L_1 < +\infty \text{ și}$$

(4) $$\| S_{t_k}(x_0) - x_0 \| \leqslant L_1 t_k, \quad k \in N$$

atunci

$$\| S_{t+\delta}(x_0) - S_t(x_0) \| \leqslant \delta L_1.$$

Dacă r_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ și τ sînt numere nenegative, avem :

(5) $$\| S_{\tau + \sum_{i=1}^{n} r_i}(x) - x \| \leqslant \| S_\tau(x) - x \| + \sum_{i=1}^{n} \| S_{r_i}(x) - x \|$$

din cauza subaditivității dată prin (1).

Pentru orice $k \in N$, fie n_k astfel încît : $0 < \delta - n_k t_k < t_k$; atunci luînd în (4) și (5) $\tau = \delta - n_k t_k$ și $r_i = t_r$, $i = 1, \ldots, n_k$, obținem :

(6) $$\| S_\delta(x_0) - x_0 \| = \| S_{\delta - n_k t_k + n_k t_k}(x_0) - x_0 \| \leqslant$$

$$\leqslant \| S_{\delta - n_k t_k}(x_0) - x_0 \| + \sum_{1}^{n} \| S_{t_k}(x_0) - x_0 \| \leqslant \| S_{\delta - n_k t_k}(x_0) - x_0 \| +$$

$$+ L_1 n_k t_k \leqslant \| S_{\delta - n_k t_k}(x_0) - x_0 \| + L_1 \delta.$$

Cum $0 \leqslant \delta - n_k t_k < t_k \xrightarrow[k]{} 0$, membrul drept în (6) tinde către $L_1 \delta$ cînd $k \to +\infty$ și atunci (4) rezultă din inegalitatea

$$\| S_{t+\delta}(x_0) - S_t(x_0) \| < \| S_\delta(x_0) - x_0 \|$$

b) Din a) rezultă :

$$L = \lim_{t \to 0_+} \frac{\| S_t(x_0) - x_0 \|}{t} \leqslant \overline{\lim_{t \to 0_+}} \frac{\| S_t(x_0) - x_0 \|}{t} \leqslant L$$

şi deci există $\lim\limits_{t \to 0_+} \dfrac{\| S_t(x_0) - x_0 \|}{t}$.

Din :

$$\frac{\| S_{t+h}(x_0) - S_t(x_0) \|}{h} \leqslant L, \text{ rezultă}$$

$$\lim_{h \to 0_+} \frac{\| S_h(S_t(x_0)) - S_t(x_0) \|}{h} \leqslant L$$

şi atunci a) aplicată în punctul $S_t(x_0)$, implică existenţa lui $f(t) = \lim\limits_{h \to 0_+} \dfrac{\| S_{t+h}(x_0) - S_t(x_0) \|}{h}$.

Fie $t_1 < t_2$; avem:

$$f(t_2) = \lim_{h \to 0_+} \frac{\| S_{t_2+h}(x_0) - S_{t_2}(x_0) \|}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0_+} \frac{\| S_{t_2-t_1}(S_{t_2+h}(x_0)) - S_{t_2-t_1}(S_{t_1}(x_0)) \|}{h} \leqslant$$

$$\leqslant \lim_{h \to 0_+} \frac{\| S_{t_2+h}(x_0) - S_{t_1}(x_0) \|}{h} = f(t_1).$$

q.e.d.

DEFINIȚIA 3.3. *Fie S un semigrup pe $C \subset X$; pentru orice $h > 0$, se definește aplicația*

$$A^h x = \frac{S_h(x) - x}{h} \qquad x \in C.$$

Fie $D(A_s) = \{ x \in C \mid \exists \lim\limits_{h\to 0+} A^h x\}$ *şi* $A_s x = \lim\limits_{h\to 0+} A^h x$

şi $D(A_w) = \{x \in C \mid \exists\ w\text{-}\lim\limits_{h\to 0+} A^h x\}$ *şi* $A_w x = w\text{-}\lim\limits_{h\to 0+} A^h x$

(unde w-lim *este notaţie pentru limita în topologia slabă).* A_s *se numeşte generatorul infinitezimal tare iar* A_w *— generatorul infinitezimal slab al semigrupului* S.

Observaţia 3.2. Evident $A_s \subset A_w$. În cazul semigrupurilor de operatori liniari se ştie că A_s şi A_w coincid şi că $\overline{D(A_s)} = X$. În cazul neliniar $A_s \neq A_w$ iar următorul exemplu al lui G. Webb ne arată că $\overline{D(A_s)} \neq X$, chiar pentru semigrupuri definite pe tot spaţiul.

Fie $C\,[0,1]$ spaţiul Banach al funcţiilor reale continue pe $[0,1]$ şi

$$F(x) = \begin{cases} x & \text{pentru } x > 0 \\ 2x & \text{pentru } x \leqslant 0 \end{cases}$$

şi $S_t(f)(x) = F(t + F^{-1}(f(x)))\ \ 0 \leqslant x \leqslant 1,\ \ f \in C\,[0,1]$.
S_t astfel definit este un semigrup pe $C\,[0,1]$; dacă A_s este generatorul său tare, se poate observa că $D(A_s)$ conţine în mod necesar numai funcţiile care nu schimbă semnul pe $[0,1]$ şi deci $D(A_s)$ nu poate fi dens în $C\,[0,1]$.

Proprietatea de bază a generatorilor de semigrupuri de contracţie neliniare este dată de:

TEOREMA 3.3. *Operatorii* $(-A_s)$ *şi* $(-A_w)$ *sînt acretivi.*

Demonstraţie. Fie $x^* \in \mathfrak{J}(x - y)$, $x, y \in D(A)$; avem

$$< x^*, A^h x - A^h y > = < x^*, \frac{S_h(x) - S_h(y)}{h} > - < x^*, \frac{x - y}{h} > \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{h}\left(\|x - y\|\,\|S_h(x) - S_h(y)\| - \|x - y\|^2\right) \leqslant 0$$

deci $< x^*, A_w x - A_w y > \leqslant 0$, deci $-A_w$ este acretiv. Cum $A_s \subset A$, rezultă că şi $-A_s$ este acretiv.

q.e.d.

Fie $D = \left\{ x / \lim\limits_{h\to 0_+} \dfrac{\| S_t(x) - x \|}{h} < +\infty \right\}$.

Evident, au loc : $D(A_s) \subset D(A_w) \subset D$.

PROPOZIȚIA 3.1. *Dacă X este reflexiv, atunci :*

$$\overline{D(A)_s} = \overline{D(A_w)} = \overline{D}.$$

Demonstrație. Fie $x \in D$; conform lemei 2.1, funcția $t \to S_t(x)$ este Lipschitz-continuă pe $(0, +\infty)$, deci ea este, după teorema 3.8 capitolul II, aproape peste tot diferențiabilă pe $(0, +\infty)$; aceasta înseamnă că $S_t(x) \in D(A_s)$ a.p.t. pe $(0, \infty)$ și luînd un șir $t_n \to 0$ pentru care aceasta este adevărat, rezultă că $x \in \overline{D(A_s)}$.

q.e.d.

Egalitate între A_s și A_w avem doar în cazul :

TEOREMA 3.4 *Fie X și X^* uniform convexe ; atunci $A_s = A_w$.*

Demonstrație. Fie $x_0 \in D$ și X_0 mulțimea tuturor punctelor limită în topologia slabă ale lui $\left\{ \dfrac{S_h(x_0) - x_0}{h} \right\}_{h\to 0}$; fie aplicația A_1 cu $D(A_1) = D(A_s) \cup \{x_0\}$ și $A_1 x = A_s x$ pentru $x \in D(A_s)$ iar $A_1 x_0 = X_0$. Evident A_1 este disipativ. Fie $\tilde{A}$ o extensie maximal disipativă a lui A_1. Cum X este reflexiv iar $t \to S_t(x_0)$ este Lipschitz continuă, ea este a.p.t. diferențiabilă pe $(0, +\infty)$ și

$$\frac{\mathrm{d}\, S_t(x_0)}{\mathrm{d}t} - A_s\, S_t(x_0) \in \tilde{A} S_t\,(x_0) \quad \text{a.p.t.}$$

Cum $-\tilde{A}$ este acretiv, avem :

$< x^*, \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(S_t(x_0) - x_0) > \leqslant < x^*, y >$ a.p.t. pe $(0, \infty)$ pentru orice $y \in \tilde{A} x_0$, iar $x^* = \mathfrak{J}\,(S_t(x_0) - x_0)$.

Atunci regula de derivare din propoziția 3.2 capitolul I ne permite să scriem :

$$\| S_t\,(x_0) - x_0 \| \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \| S_t\,(x_0) - x_0 \| = < x^*, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(S_t\,(x_0) - x_0) > \leqslant$$

$$\leqslant \| y \| \, \| S_t\,(x_0) - x_0 \| \quad \text{a.p.t.} \quad t > 0 \text{ și } y \in \tilde{A} x_0.$$

Prin urmare :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\|S_t(x_0) - x_0\| - \|y\|) \leqslant 0$$

deci

(7) $\|S_t(x_0) - x_0\| \leqslant t\|y\|$ pentru orice $t \geqslant 0$ şi $y \in \tilde{A}x_0$.

Aceasta înseamnă însă că : $\|S_t(x_0) - x_0\| \leqslant t\| \tilde{A}^\circ x_0\|$ şi deci $X_0 \subset \tilde{A}^0 x_0$, care nu are decît un singur element şi prin urmare $x_0 \in D(A_w)$ şi $\tilde{A}_w x_0 = A^\circ x_0$. Din faptul că X este uniform convex şi din

$$\frac{S_t(x_0) - x_0}{t} \underset{t\to 0+}{\rightharpoonup} A_w x_0 \text{ şi } \frac{\|S_t(x_0) - x_0\|}{t} \leqslant \|A_w x_0\|.$$

Rezultă faptul că $\lim\limits_{t\to 0+} \frac{S_t(x_0) - x_0}{t} = A_w x_0$, deci $x_0 \in D(A_s)$. A rezultat şi faptul că $D(A_s) = D(A_w) = D$.

q.e.d.

Corolar. *Dacă X şi X^* sînt uniform convexe şi S un semigrup de contracţii neliniare pe C, atunci pentru orice $B \supseteq A_s$, B disipativ, avem $D(A_s) = D(B) \cap \overline{D(A_s)}$ iar dacă B este maximal disipativ, $A_s x = B^0 x$, $\forall x \in D(A_s)$.*

Demonstraţie. Fie $x_0 \in D(B) \cap \overline{D(A_s)}$; vom arăta că $x_0 \in D$. Într-adevăr, urmărind prima parte a demonstraţiei (cu B cu rol de A_1) găsim că (7) are loc şi pentru acest x_0, adică

$$\|S_t(x_0) - x_0\| \leqslant t\|y\| \quad \forall t \geqslant 0 \text{ şi } y \in Bx_0$$

de unde afirmaţia.

q.e.d.

Observaţia 3.3. O consecinţă este faptul că dacă S este un semigrup pe X cu $\overline{D(A_s)} = X$, atunci oricare ar fi $B \supseteq A_s$, B disipativ, rezultă $D(B) = D(A_s)$, deci A_s este f-maximal disipativ şi de forma $A_s = B^0$, pentru un operator maximal disipativ cu $\overline{D(B)} = X$.

TEOREMA 3.5. *Fie X și X^* uniform convexe și S un semigrup de contracții neliniare pe $C \subset X$; fie $A = A_s$ generatorul tare al lui S și $x \in D(A)$; atunci :*

i) $S_t(x) \in D(A)\ \forall t \geqslant 0$ *și* $AS_t(x)$ *este continuă la dreapta în* t *pe* $[0, \infty)$.

ii) $S_t(x)$ *are derivata la dreapta,* $D^+S_t(x)\ \forall t \geqslant 0$ *și* $D^+S_t(x) = AS_t(x)$, $\forall t \geqslant 0$.

iii) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} S_t(x)$ *există și este continuă pe* $[0, \infty)$ *cu excepția unei mulțimi numărabile.*

Demonstrație. i) și ii) Cum $x \in D(A)$ atunci pentru orice $t \geqslant 0$, $S_t(x) \in D$ și teorema precedentă implică faptul că $S_t(x) \in D(A)$ și că $D^+S_t(x) = AS_t(x)$. După lema 3.1 rezultă că $t \to \|D^+S(x)\| = \|AS_t(x)\|$ este o funcție monoton descrescătoare pe $[0, +\infty)$ și deci este continuă la dreapta în orice $t \geqslant 0$.

Fie $t_0 \geqslant 0$ și $t_k \searrow t_0$; fie $\{s_k\}$ un subșir al lui $\{t_k\}$ astfel încît $AS_{s_k}(x) \xrightarrow[k]{} y$. Continuitatea la dreapta menționată mai sus implică faptul că $\|y\| = \|AS_{t_0}(x)\|$. Fie $\tilde{A}$ o extensie maximal disipativă a lui A. Cum $\tilde{A}$ este demiînchisă, rezultă că $y \in \tilde{A}S_{t_0}(x)$; dar ca în demonstrația teoremei 3.4 rezultă că avem $\tilde{A}^\circ = A$ pe $D(A)$. Din $\|y\| = \|AS_{t_0}(x)|$ rezultă că $y = AS_{t_0}(x)$.

ii) Cum $\dfrac{\mathrm{d}S_t(x)}{\mathrm{d}t} = AS_t(x)$ a.p.t. pe $(0, \infty)$, avem :

$$S_{t+h}(x) - S_t(x) = \int_t^{t+h} AS(x)\,\mathrm{d}t \qquad \forall t, h \geqslant 0.$$

Din această egalitate rezultă iii) deoarece mulțimea punctelor de continuitate pentru funcția $AS_t(x)$ coincide cu mulțimea punctelor de continuitate pentru funcția $AS_t(x)$ care este monotonă și deci are cel mult o mulțime numărabilă de discontinuități.

q.e.d.

Trecem acum la problema inversă, adică la caracterizarea clasei de operatori disipativi care generează semigrupuri de co ntr neliniare, în spații Banach uniform convexe cu dualul uniform convex.

LEMA 3.2. *Fie X un spaţiu Banach şi A un operator acretiv; pentru orice $x \in D(A)$, există cel mult o funcţie absolut continuă $u : [0,+\infty) \to X$ cu proprietăţile:*

i) $u(0) = x$

ii) $u(t) \in D(A)$ $\forall t \in [0, \infty)$ şi $w - \frac{du}{dt}(t) \in - Au(t)$ a.p.t.

Demonstraţie. Să presupunem că ar exista două funcţii u şi v cu proprietăţile i) şi ii); avem

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u(t) - v(t)\|^2 = \left< x^*, \frac{du(t)}{t} - \frac{dv(t)}{dt} \right> \leqslant 0$$

cu $x^* \in \mathfrak{J}(u(t) - v(t))$. De aici rezultă că:

$$\|u(t) - v(t)\| \leqslant \|u(0) - v(0)\| = 0 \text{ şi deci } u = v \text{ a.p.t.}$$

q.e.d.

LEMA 3.3. *Fie $C \subset X$ o mulţime închisă şi convexă iar $T : C \to C$ o contracţie; atunci pentru orice $x \in C$, ecuaţia:*

$$\frac{du}{dt} + (I - T)u = 0 \text{ şi } u(0) = x \tag{8}$$

are o soluţie unică cu $u(t) \in C$, $\forall t \geqslant 0$.

Demonstraţie. Ecuaţia (8) este echivalentă cu

$$u(t) = e^{-t}x + \int_0^t e^{s-t}\, Tu(s)ds \tag{9}$$

şi ea poate fi rezolvată prin teorema de punct fix a lui Picard, observînd că aplicaţia

$$\Phi_x u(t) = e^{-t}x + \int_0^t e^{s-t}\, Tu(s)ds$$

duce mulţimea închisă şi convexă

$\{u_t \in C([0, t_0]; X), u(t) \in C\}$ în ea însăşi (deoarece $e^{-t} + \int_0^t e^{s-t}ds =$

$= 1$) şi este contractivă, după cum rezultă din

$$\|\Phi_x u(t) - \Phi_x v(t)\| = \left\|\int_0^t e^{s-t}(Tu(s) - Tv(s))\, ds\right\| \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^t e^{s-t}\|u(s) - v(s)\|\, ds \leqslant \|u - v\|\,(1 - e^{-t_0}) \leqslant \|u - v\|.$$

Există deci o soluţie unică u_x a ecuației (9) care verifică în plus şi :

$$\|u_x(t) - u_y(t)\| \leqslant \|x - y\| + \int_0^t \|u_x(s) - u_y(s)\|\, ds,$$

de unde : $\|u_x(t) - u_y(t)\| \leqslant \|x - y\| \quad \forall x, y \in C.$

q.e.d)

Observația 3.4. Dacă notăm prin $v_x(t) = u_x(h^{-1}t)$, atunci $v_x(t$ verifică ecuația :

$$\frac{dv_x}{dt}(t) + \frac{I - T}{h}\, v_x(t) = 0 \text{ şi } v_x(0) = x. \tag{10}$$

Unicitatea soluţiei acestei ecuaţii e dată de lema 3.3 şi alte proprietăţi ale ei vom da în §5.

Să mai observăm că operatorul $I - T$ este acretiv deoarece avem :

$$\|x - y + \lambda(I - T)x - \lambda(I - T)y\| \geqslant (1 + \lambda)\|x - y\| -$$
$$- \lambda\|x - y\| = \|x - y\|.$$

PROPOZIȚIA 3.2. *Fie A hiperacretiv iar X^* uniform convex şi $x \in D(A)$. Există o funcție unică lipschitziană $u : [0, +\infty) \to X$ cu proprietăţile :*

i) $u(0) = x$, *funcţia $x \to u(t)$ este contractivă pe $D(A)$, pentru orice $t \geqslant 0$*

ii) $u(t) \in D(A)\ \forall t \geqslant 0$

iii) $\dfrac{du}{dt} \in - A^\circ u(t)$ a.p.t. $t \geqslant 0$.

Dacă şi X este uniform convex, atunci :

iv) $\lim\limits_{t\to 0+} \dfrac{u(t) - x}{t} = - A^{\circ} x.$

Demonstraţie. i) + ii). Cum A este hiperactiv, operatorii A_λ sînt definiţi peste tot şi lipschitzieni, cu constanta Lipschitz $2\lambda^{-1}$. După lema precedentă ecuaţia : $\dfrac{\mathrm{d}u_\lambda}{\mathrm{d}t}(t) = - A_\lambda u_\lambda(t)$, $u_\lambda(0) = y \in X$, are o soluţie unică pe care o notăm prin $u_\lambda(t, y)$; ea verifică

$$\| u_\lambda(t, y) - u_\lambda(t, z) \| \leqslant \| y - z \| \quad \forall y, z \in X \text{ şi } t \geqslant 0.$$

Cum $\lim\limits_{t\to 0+} \dfrac{\| u_\lambda(t, y) - y \|}{t} = \| A_\lambda y \|$, lema 3.1 ne asigură că funcţia :

$$f_\lambda(t) = \lim_{h\to 0+} \frac{\| u_\lambda(t+h, y) - u_\lambda(t, y) \|}{h} = \| A_\lambda u_\lambda(t, y) \|$$

este descrescătoare în t.

Fie $u_\lambda(t) = u_\lambda(t, x)$; avem deci

$$(11) \quad \left\| \frac{\mathrm{d}u_\lambda(t)}{\mathrm{d}t} \right\| = \| A_\lambda u_\lambda(t) \| \leqslant \| A_\lambda u_\lambda(0) \| = \| A_\lambda x \| \leqslant |Ax|.$$

Dacă arătăm că există $\lim\limits_{\lambda\to 0} u_\lambda(t) = u(t)$

uniform pentru $t \in [0, t_0]$, limita va fi o funcţie lipschitziană, cu $u(0) = x$.

Fie $u_{\lambda,\mu}(t) = u_\lambda(t) - u_\mu(t)$; avem :

$$\frac{1}{2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \| u_{\lambda,\mu}(t) \|^2 = < \mathfrak{J}\, u_{\lambda,\mu}(t), \frac{\mathrm{d}u_{\lambda,\mu}(t)}{\mathrm{d}t} > =$$

$$= < \mathfrak{J}\, u_{\lambda,\mu}(t), A_\mu u_\mu(t) - A_\lambda u_\lambda(t) >$$

Dar $A_\lambda u_\lambda(t) \in A\, Q_\lambda u_\lambda(t)$ şi A fiind acretiv, dacă notăm prin $v_{\lambda,\mu}(t) = Q_\lambda u_\lambda(t) - Q_\mu u_\mu(t)$, avem :

$$< \mathfrak{J}\, v_{\lambda,\mu}(t), A_\lambda u_\lambda(t) - A_\mu u_\mu(t) > \geqslant 0$$

deci

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u_{\lambda,\mu}(t)\|^2 \leqslant \langle \mathfrak{J}\, u_{\lambda,\mu}(t), -\mathfrak{J}\, v_{\lambda,\mu}(t), A_\mu u_\mu(t) - A_\lambda u_\lambda(t)\rangle \leqslant$$

$$\leqslant 2\|A^\circ x\|\, \|\mathfrak{J}\, u_{\lambda,\mu}(t) - \mathfrak{J}\, v_{\lambda,\mu}(t)\|$$

de unde, ţinînd cont că $u_{\lambda,\mu}(0) = 0$, obţinem :

$$\|u_{\lambda,\mu}(t)\|^2 \leqslant 4\|A^\circ x\| \int_0^t \|\mathfrak{J}\, u_{\lambda,\mu}(s) - \mathfrak{J}\, v_{\lambda,\mu}(s)\|\,\mathrm{d}s.$$

Dar :

$$\|u_{\lambda,\mu}(s) - v_{\lambda,\mu}(s)\| \leqslant \|Q_\lambda u_\lambda(s) - u_\lambda(s)\| +$$

$$+\|Q_\mu u_\mu(s) - u_\mu(s)\| \leqslant \lambda\|A_\lambda u_\lambda(s)\| + \mu\|A_\mu u_\mu(s)\| \leqslant$$

$$\leqslant (\lambda + \mu)|Ax| \underset{\lambda,\mu}{\rightarrow} 0,$$

unde convergenţa este uniformă în $0 < s < t < t_0$.

Atunci $\mathfrak{J}\, u_{\lambda,\mu}(s) - \mathfrak{J}\, v_{\lambda,\mu}(s) \underset{\lambda,\mu}{\rightarrow} 0$ uniform în s şi prin urmare $\{u_\lambda(t)\}_\lambda$ este un şir Cauchy, există deci $u(t) = \lim\limits_{\lambda\to 0_+} u_\lambda(t)$, uniform pentru $t \in [0, t_0]$, $\forall t_0 > 0$.

Cum $\{A_\lambda u_\lambda(t)\}_{\lambda\to 0_+}$ este o mulţime mărginită, rezultă din teorema 2.1 că

$$\text{(b)} \qquad u(t) \in D(A),\ \forall t \geqslant 0$$

iii) Fie $y_\lambda(t) = \dfrac{\mathrm{d}u_\lambda(t)}{\mathrm{d}t}$; vom arăta că $\{y_\lambda(t)\}_\lambda$ converge slab în $L^2([0, t_0]; X)$.

Într-adevăr, pentru orice $\varphi \in C_0^1([0, t_0])$, avem :

$$-\int_0^{t_0} \varphi(t)\, y_\lambda(t)\mathrm{d}t = \int_0^{t_0} \varphi'(t)\, u_\lambda(t)\,\mathrm{d}t \underset{\lambda}{\rightarrow} \int_0^{t_0} \varphi'(t)\, u(t)\,\mathrm{d}t.$$

Dacă şi X este uniform convex, atunci :

iv) $\lim\limits_{t\to 0_+} \dfrac{u(t) - x}{t} = - A^\circ x.$

Demonstraţie. i) + ii). Cum A este hiperactiv, operatorii A_λ sînt definiţi peste tot şi lipschitzieni, cu constanta Lipschitz $2\lambda^{-1}$. După lema precedentă ecuaţia : $\dfrac{du_\lambda}{dt}(t) = - A_\lambda u_\lambda(t)$, $u_\lambda(0) = y \in X$, are o soluţie unică pe care o notăm prin $u_\lambda(t, y)$; ea verifică

$$\| u_\lambda(t, y) - u_\lambda(t, z) \| \leqslant \| y - z \| \quad \forall y, z \in X \text{ şi } t \geqslant 0.$$

Cum $\lim\limits_{t\to 0_+} \dfrac{\| u_\lambda(t, y) - y \|}{t} = \| A_\lambda y \|$, lema 3.1 ne asigură că funcţia :

$$f_\lambda(t) = \lim_{h\to 0_+} \frac{\| u_\lambda(t+h, y) - u_\lambda(t, y) \|}{h} = \| A_\lambda u_\lambda(t, y) \|$$

este descrescătoare în t.

Fie $u_\lambda(t) = u_\lambda(t, x)$; avem deci

$$(11) \quad \left\| \frac{du_\lambda(t)}{dt} \right\| = \| A_\lambda u_\lambda(t) \| \leqslant \| A_\lambda u_\lambda(0) \| = \| A_\lambda x \| \leqslant |Ax|.$$

Dacă arătăm că există $\lim\limits_{\lambda\to 0} u_\lambda(t) = u(t)$

uniform pentru $t \in [0, t_0]$, limita va fi o funcţie lipschitziană, cu $u(0) = x$.

Fie $u_{\lambda,\mu}(t) = u_\lambda(t) - u_\mu(t)$; avem :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \| u_{\lambda,\mu}(t) \|^2 = \left< \mathfrak{J}\, u_{\lambda,\mu}(t), \frac{du_{\lambda,\mu}(t)}{dt} \right> =$$

$$= < \mathfrak{J}\, u_{\lambda,\mu}(t), A_\mu u_\mu(t) - A_\lambda u_\lambda(t) >$$

Dar $A_\lambda u_\lambda(t) \in A\, Q_\lambda u_\lambda(t)$ şi A fiind acretiv, dacă notăm prin $v_{\lambda,\mu}(t) = Q_\lambda u_\lambda(t) - Q_\mu u_\mu(t)$, avem :

$$< \mathfrak{J}\, v_{\lambda,\mu}(t), A_\lambda u_\lambda(t) - A_\mu u_\mu(t) > \geqslant 0$$

deci

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u_{\lambda,\mu}(t)\|^2 \leqslant < \mathfrak{J}\, u_{\lambda,\mu}(t), -\mathfrak{J}\, v_{\lambda,\mu}(t), A_\mu u_\mu(t) - A_\lambda u_\lambda(t) > \leqslant$$

$$\leqslant 2\|A^\circ x\|\, \|\mathfrak{J}\, u_{\lambda,\mu}(t) - \mathfrak{J}\, v_{\lambda,\mu}(t)\|$$

de unde, ținînd cont că $u_{\lambda,\mu}(0) = 0$, obținem :

$$\|u_{\lambda,\mu}(t)\|^2 \leqslant 4\|A^\circ x\| \int_0^t \|\mathfrak{J}\, u_{\lambda,\mu}(s) - \mathfrak{J}\, v_{\lambda,\mu}(s)\|\,\mathrm{d}s.$$

Dar :

$$\|u_{\lambda,\mu}(s) - v_{\lambda,\mu}(s)\| \leqslant \|Q_\lambda u_\lambda(s) - u_\lambda(s)\| +$$

$$+ \|Q_\mu u_\mu(s) - u_\mu(s)\| \leqslant \lambda\|A_\lambda u_\lambda(s)\| + \mu\|A_\mu u_\mu(s)\| \leqslant$$

$$\leqslant (\lambda + \mu)|Ax| \xrightarrow[\lambda,\mu]{} 0,$$

unde convergența este uniformă în $0 < s < t < t_0$.

Atunci $\mathfrak{J}\, u_{\lambda,\mu}(s) - \mathfrak{J}\, v_{\lambda,\mu}(s) \xrightarrow[\lambda,\mu]{} 0$ uniform în s și prin urmare $\{u_\lambda(t)\}_\lambda$ este un șir Cauchy, există deci $u(t) = \lim\limits_{\lambda\to 0+} u_\lambda(t)$, uniform pentru $t \in [0, t_0]$, $\forall\, t_0 > 0$.

Cum $\{A_\lambda u_\lambda(t)\}_{\lambda\to 0+}$ este o mulțime mărginită, rezultă din teorema 2.1 că

(b) $$u(t) \in D(A),\ \forall\, t \geqslant 0$$

iii) Fie $y_\lambda(t) = \dfrac{\mathrm{d}u_\lambda(t)}{\mathrm{d}t}$; vom arăta că $\{y_\lambda(t)\}_\lambda$ converge slab în $L^2([0, t_0]; X)$.

Într-adevăr, pentru orice $\varphi \in C_0^1([0, t_0])$, avem :

$$-\int_0^{t_0} \varphi(t)\, y_\lambda(t)\mathrm{d}t = \int_0^{t_0} \varphi'(t)\, u_\lambda(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[\lambda]{} \int_0^{t_0} \varphi'(t)\, u(t)\,\mathrm{d}t.$$

Rezultă că pentru orice funcţie de forma

$$f(t) = \sum_k \varphi_k(t)\, x_k^*, \quad \varphi_k \in C_0^1([0, t_0]) \text{ şi } x_k^* \in X^* \tag{12}$$

$$< f, y_\lambda > = \int_0^{t_0} < f(t), y_\lambda(t) > \mathrm{d}t = \sum_k < x_k^*, \int_0^{t_0} \varphi_k(t)\, y_\lambda(t \,\mathrm{d}t >$$

este un şir Cauchy de numere reale. Cum funcţiile de forma (12) sînt dense în spaţiul $L^2([0, t_0]; X^*)$, rezultă că $\{y_\lambda\}$ este un şir Cauchy în topologia slabă pe $L^2([0, t_0], X)$. Dar acest spaţiu este reflexiv [84] şi deci $\{y_\lambda\}_\lambda$ are o limită slabă $y \in L^2([0, t_0]; X)$. Fie $g(s) = \chi_{[0,t]}(s) x^*$ cu $x^* \in X$, $\chi_{[0,t]}$ fiind funcţia caracteristică a lui $[0, t]$; atunci $g \in L^2([0, t_0], X^*)$ şi

$$< x^*, u_\lambda(t) - u_\lambda(0) > = \int_0^t < g(s), y_\lambda(s) > \mathrm{d}s$$

care la limită pentru $\lambda \to 0$, devine:

$$< x^*, u(t) - u(0) > = \int_0^t < x^*, y(s) > \mathrm{d}s, \text{ adică}$$

$$u(t) = u(0) + \int_0^t y(s)\,\mathrm{d}s, \text{ ceea ce înseamnă}$$

că $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(t) = y(t)$ a.p.t. $t \geqslant 0$.

Să arătăm acum că $\dfrac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t} \in -Au(t)$ a.p.t. $t \geqslant 0$.

Cum $\dfrac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t} = w - \lim\limits_{\lambda} y_\lambda(t)$ în $L^2([0, t_0]; X)$, există un şir $\{v_\mu(t)\}_\mu$ de combinaţii convexe ale lui $\{y_\lambda(t)\}_{\lambda \geqslant \mu}$, care converg tare către $\dfrac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}$. Putem presupune atunci (trecînd la un subşir şi schimbînd notaţiile) că $v_\mu(t) \underset{\mu}{\to} \dfrac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}$ a.p.t. $t \in [0, t_0]$.

Să fixăm un punct t_1 în care are loc această convergenţă şi fie K mulţimea punctelor limită în topologia slabă a şirului $\{y_\lambda(t_1)\}_\lambda$.

Fie M un semispațiu deschis în X, conținînd pe K; atunci $y_\lambda(t_1) \in M$, pentru λ suficient de mic, deoarece altfel, șirul $\{\|y_\lambda(t_1)\|\}_\lambda$ fiind mărginit, ar exista un punct limită al său, în topologia slabă, în afara lui M.

Înseamnă că $v_\mu(t_1) \in M$, dacă μ este suficient de mic și deci $y(t_1) = \lim\limits_{\mu} v_\mu(t_1) \in \overline{M}$. Cum aceasta are loc pentru orice semispațiu $M \supset K$, $y(t_1)$ aparține acoperirii convexe și închise a lui K, notată prin $\widetilde{K}$.

Vom arăta că avem $\widetilde{K} \subset -Au(t_1)$; dar $Au(t_1)$ fiind o mulțime închisă și convexă în X e suficient să arătăm că are loc : $K \subset -Au(t_1)$.

Aceasta însă este o consecință a teoremei 2.1.

$$\Big(x \in K \Rightarrow x = w - \lim_{\lambda'} y_{\lambda'}(t_1) = -A_{\lambda'} u_{\lambda'}(t_1)$$

iș

$$u_{\lambda'}(t_1) \xrightarrow[\lambda']{} u(t_1) \quad \text{cu} \quad \{u_{\lambda'}(t_1)\} \subset \{u_\lambda(t_1)\} \quad \text{și} \quad \{y_{\lambda'}(t_1)\} \subset \{y_\lambda(t_1)\}\Big).$$

A rezultat din (11) și faptul că $\|y(t)\| \leqslant |Ax|$, deci

$$\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t} \in -A^0u(t) \text{ a.p.t.}$$

iv) Dacă $t_k \xrightarrow[k]{} 0$, avem $u(t_k) \xrightarrow[k]{} x$,

$$y(t_k) \in -Au(t_k) \text{ și } \|y(t_k)\| \leqslant |Ax| = \|A^0x\|;$$

atunci din teorema 2.1 rezultă că $y(t_k) \xrightarrow[k]{} A^0x$.

Aceasta înseamnă că dacă vom pune $y(0) = A^0x$, funcția y este continuă la dreapta în zero, deci că $u(t)$ este diferențiabilă la dreapta în $t = 0$ și $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(0_+) = A^0x$.

q.e.d.

Se spune că aplicația acretivă $A : X \to 2^X$ *generează un semigrup de contracții dacă există un semigrup de contracții* S_t *definit pe* $D(A)$ *astfel încît* $\frac{\mathrm{d}S_t(x)}{\mathrm{d}t} \in -AS_t(x)$ *a.p.t.* $t \geqslant 0$ *și* $x \in D(A)$.

Avem următoarea teoremă de generare de semigrupuri de contracţii.

TEOREMA 3.6. *Fie* X, X^*, *uniform convexe şi* A *o aplicaţie hiperacretivă:* $X \to 2^X$; *există atunci un semigrup* S_t *pe* $D(A)$ *al cărui generator infinitezimal tare este* $-A^0$.

Demonstraţie. Pentru orice $x \in D(A)$, să notăm prin $S_t(x)$ soluţia unică a ecuaţiei

$$\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t} \in -A^0 u(t) \text{ a.p.t. în } (0, \infty) \text{ şi } u(0) = x$$

dată prin propoziţia precedentă. S_t este semigrupul de contracţii căutat.

q.e.d.

Observăm că $A^0 S_t(x)$ are o mulţime numărabilă de discontinuităţi şi că $D^+ S_t(x) = A^0 S_t(x)$, $\forall\, t \geqslant 0$ ca urmare a teoremei 3.5.

De asemeni se observă că semigrupul S_t poate fi extins prin continuitate la un semigrup pe $\overline{D(A)}$.

Această teoremă pune în evidenţă importanţa aplicaţiilor hiperacretive; de aici rezultă importanţa unor criterii de hiperacretivitate (se va vedea că aceasta revine la demonstrarea existenţei unei soluţii globale pentru ecuaţii de forma $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} \in -Au(t)$).

TEOREMA 3.7. *Fie* X^* *uniform convex şi* A *un operator univoc acretiv, hemicontinuu, cu* $D(A) = X$; *atunci* A *este hiperacretiv.*

Demonstraţie. Teorema 1.4. capitolul IV implică faptul că A este chiar demicontinuu.

Fie $x_0 \in X$; există o sferă $S \subset X$, de centru x_0 şi de rază R, astfel încît $\|Ax\| \leqslant k$ pentru $x \in S$.

Aplicăm în S metoda poligonală a lui Cauchy pentru a construi soluţiile u_n pentru:

$$\frac{\mathrm{d}u_n(t)}{\mathrm{d}t} + Au_n(t - \varepsilon_n) = 0 \quad 0 \leqslant t < \frac{R}{k} \quad n \in N,$$

unde $\varepsilon_n \searrow 0_+$; $u_n(t)$ există şi aparţin lui S deoarece

$$\left\| \frac{\mathrm{d}u_n(t)}{\mathrm{d}t} \right\| = \| Au_n(t - \varepsilon_n) \| \leqslant k.$$

Exact ca în demonstrația propoziției 3.2, notînd prin $x_{mn}(t) = u_m(t) - u_n(t)$ și $y_{mn}(t) = u_m(t-\varepsilon_m) - u_n(t-\varepsilon_n)$ avem :

$$\frac{\mathrm{d}\,\|x_{mn}(t)\|^2}{\mathrm{d}t} = -2 < \mathfrak{J}x_{mn}, Au_m(t-\varepsilon_m) - Au_n(t-\varepsilon_n) > \leqslant$$

$$\leqslant -2 < \mathfrak{J}x_{mn}(t) - \mathfrak{J}y_{mn}(t), Au_m(t-\varepsilon_m) - Au_n(t-\varepsilon_n) > \leqslant$$

$$\leqslant 2K\,\|\mathfrak{J}x_{mn}(t) - \mathfrak{J}y_{mn}(t)\|,$$

de unde :

$$\|x_{mn}(t)\|^2 \leqslant 2K\int_0^t \|\mathfrak{J}x_{mn}(s) - \mathfrak{J}y_{mn}(s)\,\mathrm{d}s\|.$$

Cum $x_{m,n}(t) - y_{m,n}(t) \to 0$ uniform în $t < \frac{R}{K}$, din uniform continuitatea lui $\mathfrak{J}$ rezultă că există $\lim\limits_n u_n(t) = u(t)$, uniform în t, și deci $u(t)$ este continuă în t; de asemeni $\lim\limits_n u_n(t-\varepsilon_n) = u(t)$, uniform în t.

Pentru orice $x^* \in X^*$, avem :

$$< x^*, u_n(t) > = < x^*, x_0 > - \int_0^t < x^*, Au_n(s-\varepsilon_n) > \mathrm{d}s$$

Dar continuitatea lui A implică faptul că $Au_n(s-\varepsilon_n) \underset{n}{\to} Au(s)$ uniform în $s < \frac{R}{K}$ și trecînd la limită cu $\varepsilon_n \searrow 0$, obținem :

$$< x^*, u(t) > = < x^*, x_0 > - \int_0^t < x^*, Au(s) > \mathrm{d}s;$$

deci $u(t) = x_0 + \int_0^t Au(s)\mathrm{d}s$ (unde $Au(s)$ este tare integrabilă fiind slab continuă).

S-a găsit astfel o soluție u pe $\left[0, \frac{R}{K}\right]$ a ecuației :

$$\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t} + Au(t) = 0.$$

Să arătăm că se poate fi prelungită la o soluţie globală. Din lema de unicitate, rezultă că există o soluţie $u(t)$ pe un interval maximal $[0,t_0)$ de existenţă. Rămîne doar de arătat presupunerea că $_0<\infty$ ne duce la o contradicţie. Fie h, $t \in R$, astfel încît $t+h\in[0,t_0)$; pentru funcţia $u(t+h)-u(t)$ obţinem:

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u(t+h)-u(t)\| = <\mathcal{J}(u(t+h)-u(t)),\ -Au(t+h)+Au(t)> \leqslant 0$$

deci

$$\|u(t+h)-u(t)\| \leqslant \|u(h)-x\|.$$

Analog obţinem pentru funcţia $u(t+h)-x$

$$\|u(h)-x\|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u(t)-x\|\Big|_{t=h} = <\mathcal{J}(u(h)-x),-Au(h)> \leqslant \mathcal{J}(u(h)-x),$$

$$Ax> \leqslant \|u(h)-x\|\,\|Ax\|$$

şi deci $\|u(h)-x\| \leqslant h\|Ax\|$.
Astfel: $\|u(t+h)-u(t)\| \leqslant h\|Ax\| \forall x\in X$, t, $t+h \in[0,t_0)$.
Această soluţie arată că există $\lim\limits_{t\to t_0} u(t) = u_0$; dacă aplicăm teorema de existenţă locală de mai sus cu condiţia iniţială în t_0, se obţine o prelungire a soluţiei u, ceea ce contrazice maximalitatea lui t_0.

Fie acum x, $y\in X$; aplicăm cele de mai sus operatorului $A'x=(A+I)x-y$; există deci o soluţie u_y astfel încît $u_y\ (0) = x$ şi

$$3)\qquad \frac{\mathrm{d}u_y(t)}{\mathrm{d}t} + (A+I)u_y\ (t) - y = 0 \text{ a.p.t. pe } (0\ +\infty).$$

Au loc

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u_y(t+h)-u_y(t)\|^2 = <\mathcal{J}(u_y(t+h)-u_y(t)),-A'u_y(t+h)+A'u_y(t)>$$

$$> \leqslant -\|u_y(t+h)-u_y(t)\|^2 \qquad \text{a.p.t. pe } (0,+\infty)$$

care implică:

$$\|u_y(t+h)-u_y(t)\| \leqslant \mathrm{e}^{-t}\|u_y(h)-x\| \qquad \forall\, t,h \geqslant 0.$$

Pe de altă parte, procedînd analog, obținem:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u_y(t)-x\|^2\Big|_{t=h} = <\mathfrak{J}(u_y(h)-x), -A'u_y(h)> = <\mathfrak{J}(u_y(h)-x),$$

$$A'u_y(h)+A'x> - <\mathfrak{J}(u_y(h)-x), A'x> \leqslant -\|u_y(h)-x\|^2 +$$

$$+\|u_y(h)-x\|\,\|A'x\|$$

și de aici rezultă:

(14) $$\|u_y(h)-x\| \leqslant \mathrm{e}^{-h}(\mathrm{e}^h-1)\|A'x\|.$$

Din aceste inegalități rezultă că există $u = \lim\limits_{t\to\infty} u_y(t)$.

Fie $\Omega \subset (0,+\infty)$ mulțimea punctelor de diferențiabilitate pentru $u_y(t)$ și fie $\{t_n\} \subset \Omega$ cu $t_n \underset{n}{\to} \infty$;
Din (13) și din (14) rezultă

$$\lim_n \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} u_y(t)\Big|_{t=t_n} = 0$$

și cum A' este demiînchis, înseamnă că

$$A'u = w - \lim_n A'u_y(t_n) = 0, \text{ din } (A+I)u = y.$$

Prin urmare $R(A+I) = X$.

q.e.d.

Referințe. Noțiunea de semigrup de contracții neliniare a fost introdusă de Neuberger [134] și studiată de Komura [100], [101], Kato [96], [97] [98], Browder [32] [33], [39] Miyadera [123]—[127] Oharu [136] [137], Dorroh [66]—[69], Brezis-Pazy [21]—[23], Crandall — Pazy [49]—[51], Crandall—Liggett [52].

Proprietățile de la începutul acestui paragraf sînt din [50]; teorema de generare e dată după Kato [97] și Oharu [137]. Criteriul de hiperacretivitate dat aici este al lui Kato [97], dar amintim că el a fost generalizat de V. Barbu — A. Cellina [9].

§ 4. OPERATORI ACRETIVI ŞI SEMIGRUPURI DE CONTRACŢII NELINIARE ÎN SPAŢII HILBERT

Vom începe prin a da următorul rezultat al lui Kirszbaum:

LEMA 4.1. *Fie în R^n sferele închise $S_1, .., S_m$ şi $S'_1, ..., S'_m$, astfel încît:*

1° $\bigcap_{i=1}^{m} S_i \neq \emptyset$

2° *pentru* $i = 1, \ldots, m$, $r(S_i) = r(S'_i)$

3° *pentru* $i, j = 1, \ldots, m$, $\delta(S_i, S_j) > \delta(S'_i, S'_j)$

Atunci $\bigcap_{i=1}^{m} S'_i \neq \emptyset$

unde s-a notat prin $r(S_i)$ raza sferei S_i şi prin $\delta(S_i, S_j)$ distanţa centrelor sferelor S_i şi S_j.

Demonstraţie. Lema poate fi pusă sub forma următoare: Fie $x_1, .., x_m$ şi $x'_1, .., x'_m$ în R^n, astfel încît:

$$\|x'_i - x'_j\| \leqslant \|x_i - x_j\|; \tag{1}$$

atunci pentru orice $x \in R^n$, există $x' \in R^n$ astfel încît:

$$\|x'_i - x'\| \leqslant \|x_i - x\| \quad i = 1, \ldots, m. \tag{2}$$

Dacă pentru un i_0, $x = x_{i_0}$, putem lua conform lui (1), $x' = x'_{i_0}$.

Prin urmare putem presupune că funcţia $f(y) = \max\limits_i \dfrac{\|y - x'_i\|}{\|x - x_i\|}$ este definită pe R^n; ea este continuă, pozitivă şi $\lim\limits_{\|y\| \to \infty} f(y) = +\infty$. Rezultă că f îşi atinge minimul într-un punct $x' \in R^n$; vom arăta că $\lambda = f(x') \leqslant 1$ şi atunci x' este punctul care verifică (2).

Putem presupune $\lambda > 0$ şi schimbînd eventual indicii putem considera că avem:

$$\frac{\|x' - x'_i\|}{\|x - x_i\|} = \begin{cases} \lambda \text{ pentru } i = 1, \ldots, k \\ < \lambda \text{ pentru } i > k \end{cases} \tag{3}$$

Fie K anvelopa convexă a mulțimii $\{x'_1, \ldots, x'_m\}$ care este închisă, spațiul fiind finit dimensional. Dacă $x' \notin K$, atunci am putea găsi un punct x'' mai apropiat de K; substituind x' prin x'' în (3), inegalitățile vor fi verificate în continuare (dacă modificăm pe x' foarte puțin) în timp ce egalitățile devin : $\| x'' - x'_i \| \leqslant \lambda \| x - x_i \|$ $i = 1, \ldots, k$; astfel are loc $f(x'') < \lambda$, ceea ce nu se poate. Prin urmare $x' \in K$ și deci există $c_i \geqslant 0$, $\sum_{i=1}^{k} c_i = 1$, astfel încît

$$\text{(4)} \qquad x' = \sum_{i=1}^{k} c_i x'_i \;, \quad \text{sau} \quad \sum_{i=1}^{k} c_i (x' - x'_i) = 0.$$

Notăm prin $r'_i = x' - x'_i$ și $r_i = x - x_i$. Avem după

(3) : $\qquad \| r'_i \| = \lambda \| r_i \| \qquad i = 1, \ldots, k,$ iar conform cu (1)

$$\| r'_i - r'_j \| \leqslant \| r_i - r_j \| \qquad i, j = 1, \ldots, k.$$

Aceasta înseamnă :

$$< r'_i - r'_j, r'_i - r'_j > \leqslant < r_i - r_j, r_i - r_j >, \text{ deci}$$

$$\| r'_i \|^2 - 2 < r'_i, r'_j > + \| r'_j \|^2 \leqslant \| r_i \|^2 - 2 < r_i, r_j > + \| r_j \|^2$$

și prin urmare

$$2\,(< r_i, r_j > - < r'_i, r'_j >) \leqslant (1 - \lambda)\,(\| r_i \|^2 + \| r_j \|^2).$$

Înmulțim cu $c_i \; c_j$ și sumăm după toți i și j :

$$\text{(2)} \qquad \left(\Big\| \sum_{i=1}^{k} c_i r_i \Big\|^2 - \Big\| \sum_{i=1}^{k} c_i r'_i \Big\|^2 \right) \leqslant (1 - \lambda)$$

$$\left(\sum_i c_i \| r_i \|^2 + \sum_j c_j \| r_j \|^2 \right).$$

După (4), $\sum_i^k c_i r_i' = 0$, deci

$$(1-\lambda)\left(\sum_i c_i \| r_i \|^2 + \sum_j c_j \|r_j\|^2\right) \geqslant 2 \| \sum_i c_i r_i \|^2 \geqslant 0$$

deci $\lambda \leqslant 1$.

q.e.d.

Acest rezultat a fot extins la cazul spaţiilor Hilbert şi a unui număr infinit de sfere.

TEOREMA 4.1. *Fie H un spaţiu Hilbert şi S_α, S'_α sfere închise, indexate după o mulţime $\mathcal{A}$; dacă*

i) $\bigcap_\alpha S_\alpha \neq \emptyset$

ii) *pentru orice* $\alpha \in \mathcal{A}$, $r(S_\alpha) = r(S'_\alpha)$

iii) *pentru orice* $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$, $\delta(S_\alpha, S_\beta) \geqslant \delta(S'_\alpha, S'_\beta)$

Atunci $\bigcap_\alpha S'_\alpha \neq \emptyset$.

Demonstraţie. Fie $\gamma \in \mathcal{A}$ e suficient să demonstrăm că $\bigcap_\alpha (S'_\gamma \cap S'_\alpha) \neq \emptyset$; dar $S'_\gamma \cap S'_\alpha$ sînt submulţimi slab închise ale sferei S'_γ care este slab compactă şi atunci este suficient să arătăm că intersecţiile finite sînt nevide, sau echivalent, că intersecţii finite de S'_α sînt nevide; deci putem presupune $\mathcal{A} = \{1, \ldots, m\}$.

Fie H_0 subspaţiul generat de centrele sferelor S_i, S'_i şi de un punct $x \in \bigcap_i S_i$, $i = 1, \ldots, m$; H_0 este finit dimensional şi $S_i^0 = S_i \cap H_0$, $S_i'^0 = S_i' \cap H_0$ sînt sfere în acest spaţiu, astfel încît:

$$r(S_i^0) = r(S_i);\ r(S_i'^0) = r(S_i');\delta(S_i^0, S_j^0) = \delta(S_i, S_j)$$

şi $\delta(S_i'^0, S_j'^0) = \delta(S_i', S_j')$. Sînt astfel îndeplinite ipotezele lemei lui Kirszbaum şi deci $\bigcap_i S_i^{0'} \neq \emptyset$ ceea ce înseamnă că $\bigcap_i S_i' \neq \emptyset$.

q.e.d.

LEMA 4.2. *Fie H un spaţiu Hilbert şi $\{x_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$, $\{y_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ şi $x \in H$; dacă $\| x_\alpha - x_\beta \| \geqslant \| y_\alpha - y_\beta \|$ $\forall\ \alpha, \beta \in \mathcal{A}$, atunci există $y \in H$, soluţie a inegalităţilor*

$$\| x_\alpha - x \| \geqslant \| y_\alpha - y \| \ \forall\ \alpha \in \mathcal{A}.$$

Demonstrație. Fie S_α sferele cu centrele în $x_\alpha - x$ și razele $\| x_\alpha - x \|$ și S'_α cu centrele y_α și razele tot $\| x_\alpha - x \|$. Sînt îndeplinite condițiile teoremei precedente și y va fi punctul din $\bigcap\limits_{\alpha \in \mathfrak{A}} S'_\alpha$.

q.e.d.

TEOREMA 4.2. *Fie* $F : D \subset H \to H$ *astfel încît*

$$\| Fx - Fy \| \leqslant \| x - y \| \quad \forall\ x, y \in D.$$

Atunci există o extensie $\widetilde{F}$ *a lui* F *la întreg* H *avînd aceeași proprietate Lipschitz.*

Demonstrație. După lema lui Zorn, F are o extensie maximală $\widetilde{F}$; fie D domeniul său și să presupunem $\widetilde{D} \neq H$. Fie $\{x_\alpha\} \subset D$ și $y_\alpha = \widetilde{F}(x_\alpha)$ și fie $x \notin \widetilde{D}$; putem aplica lema precedentă și obținem existența unui punct $y \in H$, astfel încît:

$$\| y_\alpha - y \| \leqslant \| x_\alpha - x \| \quad \text{sau} \quad \| \widetilde{F}(x_\alpha) - y \| \leqslant \| x_\alpha - x \| \cdot$$

Punînd acum $\widetilde{\widetilde{F}}(x) = y$ și $\widetilde{\widetilde{F}}(z) = \widetilde{F}(z)$ pentru $z \in \widetilde{D}$, obținem o contradicție a maximalității lui F.

q.e.d.

Trecem acum la studiul aplicațiilor acretive în spații Hilbert și vom demonstra:

TEOREMA 4.3. *Fie* $A : H \to 2^H$ *o aplicație maximal monotonă, atunci* $R(A + I) = H$.

Demonstrație. Pentru orice $x, x' \in D(A)$ și $y \in Ax$, $y' \in Ax'$, avem $\langle x - x', y - y' \rangle \geqslant 0$.

Pentru $(x, y) \in G(A)$, să punem: $u = x + y$ și $v = x - y$. Mulțimea G_0 a elementelor $(u, v) \in H \times H$ de forma de mai sus este graficul unei contracții univoce:

Într-adevăr, fie (u, v), $(u_1, v_1) \in G_0$; avem:

$$\| u - u_1 \|^2 = \| x - x_1 \|^2 + \| y - y_1 \|^2 + 2 \langle x - x_1, y - y_1 \rangle \text{ și}$$

$$\| v - v_1 \|^2 = \| x - x_1 \|^2 + \| y - y_1 \|^2 - 2 \langle x - x_1, y - y_1 \rangle,$$

și de aici rezultă că:

$$\| u - u_1 \|^2 \geqslant \| v - v_1 \|^2.$$

Dacă vom pune $Fu = v$, se verifică că $G_0 = G(F)$ şi că F este o contracţie univocă.

Invers, fie o contracţie în H; pentru orice $(u, v) \in G(F)$ fie $x = \frac{u+v}{2}$, $y = \frac{u-v}{2}$ şi să definim:

$$D(A) = \left\{ x \in H, \quad x = \frac{u+v}{2}, \quad (u, v) \in G(F) \right\}.$$

Aplicaţia A este în general multivocă şi monotonă:

$$< x_1 - x, y_1 - y > = \frac{1}{4} (\|u_1 - u\|^2 - \|v_1 - v\|^2) \geqslant 0.$$

S-a definit deci o corespondenţă biunivocă între mulţimea aplicaţiilor monotone şi mulţimea contracţiilor univoce, care conservă incluziunea, adică $A \subseteq A_1 \Rightarrow F \subseteq F_1$; în particular, dacă A este maximal monotonă, atunci F este maximală în mulţimea contracţiilor, deci după teorema 4.2, rezultă că $D(F) = H$.

Observăm acum că imaginea lui $D(A)$ prin aplicaţia $\frac{1}{2}(A + I)$ coincide cu domeniul de definiţie al contracţiei F şi deci afirmaţia a rezultat.

q.e.d.

Observaţia 4.1. Această teoremă ne arată că noţiunile de maximal acretivitate şi hiperacretivitate pentru aplicaţii în spaţii Hilbert coincid.

De asemeni în spaţii Hilbert, o serie de rezultate din paragrafele precedente pot fi întărite. Astfel avem:

TEOREMA 4.4. *Dacă A este un operator maximal monoton, atunci:*

$$\mathcal{E}[A^0; \overline{D(A)}] = \mathcal{E}[A^0; D(A)] = \{A\}.$$

Demonstraţie. Avem de arătat numai faptul că $\mathcal{E}[A^0; \overline{D(A)}] = \mathcal{E}[A^0; D(A)]$. Fie deci B maximal acretiv cu $D(B) \subset \overline{D(A)}$ şi $B \supset A^0$; vom arăta că $D(B) = D(A)$ şi deci că $B \in \mathcal{E}[A^0; D(A)]$.

Fie deci $x_0 \in \overline{D(A)}$ şi $y_0 \in H$, astfel încît:

$$(5) \qquad < x - x_0,\ A^\circ x - y_0 > \geqslant 0 \quad \forall x \in D(A);$$

avem $x_0 = Q_\lambda x_0 + \lambda A_\lambda x_0$ cu $A_\lambda x_0 \in AQ_\lambda x_0$.

Prin ipoteza $Q_\lambda x_0 \in D(A)$ şi deci poate fi luat în rol de x în inegalitatea (5), obţinîndu-se:

$$< A_\lambda x_0,\ A^\circ Q_\lambda x_0 - y_0 > < 0$$

După propoziţia 1.4 capitolul II, avem:

$$\| A^0 Q_\lambda x_0 \|^2 \leqslant < A_\lambda x_0, A^0 Q_\lambda x_0 > \leqslant < A_\lambda x_0, y_0 > \leqslant \| y_0 \| \, \| A_\lambda X_0 \| .$$

Atunci corolarul teoremei 2.2 implică faptul că $x_0 \in D(A)$.

q.e.d.

Vom da acum următoarea teoremă importantă a lui Komura [101].

TEOREMA 4.5. *Fie S_t un semigrup de contracţii definite pe o mulţime închisă şi convexă $C \subset H$; atunci $\overline{D(A)} = C$, A fiind generatorul tare al semigrupului.*.

Demonstraţie. Fie $A^h x = \dfrac{S_h x - x}{h}$, $x \in C$; se verifică uşor că A^h este disipativ, deci există $(I - \lambda A^h)^{-1}$ pentru orice $\lambda > 0$ şi $h > 0$. Să arătăm că $D(I - \lambda A^h)^{-1} \supset C$; într-adevăr, pentru orice $x \in C$, ecuaţia $(I - \lambda A^h)\, y = x$ este echivalentă cu

$$(6) \qquad y = \frac{h}{h + \lambda}\, x + \frac{\lambda}{h + \lambda}\, S_h\, y.$$

Dar se verifică uşor că aplicaţia din membrul drept al lui (6) aplică C în ea însăşi şi este lipschiztiană cu constanta Lipschitz $\lambda\,(\lambda + h)^{-1} < 1$.

Prin urmare ecuaţia (6) are o soluţie unică $y \in C$. Fie, pentru $x \in C$, $x_{\lambda,h} = (I - \lambda A^h)^{-1} x\ \lambda,\ \ h > 0$.

Vom da acum lemele :

LEMA 4.3. *Fie* $\varepsilon > 0$ *și* $0 < \delta < 1$ *astfel încît pentru* $t \in (0, \delta)$ *să avem* $\| S_t x - x \| \leq \varepsilon$. *Dacă* $nh = s \in (0, \delta)$, $n \in N$, *atunci* :

$$\| x_{\lambda,h} - x_{\lambda,s} \|^2 \leq 2 \varepsilon \| x_{\lambda,h} - x \| . \tag{7}$$

Demonstrație. Putem presupune $x = 0$; atunci

$S_h x_{\lambda,h} = \left(I + \dfrac{\lambda}{h} \right) x_{\lambda,h}$ și pentru $j = 1, \ldots, n$, avem :

$$\| x_{\lambda,h} - S_{(j-1).h} (x_{\lambda,s}) \|^2 \geq \| S_h (x_{\lambda,h}) - S_{jh} (x_{\lambda,s}) \|^2 =$$

$$= \left\| \left(I + \frac{\lambda}{h} \right) x_{\lambda,h} - S_{jh} (x_{\lambda,s}) \right\|^2 \geq$$

$$\geq \| x_{\lambda,h} - S_{jh} (x_{\lambda,s}) \|^2 + \frac{2h}{\lambda} < x_{\lambda,h}, x_{\lambda,h} - S_{jh} (x_{\lambda,s}) >$$

și deci :

$$\| x_{\lambda,h} - S_s x_{\lambda,s} \|^2 = \left\| x_{\lambda,h} - \left(1 + \frac{s}{\lambda} \right) x_{\lambda,s} \right\|^2 \geq$$

$$\geq \| x_{\lambda,h} - x_{\lambda,s} \|^2 + \frac{2s}{\lambda} < x_{\lambda,s}, x_{\lambda,s} - x_{\lambda,h} > .$$

Adunînd aceste $(n + 1)$ inegalități, obținem :

$$\| x_{\lambda,h} \|^2 + \| x_{\lambda,s} \|^2 \leq \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} < x_{\lambda,h} , S_{jh}(x_{\lambda,s}) > + < x_{\lambda,s} , x_{\lambda,h} >$$

Cum $jh \in (0, \delta]$, avem :

$$\| S_{jh} (x_{\lambda,s}) \| \leq \| x_{\lambda,s} \| + \| S_{jh} (0) \| \leq \| x_{\lambda,s} \| + \varepsilon ;$$

astfel :

$$\| x_{\lambda,h} \|^2 + \| x_{\lambda,s} \|^2 \leqslant \| x_{\lambda,h} \| \left(\| x_{\lambda,s} \| + \varepsilon \right) + \langle x_{\lambda,s}, x_{\lambda,h} \rangle.$$

Prin urmare :

$$\| x_{\lambda,h} - x_{\lambda,s} \|^2 \leqslant 2 \varepsilon \| x_{\lambda,h} \|.$$

q.e.d.

LEMA 4.4. *Fie* $x \in C$ *și* ε *și* δ *ca în lema* 4.3.; *atunci pentru orice* $\lambda > 0$ și $t \in (0, \delta)$, *avem* :

(8) $$\| x_{\lambda,h} - x \| \leqslant 2 \varepsilon \left(1 + \frac{4\lambda}{\delta} \right).$$

În particular, $x_{\lambda,h}$ *este mărginit pentru orice* $x \in C$ *și* $(\lambda, h) \in [0, h] \times [0, \delta]$.

Demonstrație. Presupunem din nou $x = 0$; dacă $s \in \left(\frac{\delta}{2}, \delta \right]$, atunci

$$\| x_{\lambda,s} \| \leqslant \frac{\lambda}{\lambda + s} \| S_s (x_{\lambda,s}) \| \leqslant \frac{\lambda}{\lambda + s} \left(\| x_{\lambda,s} \| + \varepsilon \right).$$

Deci $\| x_{\lambda,s} \| \leqslant \frac{2 \lambda \varepsilon}{\delta}$ care demonstrează (8) pentru $t \in \left[\frac{\delta}{2}, \delta \right]$.

Dacă $t \in \left(0, \frac{\delta}{2} \right)$ există $n \in N$ astfel încît $nh = s \in \left[\frac{\delta}{2}, \delta \right]$.

Folosind lema 4.3., obținem :

(9) $$\| x_{\lambda,h} - x_{\lambda,s} \| \leqslant 2 \varepsilon \| x_{\lambda,h} \| \leqslant 2 \varepsilon \| x_{\lambda,h} - x_{\lambda,s} \| + 2 \varepsilon \| x_{\lambda,s} \|$$

și cu evaluarea lui $\| x_{\lambda,s} \|$ de mai sus, obținem :

$$\| x_{\lambda,h} - x_{\lambda,s} \| \leqslant \varepsilon \left[1 + \left(1 + \frac{4\lambda}{\delta} \right)^{1/2} \right]$$ de unde rezultă (8).

q.e.d.

LEMA 4.5. $x_\lambda = \lim_{h\to 0_+} x_{\lambda,h}$ *există pentru orice* $\lambda>0$ *și* $x_\lambda\in D(A)$, $\forall\lambda>0$.

Demonstrație. După lema 4.4 există $M>$ astfel încît $\|x_{\lambda,h}-x\|\leqslant M$ pentru $h,\lambda\in(0,1]$; atunci (7) implică:

$$\|x_{\lambda,h}-x_{\lambda,s}\|\leqslant(2M\varepsilon)^{1/2},\ nh=s\in(0,\delta].$$

Rezultă ușor:

(10) $\|x_{\lambda,h}-x_{\lambda,s}\|\leqslant 2(2M\varepsilon)^{1/2}$, $s,h\in(0,\delta]$ astfel încît $\frac{s}{h}$ să fie rațional.

Cum pentru fiecare $\lambda>0$, funcția $h\to x_{\lambda,h}$ este continuă pe $(0,\infty)$, inegalitatea (10) are loc pentru $\forall x,h\in(0,\delta]$. Aceasta înseamnă că $\lim_{h\to 0_+} x_{\lambda,h}=x_\lambda$ există pentru $\forall\lambda>0$.

Pentru a arăta că $x\in D(A)$ pentru $\forall\lambda>0$, e suficient să arătăm că $\|S_s(x_\lambda)-x\|\leqslant Ms$, $\forall s\in(0,1)$ (unde M este independentă de s).

Într-adevăr pentru $s=hn$, avem

$$\|S_s(x_{\lambda,h})-x_{\lambda,h}\|\leqslant\sum_{j=1}^{n}\|s(j-1)h(x_{\lambda,h})-S_{jh}(x_{\lambda,h})\|\leqslant$$

$$\leqslant n\|x_{\lambda,h}-S_h(x_{\lambda,h})\|=\frac{s}{\lambda}\|x-x_{\lambda,h}\|$$

Dacă s este fix iar $n\to\infty$, rezultă $x_{\lambda,h}\to x_\lambda$ și aceasta implică

$$\|S_s x_\lambda-x_\lambda\|\leqslant s\lambda^{-1}\|x-x_\lambda\|\qquad\forall\lambda>0$$

ceea ce încheie demonstrația.

q.e.d.

Demonstrația teoremei 4.5. Fie $x\in C$; vom arăta că x_λ dați de lema 4.5 converg tare către x, cînd $\lambda\to 0$.

Într-adevăr, dacă în (8) $h\to 0$, obținem:

$$\|x_\lambda-x\|\leqslant 2\varepsilon\left(1+\frac{4\lambda}{\delta}\right)\qquad\forall\lambda>0.$$

În particular dacă $4\lambda<\delta$, atunci $\|x_\lambda-x\|\leqslant 4\varepsilon$.

Cum această inegalitate are loc pentru orice $\varepsilon > 0$ dacă λ este ales convenabil, rezultă că $x \in \overline{D(A)}$.

q.e.d.

Avem următoarea teoremă de tip Hille-Yosida pentru semigrupurile neliniare :

TEOREMA 4.6. *Orice semigrup de contracții neliniare S_t definit pe o mulțime închisă și convexă a lui H este generat de o aplicație maximal acretivă unică; invers orice aplicație maximal acretică : $H \to 2^H$ generează pe $\overline{D(A)}$ un semigrup de contracții unic.*

Demonstrație. O afirmație rezultă din teorema 3.6. Fie S_t un semigrup de contracții pe C și A generatorul său, după teorema 4.4 $\overline{D(A)} = C$. Fie $\tilde{A}$ o aplicație maximal acretivă cu $D(\tilde{A}) \subset C$ care extinde pe A. Vom arăta că S_t este generat de $\tilde{A}$. Într-adevăr, după teorema 3.6 există un semigrup de contracții T_t definit pe $\overline{D(\tilde{A})} = C$, astfel încît

$$\frac{\mathrm{d}\,T_t(x)}{\mathrm{d}t} \in -\tilde{A}\,T_t\,(x) \text{ a.p.t. pe } (0, \infty)\ \forall x \in D(A)$$

Cum $\dfrac{\mathrm{d}S_t\,(x)}{\mathrm{d}t} = -AS_t\,(x) \in -\tilde{A}S_t(x)$ a.p.t. pentru orice $x \in D(A) \subset D(\tilde{A})$, după lema de unicitate rezultă că $S_t\,x = T_t x$ $\forall t \geqslant 0$ și $x \in \overline{D(A)} = \overline{D(\tilde{A})} = C$.

Prin urmare S_t e generat de $\tilde{A}$. În plus, observăm că avem $A \supset \tilde{A}^0$; dar $D(\tilde{A}^0) = D(\tilde{A}) \supset D(A) \supset D(\tilde{A}^0)$ și deci $A = \tilde{A}^0$.

q.e.d.

Avem și următorul rezultat care completează teorema precedentă :

TEOREMA 4.7. *Fie $A : H \to H$; A este generatorul unui semigrup de contracție neliniare pe $\overline{D(A)}$ dacă și numai dacă A este maximal în clasa operatorilor de forma $\{B^0 \mid B$ maximal disipativ$\}$.*

Demonstrație. Fie un operator de forma B^0, maximal în clasa de mai sus ; fie S_t semigrupul generat de aplicația B ; atunci dacă A este generatorul acestui semi-grup avem $A \supset B^0$ și după cele din teorema precedentă, observația finală, rezultă că $A = \tilde{A}^0$, deci A este în clasa din enunț ; maximalitatea lui B^0 implică $A = B^0$.

Să presupunem acum că A este generatorul unui semigrup de contracţii S_t, (atunci $A=\tilde{A}^0$) şi să presupunem că ar exista o aplicaţie maximal disipativă B, astfel încît $B^0 \supset A$. Fie T_t semigrupul generat de B; dacă B_0 este generatorul acestui semigrup, atunci $B_0 \supset B^0 \supset A$ iar lema de unicitate implică că T_t şi S_t coincid pe $D(A)$ care este dens în C, deci, avem egalitatea lor pe C; prin urmare $B_0=A$ şi deci $A=B^0$, de unde maximalitatea lui A în clasa operatorilor de forma $\{B^0/B$ maximal disipativ$\}$.

q.e.d.

PROPOZIŢIA 4.1. *Următoarele condiţii asupra operatorului liniar A, cu $\overline{D(A)}=H$ sînt echivalente :*

i) *A este generatorul unui semigrup de contracţii liniare pe H.*

ii) *A este disipativ şi nu are nivi o extensie proprie liniară disipativă.*

iii) *A este disipativ şi $R(I-A)=H$.*

Demonstraţie. i) $\Rightarrow$ ii). Fie $B \supset A$ o extensie liniară disipativă maximală şi T semigrupul generat de B; atunci $T_t=S_t$ pe H, unde S_t este semigrupul al cărui generator este A; rezultă $A=B$.

ii) $\Rightarrow$ iii) După propoziţia 1.5, A este maximal disipativ, deci $R(I-A)=H$.

iii) $\Rightarrow$ i) A este maximal disipativ, deci este generatorul unui semigrup de contracţii liniare pe H conform teoremei precedente.

q.e.d.

Încheiem cu următorul exemplu :

PROPOZIŢIA 4.2. *Pentru orice semigrup de contracţii neliniare S_t pe R^n, $D(A)=R^n$.*

Demonstraţie. Să presupunem că pentru $x_0 \in R^n$ am avea $\lim\limits_{h\to 0} \|A^k x_0\| = \infty$; fie $h_k \searrow 0$, astfel încît

$$y_k = \frac{A^{h_k} x_0}{\|A^{h_k} x_0\|} \xrightarrow[k]{} y_\infty \text{ şi}$$

$$\|A^{h_k} x_0\| \xrightarrow[k]{} +\infty.$$

Printr-o transformare de coordonate, putem presupune $y_\infty = (1,0,\ldots,0)$ şi $x_0 = (0,\ldots,0)$. Fie $C = \left\{x/\|x + y_\infty\| \leqslant \frac{1}{2}\right\}$, atunci există $\eta > 0$ şi k_0 astfel încît

$$\|y_k\| > 2\eta, \quad \|y_k - y_\infty\| < \eta, \quad k > k_0$$

şi pentru $\lambda > 0$ şi $x, z \in C$, cu $\|z - \lambda y_k\| \leqslant \|x\|$ să implice $\|x\| - \|z\| > \eta\lambda$.

Fie $\varepsilon = \inf\{t/S_t(-y_\infty) \in C\}$; se verifică uşor că $0 < \varepsilon < \infty$. Pentru $k_1 > k_0$ convenabil, avem

$$\lambda_1 = h_{k_1} \|A_{h_{k_1}} x_0\| > \frac{h_{k_1}}{\eta\varepsilon} \text{ şi } \left[\frac{\varepsilon}{h_{k_1}}\right] > \frac{\varepsilon}{2h_{k_1}}.$$

Vom pune : $z_{j+1} = S_{h_{k_1}}(z_j)$, $j = 0,1,\ldots$, şi $z_0 = -y$.

Pentru $j \leqslant \frac{\varepsilon}{h_{k_1}}$, avem $z_j \in C$; astfel

$$\|z_{j+1} - \lambda_1 y_{k_1}\| = \|z_{j+1} - S_{h_{k_1}}(x_0)\| \leqslant \|z_j - x_0\| = \|z_j\|$$

şi deci $\|z_j\| - \|z_{j+1}\| > \eta\lambda_1, j = 0, 1, \ldots$ ceea ce implică

$$\|z_j\| \leqslant -jk\lambda_1 + 1 < -\frac{h_{k_1}}{\varepsilon} \cdot j + 1, \; j = 0,\ldots,\left[\frac{\varepsilon}{h_{k_1}}\right].$$

Pentru $j = \left[\frac{\varepsilon}{h_{k_1}}\right]$ $\|z_j\| < \frac{1}{2}$ şi deci $z \notin C$, ceea ce este o contradicție.

q.e.d.

Referințe. Teorema de echivalență a aplicațiilor maximal acretive şi hiperacretive în spații Hilbert este a lui Minty [118] [28]. Teorema 4.4 este luată din Brezis-Pazy [21]; analogul teoremei Hille-Yosida pentru semigrupuri neliniare a fost dat de Dorooh [169].

Rezultatul de densitate a domeniului generatorului este al lui Komura [101] iar demonstrația e luată din [8]. Demonstrația teoremei lui Kirzsbaum este din [163].

§ 5. PROBLEMA CAUCHY ABSTRACTĂ ÎN SPAȚII BANACH GENERALE

În paragrafele precedente a apărut relația existentă în spații Banach particulare între teoria semigrupurilor de contracții neliniare și următoarea problemă Cauchy.

(CP) *Fiind dat un element* $x \in X$, *să se determine o funcție* $u\ (t\ ;x)$ *astfel încît* :

i) $u(t\ ;x)$ *să fie tare absolut continuă pe fiecare subinterval finit din* $[0, +\infty]$

$$\text{ii) } u(0, x) = x \text{ și } \frac{du(t, x)}{dt} \in -Au(t, x) \text{ a.p.t.} \qquad t \geqslant 0.$$

Generalizările care s-au făcut au urmat două direcții : lărgirea clasei de spații cît și a clasei de aplicații pentru care problema Cauchy (CP) este pusă. Astfel sînt studiate aplicațiile care îndeplinesc condiția :

(R) $A : X \to 2^X$ *este acretivă și*

$$R(I + \lambda A) \supseteq \overline{D(A)} \quad 0 < \lambda < \varepsilon.$$

Un prim rezultat al lui Crandall și Liggett [52] este următorul.

TEOREMA 5.1. *Fie* $A : X \to 2^X$ *satisfăcînd condiția* (*R*); *atunci există, uniform pe compacții din* $(0, +\infty)$

$$(1) \qquad \lim_{n\to\infty} \left[I + \frac{t}{n} A\right]^{-n} x = S_t\,(x) \ \ \forall x \in D(A),\ t > 0$$

și S_t *este un semigrup de contracții pe* $\overline{D(A)}$.

Demonstrația acestei teoreme necesită o serie de pregătiri.

LEMA 5.1. *Dacă* $n \in N$ *și* $x \in D(Q_\lambda^n)$, *atunci* :

a) $\| Q_\lambda^n x - x \| \leqslant n \| Q_\lambda x - x \|$

b) dacă $x \in D_\lambda$, $\lambda > 0$, $\mu > 0$, atunci

$$(2) \qquad \frac{\mu}{\lambda} x + \frac{\lambda - \mu}{\lambda} Q_\lambda x \in D_\mu \text{ și}$$

$$Q_\lambda x = Q_\mu \left[\frac{\mu}{\lambda} x + \frac{\lambda - \mu}{\lambda} Q_\lambda x\right].$$

Demonstrație. a) Avem $\|Q_\lambda x - x\| \leqslant \lambda|Ax|$ și atunci:

$$\|Q_\lambda^n x - x\| = \|\sum_{i=0}^{n-1}(Q_\lambda^{n-i}(x) - Q_\lambda^{n-(i+1)}(x))\| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=0}^{h-1} \|Q_\lambda^{n-i}(x) - Q_\lambda^{n-(i+1)}(x)\| \leqslant \sum_{i=0}^{n-1} \|Q_\lambda x - x\| = n\|Q_\lambda x - x\|.$$

b) Fie $x_0 \in D_\lambda$; atunci $x = x_0 + \lambda y_0$, cu $y_0 \in Ax_0$; avem

$$\frac{\mu}{\lambda} x + \frac{\lambda-\mu}{\lambda} Q_\lambda(x) = \frac{\mu}{\lambda}(x + \lambda y_0) + \frac{\lambda-\mu}{\lambda} x_0 = x_0 + \mu y_0$$

și atunci

$$Q_\mu(x_0 + \mu y_0) = x_0 \text{ și } Q_\lambda x = x_0 = Q_\mu\left(\frac{\mu}{\lambda} x + \frac{\lambda-\mu}{\lambda} Q_\lambda x\right).$$

Aceasta este formula rezolventei neliniare.

q.e.d.

LEMA 5.2. *Fie* $\lambda \geqslant \mu$ *și* $x \in D(Q_\lambda^m) \cap D(Q_\mu^n)$ $m, n \in N$ și $n \geqslant m$; *atunci:*

$$\|Q_\lambda^n(x) - Q_\lambda^m(x)\| \leqslant \sum_{j=0}^{m} \alpha^j \beta^{n-j} \binom{n}{j} \|Q_\lambda^{m-j}(x) - x\| +$$

$$+ \sum_{i=m}^{n} \alpha^m \beta^{j-m} \binom{j-1}{m-1} \|Q_\mu^{n-j}(x) - x\|,$$

unde $\alpha = \frac{\mu}{\lambda}$ și $\beta = \frac{\lambda-\mu}{\lambda}$.

Demonstrație. Pentru $j, k \in N$, $0 \leqslant j \leqslant n$, și $0 \leqslant k \leqslant m$, fie $a_{k,j} = \|Q_\mu^j x - Q_\lambda^k x\|$ după lema 5.1 (2) avem:

$$a_{k,j} = \|Q_\mu^j(x) - Q_\mu\left(\frac{\mu}{\lambda} Q_\lambda^{k-1}(x) + \frac{\lambda-\mu}{\lambda} Q_\lambda^k(x)\right\| \leqslant \|Q_\mu^{j-1}(x) -$$

$$-\left(\frac{\mu}{\lambda} Q_\lambda^{k-1}(x) + \frac{\lambda-\mu}{\lambda} Q_\lambda^k(x)\right\| \leqslant \left\{\frac{\mu}{\lambda}\|Q_\mu^{j-1}(x) - Q_\lambda^{k-1}(x)\| +\right.$$

$$\left. + \frac{\lambda-\mu}{\lambda}\|Q_\mu^{j-1}(x) - Q_\lambda^k(x)\|\right\} = \alpha a_{k-1,j-1} + \beta a_{k,j-1}$$

cu α, β ca în enunţ. Inegalităţile :

$$a_{k,j} \leqslant \alpha\, a_{k-1,j-1} + \beta\, a_{k,j-1}$$

pot fi rezolvate pentru a evalua $a_{m,n}$ în funcţie de $a_{k,0}$ şi $a_{0,j}$ exact cum se cere.

q.e.d.

LEMA 5.3. *Fie* $n \geqslant m > 0 \in N$ *şi* $\alpha, \beta \in R$ *cu* $\alpha+\beta=1$.

Atunci : i) $\sum_{j=0}^{m} \binom{n}{j} \alpha^j \beta^{n-j} (m-j) \leqslant \sqrt{(n\alpha - m)^2 + n\alpha\beta}$ şi

ii) $\sum_{j=m}^{n} \binom{j-1}{m-1} \alpha^m \beta^{j-m} (n-j) \leqslant \sqrt{\frac{m\beta}{\alpha^2} + \left(\frac{\beta m}{\alpha} + m - n\right)^2}$.

Demonstraţie. i) Observăm că avem cu inegalitatea lui Schwartz :

$$\sum_{j=0}^{m} \binom{n}{j} \alpha^j \beta^{n-j} (m-j) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \alpha^j \beta^{n-j} |m-j| \leqslant \left(\sum_{0}^{n} \binom{n}{j} \alpha^j \beta^{n-j}\right)^{1/2} \tag{3}$$

$$\left(\sum_{0}^{n} \binom{n}{j} \alpha^j \beta^{n-j} (m-j)^2\right)^{1/2}$$

iar membrul drept din (3) poate fi calculat cu relaţiile :

$\alpha+\beta=1$, $\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \alpha^j \beta^{n-j} = (\alpha+\beta)^n$, $\sum_{j=0}^{n} j \binom{n}{j} \alpha^j \beta^{n-j} = \alpha n (\alpha+\beta)^{n-1}$ şi

$$\sum_{j=0}^{n} j^2 \binom{n}{j} \alpha^j \beta^{n-j} = \alpha^2 n(n-1)(\alpha+\beta)^{n-2} + \alpha n (\alpha+\beta)^{n-1}$$

şi se obţine astfel i).

ii) Analog, avem :

$$\sum_{j=m}^{n}\binom{j-1}{m-1}{}^{m}\beta^{j-m}(n-j)\leqslant\sum_{j=m}^{\infty}\binom{j-1}{m-1}\alpha^{m}\beta^{j-m}|n-j|\leqslant$$

$$\leqslant\left(\sum_{j=m}^{\infty}\binom{j-1}{n-1}\alpha^{m}\beta^{j-m}\right)^{1/2}\cdot\left(\sum\binom{j-1}{m-1}\alpha^{m}\beta^{j-m}(n-j)^{2}\right)^{1/2}$$

iar ultima expresie se evaluează folosind :

$$\sum_{j=m}^{\infty}\binom{j-1}{m-1}\beta^{j-m}=\frac{1}{(1-\beta)^{m}},\quad|\beta|<1$$

care se diferențiază în raport cu β.

q.e.d.

Demonstrația teoremei 5.1. Fie $x\in D(A)$, $\lambda\geqslant\mu>0$, $n\geqslant m$. Prin ipoteză $x\in D(Q_{\lambda}^{m})\ D(Q_{\mu}^{n})$ și atunci cu lema 5.1 și lema 5.2 găsim $||Q_{\mu}^{n}-x-Q_{\lambda}^{m}x||\leqslant$

$$\leqslant\left\{\lambda\sum_{j=0}^{m}\binom{n}{j}\alpha^{j}\beta^{n-j}(m-j)+\mu\sum_{j=m}^{n}\binom{j-1}{m-1}\alpha^{m}\beta^{j-m}(n-j)\right\}|Ax|$$

și astfel aplicînd acum lema 5.3 găsim :

$$(4)\quad ||Q_{\mu}^{n}x-Q_{\lambda}^{m}x||\leqslant\{[(n\mu-\lambda m)^{2}+n\mu(\lambda-\mu)]^{1/2}+$$

$$+[m\lambda(\lambda-\mu)+(m\lambda-n\mu)^{2}]^{1/2}\}|Ax|.$$

Fie acum $\mu=\dfrac{t}{n}$ și $\lambda=\dfrac{t}{m}$; inegalitatea de mai sus devine :

$$||Q_{\frac{t}{n}}^{n}x-Q_{\frac{t}{m}}^{m}x||\leqslant 2t\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{n}\right)^{1/2}|Ax|\text{ și deci }\exists\lim_{n\to\infty}Q_{\frac{t}{n}}^{n}(x).$$

Atunci, cum $Q_{\frac{t}{n}}^{n}$ sînt lipschitziene, $S_{t}(x)=\lim\limits_{n\to\infty}Q_{\frac{t}{n}}^{n}(x)$ există pentru

$x \in D(A)$ şi S_t e tot lipschitziană. Evident, S_t lasă domeniul $D(A)$ invariant. Acum, dacă $x \in D(A)$ şi τ, $t \geqslant 0$, să luăm limita în (4) cu $n = m$, $\mu = \frac{t}{n}$, $\lambda = \frac{\tau}{n}$ şi găsim :

$$\| S_\tau(x) - S_t(x) \| \leqslant |Ax| \, (\tau - t)$$

şi deci $S_t(x)$ este Lipschitz continuă.

Vom verifica acum proprietatea de semigrup : $S_{t+\tau}(x) = S_t S_\tau(x)$.
Cum $S_t = \lim\limits_{n\to\infty} Q^n_{\frac{t}{n}}$

atunci $(S_t)^m = \lim\limits_{n\to\infty}\left(Q^n_{\frac{t}{n}}\right)^m = \lim\limits_{n\to\infty}\left(Q^m_{\frac{t}{n}}\right)^n$

şi de aceea

$$S_{mt} = \lim_{n\to\infty} Q^n_{mt/n} = \lim_{n\to\infty} Q^{mk}_{mt/m} = \lim \, (Q^m_{t/k})^k = (S_t)^m .$$

Fie l, k, r, $s \in N$; atunci :

$$S_{\frac{l}{k}+\frac{r}{s}} = S_{\frac{ls+kr}{ks}} = \left(S_{\frac{1}{ks}}\right)^{ls+kr} = \left(S_{\frac{1}{ks}}\right)^{ls}\left(S_{\frac{1}{ks}}\right)^{kr} = S_{\frac{l}{k}} \cdot S_{\frac{r}{s}}$$

şi deci $S_{t+\tau} = S_t \, S_\tau$ au loc dacă t, τ sînt raţionale.

Din continuitatea în t şi Lipschitz — continuitatea în x a lui S rezultă că acesta are loc pentru $\forall t, \tau > 0$.

q.e.d.

PROPOZIŢIA 5.1. *Fie A acretiv şi u soluţia (CP) formulată pentru A cu $x \in D(A)$. Atunci*

$$\left\| \frac{du}{dt}(t) \right\| = |Au(t)| \leqslant |Ax| \quad \text{a.p.t. în } (0, +\infty). \tag{5}$$

Demonstraţie. Fie Ω mulţimea punctelor din $(0, \infty)$ în care $u(t) \in DA)$, e diferenţiabilă, şi $0 \in \frac{du}{dt} + Au$; vom demonstra că (5) are loc pentru $t \in \Omega$.

Fie $s\geqslant 0$ astfel încît $u(s)\in A$. Avem

$$||u(t)-u(s)||\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ ||u(t)-u(s)|| = <x^*, \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(t)>$$
a.p.t.

$t\geqslant 0$ și $\forall x^*\in\mathfrak{J}(u(t)-u(s))$. Fie $y(t) = -\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(t)\in Au(t)$; pentru

$\forall y\in Au(s)$, există $x_0^*\in\mathfrak{J}(u(t)-u(s))$, astfel încît :

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}||u(t)-u(s)||^2 = -<x_0^*, y(t)> \leqslant <x_0^*, y)> \leqslant ||y||\ \ ||u(s)-$$
$$-u(t)||$$

din cauza acretivității lui A.

De aici rezultă că $||u(t)-u(s)||\leqslant||y||\ (t-s)$, $\forall y\in Au(s)$ și $t\geqslant s$, deci

(6) $$||u(t)-u(s)||\leqslant|Au(s)|.\ \ (t-s),\quad t\geqslant s.$$

Dacă $s\in\Omega$ (6) implică $\left\|\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(t)\right\|\Bigg|_{t=s}\leqslant|Au(s)|$; dar $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\Bigg|_{t=s}\in -Au(s)$ și atunci $\left\|\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right\|\Bigg|_{t=s}=|Au(s)|$, $\forall s>0$. Fie $h>0$ și $v(t)=u(t+h)$. Evident $v(t)$ satisface $0\in\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}+Av$ a.p.t. în $(0,+\infty)$ și $v(0)=u(h)$.

Avem :

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}||v(t)-u(t)||^2 = ||v(t)-u(t)||\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ ||v(t)-u(t)|| =$$
$$= <x^*,\ y(t)-z(t)>$$

a.p.t. $t\geqslant 0$, unde $y(t)\in Au(t)$, $z(t)\in Av(t)$ și $x^*\in\mathfrak{J}(u(t)-v(t)$. De aceea $||v(t)-u(t)||$ este o funcție descrescătoare t. În particular :

$$||u(t+h)-u(t)||=||v(t)-u(t)||\leqslant v(0)-u(0)||=u(h)-x||\leqslant h|Ax|.$$

Deci pentru $\forall t\in\Omega$, avem $\left\|\frac{du}{dt}(t)\right\| \leqslant |Ax|$.

q.e.d.

LEMA 5.4. *Fie C închisă și convexă, T o contracție : $C\to C$ și u soluția (CP) formulată pentru $I-T$ dată de lema 3.3 Atunci :*

(7) $$\|u(n)-T^n x\| \leqslant \sqrt{n}\ \|x-Tx\|.$$

Demonstrația. Începem prin a observa că dacă :

$$\varphi_n\in L^1_{\rm loc}\ [0,+\infty), \quad \text{iar } \varphi_0(t)\leqslant t \text{ și } \varphi_n t)\leqslant ne^{-t}+\int_0^t e^{s-t}\varphi_{n-i}(s)\,ds$$

atunci are loc :

(8) $$\varphi_n(t) \leqslant [(n-t)^2+t]^{1/2}.$$

Într-adevăr, pentru $n=0$,8) are loc ; dacă ea este adevărată pentru $n-1$ atunci :

$$\varphi_n(t) \leqslant ne^{-t}+\int_0^t e^{(s-t)}[(n-1-s)^2+s]^{1/2}\,ds = \psi_n(t),e^{-t}$$

cu :

$$\psi_n(t) = n+\int_0^t e^s[(n-1-s)^2+s]^{1/2}\,ds.$$

Trebuie să arătăm că $\psi_n(t)\leqslant e^t[(n-t)^2+t]^{1/2}$
Cum $\psi_n(0)=n$, este suficient să demonstrăm că :

$$\psi_n'(t) = e^t[(n-1-t)^2+t]^{1/2}\leqslant e^t[(n-t)^2+t]^{1/2}+$$

$$+\frac{1}{2}e^t[(n-t)^2+t]^{-1/2}(1-2n+2t)=\{e^t[(n-t)^2+t]^{1/2}\};$$

dar această inegalitate rezultă prin ridicare la pătrat.

Aplicaţia $I-T$ e acretivă după cum rezultă dintr-un calcul uşor şi atunci, după lema precedentă, avem:

$$(9)\quad \| u(t)-x \| = \left\| \int_0^t \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s}(s)\,\mathrm{d}s \right\| \leqslant \int_0^t \left\| \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s}(s) \right\| \mathrm{d}s \leqslant \int_0^t \|(I-T)x\|\,\mathrm{d}s = t\,\|(I-T)x\|.$$

Fie: $\varphi_n(t) = \| u(t)-T^n x \| \ \|(I-T)x\|^{-1}$; din $u(t)=e^{-t}x + \int_0^t e^{s-t}\, Tu(s)\,\mathrm{d}s$

rezultă $u(t)-T^n x = e^{-t}(x-T^n x) + \int_0^t e^{s-t}\,[Tu(s)-T^n x]\,\mathrm{d}s$, deci

$$(10)\quad \| u(t)-T^n x \| \leqslant e^{-t}\,\| x-T^n x \| + \int_0^t e^{s-t}\,\| u(s)-T^{n-1}x \|\,\mathrm{d}s.$$

Dar $\| x-T^n x \| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \| T^{k-1}x - T^k x \| \leqslant n\,\|(I-T)x\|$

şi deci (9) şi (10) arată că $\varphi\ n$ astfel definit verifică:

$$\varphi_0(t) \leqslant t,\ \varphi_n(t) \leqslant n e^{-t} + \int_0^t e^{s-t}\,\varphi_{n-1}(s)\,\mathrm{d}s$$

şi atunci are loc (8), în care facem $t=n$. Se obţine:

$$\varphi_n(t) \leqslant \sqrt{n} \text{ adică (7).}$$

q.e.d.

Să introducem următoarea condiţie pentru aplicaţiile: $X \to 2^X$

(R') A este acretivă şi $R(I+\lambda A) \supset \overline{\text{conv } D(A)}$, $0<\lambda<\varepsilon$ şi $G(A)$ este închisă.

Fie $S_\lambda : \overline{\text{conv } D(A)}$ definit de ecuaţia:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} S_{\lambda,t}(x) + A_\lambda S_{\lambda,t}(x) = 0 \quad t \geqslant 0.$$

Avem

PROPOZIŢIA 5.2. *Dacă* $A : X \to 2^X$ *verifică condiţia* R', *atunci pentru orice* $x \in D(A)$, *avem* :

$$\| S_{\lambda,t}(x) - S_t(x) \| \leqslant (2\lambda + 3\sqrt{t\lambda})\, |Ax| \tag{11}$$

Demonstraţie. Fie m astfel încît $t = m\lambda + \delta$, $0 \leqslant \delta < \lambda$

avem

$$\begin{aligned} \| S_{\lambda,t}(x) - S_t(x) \| &\leqslant \| S_{\lambda,t}(x) - S_{\lambda,m\lambda}(x) \| + \\ &\| S_{\lambda,m\lambda}(x) - Q_\lambda^m x \| + \| Q_\lambda^m x - S_{m\lambda}(x) \| + \| S_{m\lambda}(x) - S_t(x) \| \end{aligned} \tag{12}$$

unde S_t e limita dată de teorema 5.1.

Ultimul termen admite evaluarea :

$$\| S_{m\lambda}(x) - S_t(x) \| \leqslant \| x - S_\delta(x) \| = \lim_{n\to\infty} \| x - $$

$$- Q^n_{\delta/n} x \| \leqslant \delta |Ax| \leqslant Ax|.\lambda.$$

Primul termen admite şi el o astfel de evaluare ; într-adevăr, cum : S_λ este un semigrup pe $\overline{\text{conv } D(A)}$,

$\left\| \dfrac{d}{dt} S_\lambda(t)x \right\| \Big|_{t=0} = \| A_\lambda x \| \leqslant |Ax|$ este o constantă Lipschitz pentru $S_{\lambda,t}(x)$; de aceea

$$\| S_{\lambda,m\lambda}(x) - S_{\lambda,t}(x) \| \leqslant \delta |Ax| \leqslant \lambda |Ax|.$$

Acum vom evalua penultimul termen din (12) cu ajutorul inegalităţii (4) din teorema 5.1 :

$$\| Q_\lambda^m(x) - S_{m\lambda}(x) \| \leqslant 2m\lambda \left(\frac{1}{\sqrt{m}}\right) |Ax| \leqslant 2\sqrt{\lambda t}\, |Ax|$$

şi termenul al doilea se evaluează astfel, folosind lema 5.4 cu m în loc de n şi $u(t) = S_{\lambda,\lambda t}(x)$:

$$\| S_{\lambda,m\lambda}(x) - Q_\lambda^m x \| \leqslant \sqrt{m}\, \| x - Q_\lambda x \| \leqslant \sqrt{m}\,\lambda |Ax| \leqslant \sqrt{\lambda t}\, |Ax|.$$

Rezumînd aceste inegalităţi se obţine 11).

q.e.d.

DEFINIŢIA 5.1. *Fie funcţiile* $<.,.>_i$, $<.,.>_s$: $X \times X \to R$, *definite astfel* :

$$<x,y>_i = \inf \{<y^*,x>/y^* \in \mathfrak{J} y\}$$

şi

$$<x,y>_s = \sup \{<y^*,x>/y^* \in \mathfrak{J} y\} = -<-x,y>_i.$$

Are loc :

LEMA 5.5. *Fie* $x, y, z \in X$; *atunci*

a) $<\alpha y+x,y>_j = \alpha \|y\|^2 + <x,y>_j$, $\alpha \in R$ $\quad j=i$ *sau* s

b) $<\beta x, \gamma y>_j = \gamma\beta <x,y>_j$ $\gamma,\beta \geqslant 0$ şi $\quad j=i$ *sau* s

c) $<z+x,y>_j \leqslant \|z\| \; \|y\| + <x,y>_j$ $\quad j=i$ *sau* s

d) $<.,.>_s : X \times X \to R$ *este superior semicontinuă.*

Demonstraţie. Cum a), b) şi c) sînt imediate ne rămîne să demonstrăm doar *d*).

d) Fie $x_n \to x_0$ şi $y_n \to y_0$ în X; vom arăta că

$\overline{\lim\limits_n} <x_n \, y_n>_s \leqslant < x_0,y_0>_s$. Putem presupune că $J \lim\limits_n <x_n, y_n>_s$.

Cum $\mathfrak{J} y_n$ este compactă în topologia slabă, există $y_n^* \in \mathfrak{J} y_n$ astfel încît $<x_n, y_n>_s = <y_n^*, x_n>$.

Mulţimea $\{y_n^*\}_n$ este mărginită în X^*; fie atunci y_0^* un punct limită al lui $\{y_n^*\}$ în topologia slabă ; avem :

$$\|y_0^*\| \leqslant \underline{\lim\limits_n} \; \|y_n^*\| = \underline{\lim\limits_n} \; \|y_n\| + = \|y_0\| \text{ şi}$$

$$\|y_0\|^2 = | \lim\limits_n \|y_n\|^2 = \lim\limits_n <y_n^*, y_n> = <y_0^*, y_0>,$$

$$\text{de unde } \|y_0\| \leqslant \| y_0^*\|$$

deci $\| y_0^*\| = \| y_0\|$ şi $\|y_0\|^2 = < y_0^*, y_0>$; aceasta înseamnă că $y_0^* \in \mathfrak{J} y_0$. Cum $x_n \to x_0$, avem :

$$\lim\limits_n <x_r, y_n>_s s = \lim\limits_n <y_n^*, x_n> = <y_0^*, x_0> \leqslant <x_0,y_0>_s$$

adică ceea ce trebuia demonstrat.

LEMA 5.6. *Fie* $A : X \to 2^X$ satisfăcînd R' şi fie :

$$S_t(x) = \lim_n \left(I + \frac{t}{n} A \right)^{-n} x, \quad t \geqslant 0,\ x \in \overline{D(A)}.$$

Dacă $x, x_0 \in A$ *şi* $y_0 \in A x_0$, *atunci*

$$\sup_{x^* \in \mathfrak{J}_{x-x_0}} \lim_{t \searrow 0} < x^*, \frac{St(x)-x}{t} > \leqslant < y_0, x_0 - x >_s.$$

Demonstraţie. Fie $x_\lambda = x_0 + \lambda y_0$; avem :

$$(13) \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \| S_{\lambda,t}(x) - x_\lambda \|^2 = 2 < -A_\lambda S_{\lambda,t}(x), S_{\lambda,t}(x) - x > \leqslant$$

$$\leqslant -2 < A_\lambda S_{\lambda,t}(x) - A_\lambda x_\lambda, S_{\lambda,t}(x) - x_\lambda > s + 2 < A_\lambda x_\lambda, x_\lambda - S_{\lambda,t}(x)) >.$$

Avem şi

$$< A_\lambda u - A_\lambda v, u - v > s \geqslant < A_\lambda u - A_\lambda v, u - v > \quad i \geqslant 0.$$

Cum $A_\lambda x_\lambda = y_0$, (13) devine :

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \| S_{\lambda,t}(x) - x_\lambda \|^2 \leqslant 2 < y_0, x_\lambda - S_{\lambda,t}(x) >_s s$, de unde rezultă imediat :

$$(14) \quad \| S_{\lambda,t}(x) - x \|^2 - \| x - x_\lambda \|^2 \leqslant 2 \int_0^t < y_0, x_\lambda - S_{\lambda,\tau}(x) > s \ \mathrm{d}\tau$$

(integrandul e continuu după lema 5.5).

Dar $x_\lambda = x_0 + \lambda y_0 \to x_0$ şi atunci după propoziţia 5.2. că $\lim_{\lambda \searrow 0} S_{\lambda,t}(x) = S_t(x)$. Trecem la limită în (14) şi găsim

$$(15) \quad \| S_t(x) - x_0 \|^2 - \| x - x_0 \|^2 \leqslant 2t \int_0^1 < y_0, x_0 - S_{t,\tau}(x) >_s \mathrm{d}\tau.$$

Dacă $x^* \in \mathfrak{J}(x - x_0)$, atunci

$$\| S_t(x) - x_0 \|^2 \geqslant \| x - x_0 \|^2 + 2 < x^*, S_t(x) - x >$$

astfel încît (15) devine:

$$< x^*, 2\,\frac{S_t(x)-x}{t} > \leqslant 2\int_0^1 < y_0,\ x_0 - S_{t\tau}(x) >_s d\tau$$

în care luînd lim cînd $t \to 0$, se obține lema.

q.e.d.

TEOREMA 5.2. *Fie o aplicație $A: X \to 2^X$ verificînd condiția (R'), Dacă $x \in D(A)$ și $t_0 > 0$, condițiile* i) *și* ii) *de mai jos sînt echivalente pentru $u: [0, t_0] \to X$*

i) *u este o soluție a (CP) pentru aplicația A*

ii) $u(t) = \lim\limits_n \left(I + \dfrac{t}{n} A\right)^{-u} x$, $t \in (0, t_0)$ *și $u(t)$ este tare diferențială* a.p.t. $t \geqslant 0$.

Observația 5.1. Teorema aceasta a apărut ca urmare a faptului că s-a constatat că există semigrupuri de contracții în spații Banach care nu au generator infinitezimal, dar care apar ca limite de tipul (1), De asemeni există operatori A satisfăcînd condiția (R') pentru care (CP) nu are soluții. Exemple pentru a ilustra aceste comportări vor fi date imediat.

Mai observăm că dacă X este reflexiv sau A este liniar, condiția de diferențiabilitate din ii) este satisfăcută.

Drept consecință a acestei teoreme se obține:

COROLAR. *Fie X reflexiv și A o aplicație maximal acretivă satisfăcînd condiția (R'); atunci pentru orice $x \in D(A)$, problema (CP) pentru A are o soluție unică $u: [0, +\infty) \to X$, dată de formula exponențială:*

$$u(t) = \lim \left(I + \frac{t}{n} A\right)^{-n} x \qquad t \geqslant 0.$$

Demonstrația teoremei 5.2 i)$\Rightarrow$ii)

$$\text{Fie ecuațiile} \begin{cases} \dfrac{du_\lambda}{dt} + A_\lambda u_\lambda = 0 & u_\lambda(0) = x \text{ și} \\[2ex] \dfrac{dv_\lambda}{dt} + (I - Q_\lambda) v_\lambda = 0, & v_\lambda(0) = x. \end{cases}$$

Avem evident : $u_\lambda(t) = v_\lambda(t/\lambda)$ şi cu lema 5.4 avem :

$$\| v_\lambda(n) - Q_\lambda^n x \| \leqslant \sqrt{n} \| (I - Q_\lambda) x \| \leqslant \sqrt{n}\, \lambda \| A_\lambda x \|$$

$$\text{şi deci } \| u_\lambda (n\lambda) - Q_\lambda^n x \| \leqslant \sqrt{n}\, \lambda \| A_\lambda x \| .$$

Dacă $\lambda_k \searrow 0$ şi $n_k = [t/\lambda_k]$ atunci $n_k \lambda_k \to +\infty$
şi după teorema 5.1. avem $Q_{\lambda_k}^{n_k}(x) \xrightarrow[k]{} u(t)$. Astfel :

$$\| u_{\lambda_k} (n_k \lambda_k) - Q_{\lambda_k}^n x \| \leqslant \sqrt{n_k \lambda_k} \| A_{\lambda_k} x \| \leqslant \frac{t}{\sqrt{n_k}} \| A x \|$$

şi deci

$$\| u_{\lambda_k} (n_k \lambda_k) - u_{\lambda_k}(t) \| \leqslant \| A x \| (t - n_k \lambda_k).$$

Astfel $u_{\lambda_k}(t) \to u(t)$.

ii)$\Rightarrow$i). Fie $z \in \overline{D(A)}$ şi să presupunem că $S_t z = u(t,z)$ este tare diferenţiabilă în $t_0 > 0$ şi că deci :

$$S_{t_0+h}(z) = St_{t_1}(z) + hy + 0(h) \text{ cînd } h \to 0,$$

unde $y = \frac{d}{dt} S_t(z)|_{t=t_0}$. Vom arăta că $y \in -AS_{t_0}(z)$ şi cum ştim din teorema 5.1. că $S_t(z)$ este Lipschitz continuă pe mulţimile mărginite, teorema va fi demonstrată.

Dacă $0 < \lambda < t_0$, există prin ipoteză x_λ şi $y_\lambda \in Ax_\lambda$ astfel încît :

$$(16) \qquad x_\lambda + \lambda y_\lambda = S_{t_0 - \lambda}(z) = S_{t_0}(z) - \lambda y + 0(\lambda).$$

Vom arăta că $x_\lambda \to S_{t_0} z$ şi $y_\lambda \to -y$ sînt $\lambda \searrow 0$ şi atunci

$$[S_{t_0} z, -y] \in G(A), \text{ pentru că } G(A) \text{ e închis.}$$

Fie în inegalitatea din lema 5.6, $x_0 = x_\lambda$, $y_0 = y_\lambda$ şi $x = S_{t_0} z$. Cum $\mathfrak{J}(x_\lambda - S_{t_0}(z))$ este o mulţime slab compactă în X, putem înlocui supremul din dreapta cu maxim.

Aceasta înseamnă că există $y^* \in \mathfrak{J}(x_\lambda - S_{t_0}(z))$ astfel încît:

$$< x^*, y > \leqslant < y^*, y_\lambda >, \forall\ x^* \in \mathfrak{J}(S_{t_0}(z) - x_\lambda).$$

Făcînd $x = -y^*$, se obține folosind (16)

$$< y^*, S_{t_0}(z) - x + 0(\lambda) > \geqslant 0.$$

Cum $y^* \in \mathfrak{J}(x_\lambda - S_{t_0}(z))$, rezultă:

$$\| S_{t_0}(z) - x_\lambda \|^2 \leqslant 0(\lambda) \| x_\lambda - S_{t_0}(z) \|.$$

Astfel $\lim\limits_{\lambda \to 0} \dfrac{S_{t_0}(z) - x_\lambda}{\lambda} = 0$ și (16) devine

$$y_\lambda + y = \frac{S_{t_0}(z) - x_\lambda}{\lambda} + \frac{0(\lambda)}{\lambda} \xrightarrow[\lambda]{} 0 \text{ și } \lim_\lambda x_\lambda = S_{t_0} z.$$

q.e.d.

Exemplul 1. Vom da acum un exemplu de semigrup de contracții neliniare, pentru care condiția (R) este verificată [137].

Fie $X = L^2[a,b]$ și $A : X \to X$ definit astfel: fie $\mathfrak{L}^2[a,b]$ spațiul tuturor funcțiilor pe $[a,b]$, măsurabile și de pătrat sumabil pe $[a,b]$; $D(A)$ va fi mulțimea acelor $x \in X$ pentru care există o funcție reprezentativă $x(s) \in \mathfrak{L}^2[a,b]$, monoton nedescrescătoare, cu $|x(s) - x(s')| \leqslant |s - s'|$ și $x(a) = 0$.

Aceasta înseamnă: (derivata x' existînd a.p.t.)

$$x(s) = \int_a^s x'(\sigma) d\sigma, \quad x'(\sigma) \in \mathfrak{L}^2[a,b] \text{ și } 0 \leqslant x'(s) \leqslant 1 \text{ a.p.t.}$$

Definim pe Ax ca elementul din X pentru care $-x(s)x'(s)$ este o funcție reprezentativă.

A este disipativ; într-adevăr fie $x,y \in D(A)$; atunci

$$-2 < Ax - Ay, x - y > = \int_a^b (x(s) + y(s))' (x(s) - y(s))^2 \, ds +$$

$$+ \int_a^b (x(s)^2 - y(s)^2) (x(s) - y(s))' \, ds = (x(s) + y(s)) (x(s) - y(s))^2 \Big|_a^b -$$

$$-2 \int_a^b (x(s)^2 - y(s)^2) (x(s) - y(s))' \, ds + \int_a^b (x(s)^2 - y(s)^2) (x(s) - y(s))' \, ds$$

deci

$$< Ax - Ay, x - y > = -\frac{1}{2} \int_a^b (x'(b) + y'(s)) (x(s) - y(s))^2 ds -$$

$$-\frac{1}{2} (x(s) - y(s))^2 (x(s) + y(s) \Big|_a^b \leqslant 0$$

deci A este disipativ. Vom arăta acum că A este demiînchis. Fie $x_n \in D(A)$, $x,y \in X$, $x_n \to x$ şi $Ax_n \xrightarrow[n]{} y$; putem scrie:

$$2^{-1} x_n^2(s) = \int_a^s x_n(\sigma) x_n'(\sigma) \, d\sigma, \text{ dar}$$

$$\int_a^s x_n(\sigma) x_n'(\sigma) \, d\sigma \to \int_a^s y(\sigma) \, d\sigma \qquad \forall s \in [a,b] \text{ şi}$$

convergenţa pe $[a,b]$ este uniformă în s; astfel $x_n^2(s)$ converge uniform către $z(s) = -2 \int_a^s y(\sigma) d\sigma$. Pe de altă parte, există un subşir $\{x_{n'}\}$ astfel încît $x_{n'}(s) \xrightarrow[n']{} x(s)$ a.p.t. După teorema Ascoli-Arzela, există un alt subşir $\{x_{n''}\} \subset \{x_{n'}\}$ pentru care $x_{n''}(s) \xrightarrow[n'']{} u(s)$, uniform în s; evident $u(s)$ este monoton nedescrescătoare, $u(a) = 0$ şi $|u(s) - u(s)'| \leqslant |s - s'|$. Cum $u(s) = x(s)$ a.p.t. $u(s)$ este o funcţie reprezentativă pentru x şi deci $x \in D(A)$. Cum $x_{n'}^2(s) \underset{n'}{\to} u^2(s)$, rezultă : $u^2(s) = z(s)$ a.p.t. ; dar $u^2(s)$ şi $z(s)$ sînt continue, deci $u^2(s) = z(s)$. Prin urmare

$$2^{-1} u^2(s) = - \int_a^s y(\sigma)\, d\sigma \text{ şi deci } - u(s)u'(s) = y(s)$$

a.p.t., adică $Ax = y$.

Evident, mulţimea $D(A)$ este convexă şi închisă deoarece după cum am văzut mai sus, $x_n \in D(A)$ şi $x_n \underset{n}{\to} x$, implică $x \in D(A)$.

Vom arăta că A verifică condiţia (R) ; fie pentru aceasta $\lambda > 0$ şi $v(s)$ monoton nedescrescătoare pe $[a,b] / |v(s) - v(s')| \leq |s-s'|$ şi $v(a) = 0$.

Există o soluţie unică $x(s)$ a ecuaţiei diferenţiale $x(s) + \lambda x(s)\, x'(s) = v(s)$, astfel încît $x(s)$ să fie monoton nedescrescătoare pe $[a,b]$, $0 \leq x'(s) \leq 1$ şi $x(a) = 0$. Aceasta înseamnă că $x \in D(A)$ şi $(I - \lambda A)x = v$. Rezultă atunci (R).

Exemplul 2. Vom da acum un exemplu de nediferenţiabilitate [52]. Fie K mulţimea închisă, convexă a funcţiilor $f \in C[0,1]$ care satisfac $0 \leq f(x) \leq x$ cu $0 \leq x \leq 1$ şi $(S_t f)(x) = (t + f(x)) \wedge x$ pentru $t \geq 0$ şi $0 \leq x \leq 1$. Se verifică uşor că $S_t f$ este diferenţiabilă în $t = 0$ dacă şi numai dacă $f(x) = x$.

Totuşi $S_t f = \lim\limits_n \left(I + \dfrac{t}{n} A\right)^{-n} f$, unde A este dat prin :

$$G(A) = \bigcup_{\lambda > 0} \left\{ (\lambda + f) \wedge x, \frac{f - (\lambda + f) \wedge x}{\lambda} \; ; \; f \in K \right\}.$$

Exemplul 3. Cum în spaţiile Banach generale semigrupurile de contracţii neliniare nu pot fi descrise prin noţiunea de generator, s-ar putea spera, din cele de mai sus, că aceasta s-ar putea face cu ajutorul formulelor exponenţiale. Dar şi aici sînt dificultăţi după cum se arată următorul exemplu chiar în R^2, pentru care există o aplicaţie A verificînd :

$$S_t = \lim_n \left(I + \frac{t}{n} A\right)^{-n}$$

dar aceasta nu este unică.

Fie $X=R^2$ cu norma $\|(a,b)\|=\max(|a|,|b|)$ şi $g:[-1,1]\to$ $\to[-1,1]$ continuă, descrescătoare şi astfel încît $g(-1)=1$ şi $g(1)=-1$. Vom defini aplicaţia $Ag: R^2\to R^2$ astfel :

$$(16)\ D(A_g)=R^2 \text{ şi } A_g(a,b)=\begin{cases}(-1,1) & \text{dacă } b>a\\ \{(x,g(x))/-|\leqslant x\leqslant 1\}\ b=a\\ (+1-1) & \text{dacă } b<a.\end{cases}$$

Vom arăta că A_g este acretiv ; pentru aceata trebuie să verificăm că :

$$(17)\quad \|(a_1,b_1)-(a_2,b_2)+\lambda((c_1,d_1)-(c_2,d_2))\|\geqslant\|(a_1,b_1)-(a_2,b_2)\|$$

pentru $\lambda>0$ şi $(c_i,d_i)\in A_g(a_i,\ b_i)$.

Vom considera următoarele 4 cazuri :

i) $b_1>a_1$ şi $b_2<a_2$

ii) $b_1>a_1$ şi $b_2=a_2$ sau $b_1<a_1$ şi $b_2=a_2$

iii) $b_1=a_1$ şi $b_2=a_2$

iv) $b_1>a_1$ şi $b_2>a_2$ sau $b_1<a_1$ i $b_2<a_2$.

În cazul iv) (17) devine o egalitate ; pentru i) (17) devine :
$\max(|a_1-a_2-2\lambda|,\ |b_1-b_2+2\lambda|)\geqslant\max(a_1-a_2|,|b_1-b_2|)$,
unde $b_1-b_2>a_1-a_2$. Dacă $|a_1-a_2|\geqslant|b_1-b_2|$, rezultă că $0>a_1-a_2$ şi deci $|(a_1-a_2)-2\lambda|\geqslant|a_1-a_2|$ pentru $\lambda\geqslant0$. Dacă $|b_1-b_2|\geqslant|a_1-a_2|$, atunci $b_1-b_2>0$ şi $|(b_1-b_2)+2\lambda|\geqslant|b_1-b_2|$, adică (17) are loc în cazul *i*). Cazul ii) se tratează analog, iar în cazul iii) (17) devine :

$$\max(|(a_1-a_2)+\lambda(x-y)|,|(b_1-b_2)+\lambda(g(x)-g(y)|)\geqslant$$

$$\geqslant\max(|a_1-a_2|,\ |b_1-b_2|).$$

pentru $-1\leqslant x,y<+1$. Cum $a_1-a_2=b_1-b_2$ iar $x-y$ şi $g(x).\ g(y)$ nu pot avea ambele acelaşi semn strict, rezultă şi iii).

Vom arăta acum că $R(I+\lambda A_g)=R^2$; pentru aceasta observăm că

$$(18)\qquad (a,b)=(a+\lambda,b-\lambda)+\lambda(-1,+1)\ \text{ dacă } 2\lambda<b-a$$

(18') $(a, b) = (a - \lambda, b + \lambda) + \lambda(1, -1)$ dacă $2\lambda < a - b$

(18'') $(a,b) = (a - \lambda z, b - \lambda g(z)) + (\lambda z, g(z))$

dacă $|b - a| \leqslant 2\lambda$, unde $g(z) - z = \dfrac{b-a}{\lambda}$.

Aceasta ne arată tocmai faptul că orice element din R^2 se scrie sub forma $u + \lambda v$, $(u, v) \in G(A_g)$.

Din (18) și (18') rezultă că dacă $\pm(d - c) > \dfrac{2t}{n}$ atunci $\left(I + \dfrac{t}{n} A_g\right)^{-1} (c,d) = \left(c \pm \dfrac{t}{n}, d \mp \dfrac{t}{n}\right)$ deci dacă $\pm(d - c) > 2t$, avem:

(19) $$\left(I + \frac{t}{n} A_g\right)^{-1} (c, d) = (c \pm t, d \mp t).$$

Analog (18'') ne dă:

(20) $$\left(I + \frac{t}{n} A_g\right)^{-n} (c, c) = (c - tx_g, c - tx_g),$$

unde $x_g = (I - A_g)^{-1}(0)$.

Să observăm că $(I - A_g)(-1) = -2$ și $(I - A_g)(1) = 2$; cum $I - Ag$ este strict monotonă și continuă, ea va lua valoarea 0 numai într-un punct și deci x este bine definit.
Din (19) și (20) rezultă:

$$S_g(t)(a,b) = \begin{cases} (a \pm t, b \mp t) \text{ dacă } 2t \leqslant \pm(b - a) \\ \left[\dfrac{a+b}{2} - \left(t - \dfrac{|b-a|}{2}\right) x_g, \dfrac{a+b}{2} - \left(t - \dfrac{b-a}{2}\right) x_g\right] \end{cases}$$

$$\text{dacă } 2t \geqslant |b - a|.$$

Prin urmare S_g depinde de g numai prin valoarea x_g; atunci dacă luăm de exemplu $g(x) = -x$ și $h(x) = -x^3$, atunci $x\ Ag \neq A_h$, dar $S_g = S_h$ deoarece $x_g = x_h = 0$.

Referințe. Ecuațiile de evoluție de forma $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} \in -Au$, $u(0)=u_0$, cu A maximal acretiv, multivoc, au fost abordate de Komura [100], și studiate apoi de Kato [96]—[98], Browder [33], [39], Crandall-Pazy [50] — [51], Brezis-Pazy [21] — [23], Oharu [136], [137] Miyadera [123]—[126] Dorroh [66]—[69] în spații Banach particulare.

Cu această teorie în cadrul spațiilor Banach generale s-a ocupat Crandall-Liggett [52] și Brezis-Pazy [21]. Rezultatele expuse în acest paragraf sînt luate din [21], [52].

Amintim că în [23] Brezis și Pazy dau o teoremă generală de convergență pentru semigrupurile de operatori neliniari în spații Banach generale, care este aplicată pentru a obține o teoremă de aproximare pentru astfel de semigrupuri. Aceste rezultate extind pe cele ale lui Trotter și Chernoff din cazul liniar și cea mai mare parte a rezultatelor lui Miyadera [124] [126] și Miyadera și Oharu [127] din cadrul neliniar.

§ 6. APLICAȚII DE DUALITATE POZITIVE, OPERATORI T-ACRETIVI ȘI SEMIGRUPURI DE T-CONTRACȚI

Fie X un spațiu Banach reticulat; vom nota prin P conul elementelor pozitive din X, prin $x_+ = \sup(x,0)$ $x_- = \sup(-x,0)$, $|x| = x_+ + x_-$ și $x^\perp = \{y \in X,\ \inf(|x|,|y|)=0\}$.

Se știe că aplicațiile $x \to |x|$, $x \to x^\perp$ și $(x,y) \to \sup(x,y)$ sînt continue [54].

Definiția 6.1. *Se numește aplicație de dualitate pozitivă aplicația* $\mathfrak{J}_+ : P \to 2^{X^*}$ *dată prin*

$$\mathfrak{J}_+ x = \{ x^* \geqslant 0, < x^*, x > = \|x^*\| \ \|x\|,\ \|x^*\| = \|x\|,\ < x^*, y > = 0\ \forall y \in x^\perp \}.$$

Evident $\mathfrak{J}_+ x \subset \mathfrak{J} x$, unde $\mathfrak{J}$ este aplicația de dualitate normalizată pe X.

Exemplu. Dacă $X = L^p(S,\Sigma,p)$, $1 < p < +\infty$, iar μ este o măsură pozitivă, atunci pentru orice $f \in X, f \geqslant 0$ $\mathfrak{J}_+ f = \mathfrak{J} f$.

Propoziția 6.1. *Pentru orice* $x_0 \in P$, $\mathfrak{J}_+ x_0 \neq \varnothing$.

Demonstrație. $x_0^{\perp}$ este o submulțime închisă, liniară a lui X, deoarece aplicația $y \to \inf(|x_0|, |y|)$ este continuă. După teorema lui Hahn Banach, există $x^* \in X^*$ astfel încît

$$< x^*, x_0 > = \| x^* \| \, \|x_0\|, \quad \| x^* \| = \| x_0 \| \text{ și } < x^*, y >= 0 \; \forall y \in x_0^{\perp}$$

Fie $<x_+^*, y> = \sup\{<x^*, z>, 0 \leqslant z \leqslant y\}$; evident x_+^* este definită pe P, este pozitivă, pozitiv omogenă și nulă pe $P \cap x^{\perp}$. În plus x_+^* este aditivă; într-adevăr, fie $y_1, y_2 \in P$; $\forall z \in P$ cu $z \leqslant y_1 + y_2$, există (lema de descompunere a lui Riesz [54]) z_1 și z_2 astfel încît

$$0 \leqslant z_1 \leqslant y_1, \; 0 \leqslant z_2 \leqslant y_2, \; z = z_1 + z_2.$$

Astfel $< x_+^*, \; y_1 + y_2 > = \sup\{< x^*, z_1 + z_2 >, \; 0 \leqslant z_1 \leqslant y_1, \; 0 \leqslant$

$\leqslant z_2 \leqslant y_2\} = \sup\{< x^*, z_1 >; 0 \leqslant z_1 \leqslant y_1\} + \sup\{<x^*, z_2>, \; 0 \leqslant z_2 \leqslant y_2\}.$

Să prelungim pe x_+^* prin $\tilde{x}_+^*$ la întreg X, punînd

$$\forall x \in X < \tilde{x}_+^*, \; x > = < x_+^*, \; x_+ > - < x_+^*, x - >.$$

Se verifică ușor că $\tilde{x}_+^*$ este bine definită, liniară, pozitivă și nulă pe $x_0^{\perp}$. Să arătăm că $\tilde{x}_+^* \in \mathfrak{I}_+(x_0)$.

Dacă $y \in P$, avem $<x_+^*, y> \leqslant \| x^* \| \; \|y\|$, deoarece

$$<x^*, z> \leqslant \| x^* \| \; \|z\| \leqslant \| x^* \| \; \|y\|, \text{ pentru } 0 \leqslant z \leqslant y.$$

Rezultă că pentru orice $x \in X$, avem

$$|<\tilde{x}_+^*, \; x>| = |<x_+^*, x_+> - <x_+^*, x_- >| \leqslant \sup$$
$$(<x_+^*, x_+ >, <x_+^*, x- >)$$
$$\leqslant \| x^* \| \sup \; (\| x_+ \|, \| x_- \| \leqslant \| x^* \| \; \| x \|$$

deci $\quad \| \tilde{x}_+^* \| \leqslant \| x^* \|$.

Atunci avem :

$$<x^*, x_0> \leqslant <x_+^*, x_0> = <\tilde{x}_+^*, x_0> \leqslant \| \tilde{x}_+^* \| \; \| x_0 \| \leqslant \|x_0\| \; \| x^* \| =$$
$$= \| x_0 \|^2 = < x^*, x_0 >$$

şi deci

$$< \tilde{x}_+^*, x_0 > = \| x_0 \| \; \| \tilde{x}_+^* \| \text{ şi } \| x_+^* \| = \| x_0 \|$$

prin urmare $\tilde{x}_+^* \in \mathfrak{J}_+(x_0)$.

q.e.d.

PROPOZIŢIA 6.2. *Fie $x \in P$ şi $y \in X$; atunci există $x_s^* \in \mathfrak{J}_+ x$, astfel încît*

$$\sup \{ < x^*, y > \mid x^* \in \mathfrak{J}_+ x \} = < x_s^*, y > =$$

$$= \| x \| \inf_{z \in x^{\perp}, b \in R_+} \lim_{\lambda \to 0+} \frac{\| x + \lambda \sup(y + z, -bx) \| - \| x \|}{\lambda}.$$

Vom da în prealabil :

LEMA 6.1. *Fie $x \in P$ şi*

$$\sigma(x,y) = \inf_{z \in x^{\perp}, b \in R_+} \lim_{\lambda \to 0+} \frac{\| x + \lambda \sup(y+z, -bx) \| - \| x \|}{\lambda}, \quad \forall y \in X.$$

Atunci :

1) $\sigma(x,y) \leqslant \| y_+ \|$

2) *$y \to \sigma(x,y)$ este subliniară şi pozitivă*

3) $\sigma(x, ax + y) = a \| x \| + \sigma(x,y) \qquad a \in R$

4) *dacă $z \in x^{\perp}$, $\sigma(x,y) = \sigma(x, y+z)$.*

Demonstraţie. 1) E suficient să luăm $b=0$ şi $z=0$ şi să majorăm pe $\sigma(x,y)$ cu ce se obţine

2) Pentru orice $y, y' \in X$, avem

$$\lim_{\lambda \to 0+} \frac{\| x + \lambda \sup(y + y' + z + z', -bx) \| - \| x \|}{\lambda}$$

$$\lim_{\lambda \to 0+} \frac{\| 2x + \lambda \sup(y + y' + z + z', -bx) \| - 2 \| x \|}{\lambda}$$

$$\lim_{\lambda \to 0+} \frac{\| x + \lambda \sup(y + z, -bx) \| - \| x \|}{\lambda} +$$

$$+ \lim_{\lambda \to 0+} \frac{\| x + \lambda \sup(y' + z', -bx) \| - \| x \|}{\lambda}$$

$\forall b \in R_+$, z şi $z' \in x^{\perp}$; prin urmare

$$\sigma(x,y+y') \leqslant \sigma(x,y) + \sigma(x,y').$$

Dacă $y \geqslant 0$, avem :

$$\sup(y+z, -bx) \geqslant \sup(z, -bx) = -\inf(-z, bx) \geqslant -\inf(|z|, bx) = 0$$

$\forall z \in x^{\perp}$ şi $b \in R_+$. Prin urmare $\sigma(x,y) \geqslant 0$. În particular, $\sigma(x,0) \geqslant 0$; dar după 1) avem $\sigma(x,y) \leqslant 0$ şi deci $\sigma(x,0)=0$.

Pe de altă parte, dacă $a>0$, obținem $\sigma(x, ay) = a\,\sigma(x, y)$ dacă înlocuim în definiția lui pe z prin az şi pe λ prin $\dfrac{\lambda}{a}$.

3) Pentru orice $z \in x^{\perp}$ şi $b \in R_+$, avem :

$$\sup(ax+y+z, -bx) = ax + \sup(y+z, -(a+b)x).$$

Folosind egalitatea :

$$\lim_{\lambda \to 0_+} \frac{\|x+\lambda(ax+y)\| - \|x\|}{\lambda} = \lim_{\lambda \to 0_+} \frac{\left\| x + \dfrac{\lambda}{1+a\lambda} y \right\| - \dfrac{1}{1+a\lambda}\|x\|}{\dfrac{x}{1+a\lambda}}$$

$$= a\|x\| + \lim_{\lambda \to 0_+} \frac{\|x+\lambda y\| - \|x\|}{\lambda}$$

şi observînd că $\sigma(x, y)$ nu se schimbă dacă înlocuim în definiția sa pe $b \in R_+$ prin $b \geqslant b_0$, cu $b_0 \geqslant 0$ arbitrar (aceasta din cauză că :

$$\sup(y+z, -b'x) \leqslant \sup(y+z, -bx) \ \forall\, 0 \leqslant b \leqslant b')$$

obținem :

$$\sigma(x, ax+y) = a\|x\| + \sigma(x, y).$$

4) Este evident :

Demonstrația propoziției 6.2. Fie $x^* \in \mathfrak{J}_+ (x)$; pentru orice $z \in x^\perp$ şi $b \in R_+$, avem :

$$\| x \| \frac{\| x + \lambda \sup (y + z, - bx) \| - \| x \|}{\lambda} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{\lambda} (< x^*, x + \lambda \sup (y + z, - bx) > - < x^*, x >) =$$

$$= < x^*, \sup (y + z, - bx) > \geqslant < x^*, y + z > = < x^*, y >$$

şi deci $\| x \| \sigma (x, y) \geqslant <x^*, y >$.

Pe de altă parte, vom arăta că există $L \in \mathfrak{J}_+ x$ astfel încît $< L, y > = \| x \| \sigma (x, y)$.

Fie $F = [x + y] \oplus x^\perp = \{u = \alpha (x + y) + z, \alpha \in R, z \in x^\perp\}$; F este un subspațiu vectorial al lui X. Vom pune $< l, u > = \alpha \| x \| \sigma (x, x + y)$ pentru orice $u \in F$; l este bine definită, liniară şi astfel încît

$$< l, u > \leqslant \| x \| \sigma (x, u) \text{ deoarece dacă } \alpha \geqslant 0, < l, u > =$$

$$= \| x \| \sigma (x, \alpha (x + y)) = \| x \| \sigma (x, u) \text{ şi dacă } \alpha < 0, < l, u > = -$$

$$- \| x \| \sigma (x, - \alpha (x + y)) \leqslant \| x \| \sigma (x, \alpha(x + y)) = \| x \| \sigma (x, u).$$

În plus aplicația $v \rightarrow \| x \| \sigma(x, v)$ definită pe X este subaditivă şi pozitiv omogenă. După teorema lui Hahn-Banach, există o formă liniară L pe X care prelungeşte pe l şi astfel încît $<L, v > \leqslant \| x \| \sigma (x, v)$ pentru orice $v \in X$.

Avem : $< L, x > + < L, y > = < l, x + y > = \| x \| \sigma (x, x + y) =$

$$= \| x \|^2 + \| x \| \sigma (x, y).$$

Dar $< L, x > \leqslant \| x \| \sigma (x, x) = \| x \|^2$ şi $< L, y > \leqslant \| x \| \sigma (x, y)$ deci $< L, y > = \| x \| \sigma (x, y)$ şi $<L, x > = \| x \|^2$. În plus $\| L \| \leqslant \| x \|$ deoarece $< L, v > \leqslant \| x \| \sigma (x, v) \leqslant \|x\| \| v_+ \| \leqslant \| x \| \| v \|$ şi

$$- < L, v > \leqslant \| x \| \sigma (x, - v) \leqslant \| x \| \| (- v) + \| x \| \| v \|$$

L este pozitivă, pentru că $\forall v \geqslant 0$, avem

$$-< L, v > \leqslant \| x \| \, \sigma(x, -v) \leqslant 0$$

iar dacă $v \in x^{\perp}$, atunci $< L, v > = < l, v > = 0$.

Prin urmare $L \in \mathfrak{J}_+ x$.

q.e.d.

Observaţia 6.1. O consecinţă a propoziţiei de mai sus este faptul că

$$\inf \{ < x^*, y > | \, x^* \in \mathfrak{J}_+ x \} = - \| x \| \, \sigma(x, -y).$$

Într-adevăr:

$$- \| x \| \, \sigma(x, -y) = - \sup \{ < x^*, -y >, \; x^* \in \mathfrak{J}_+ x \} =$$

$$= \inf \{ < x^*, y >, \; x^* \in \mathfrak{J}_+ x \}.$$

PROPOZIŢIA 6.3. *Mulţimea* $\mathfrak{J}_+(x_+)$ *este conţinută în subdiferenţiala în* x *a aplicaţiei* $x \to \frac{1}{2} \| x_+ \|^2$.

Demonstraţie. Fie $x^* \in \mathfrak{J}_+(x_+)$; avem

$$\| x_+ \|^2 - \| y_+ \|^2 + 2 < x^*, y - x > = \| x_+ \|^2 - \| y_+ \|^2 +$$

$$+ 2 < x^*, y_+ - y_- - x_+ + x_- > \leqslant - (\| x_+ \| - \| y_+ \|)^2 \leqslant 0,$$

unde am utilizat faptul că: $< x^*, y_- > \leqslant 0$ şi $< x^*, x_- > \leqslant 0$.
De aici rezultă:

$$\frac{1}{2} \| y_+ \|^2 - \frac{1}{2} \| x_+ \|^2 \geqslant < x^*, y - x >.$$

q.e.d.

DEFINIŢIA 6.2. *Fie aplicaţia* $U : X \to X$, *cu domeniul* $D(U) \subset X$; *se spune că* U *este* $k-T-$*lipschitziană dacă*

$$\| (Ux - Uy)_+ \| \leqslant k \| (x - y)_+ \| \quad \forall \, x, y \in D(U).$$

Dacă $k = 1$, U *se numeşte* T-*contracţie*.

PROPOZIȚIA 6.4. *Fie $U : D(U) \to X'$; dacă U este k-T-lipschitziană, atunci U este $2k$-lipschitziană și crescătoare.*

Demonstrație. Într-adevăr, fie $x, y \in D(U)$; avem

$$\| Ux - Uy \| \leqslant \| (Ux - Uy)_+ \| + \| (Ux - Uy)_- \| \leqslant$$
$$\leqslant k \| (x - y)_+ \| + k \| (x - y)_- \| \leqslant 2k \ \| x - y \|.$$

Dacă $x \leqslant y$, atunci $(x - y)_+ = 0$, de unde rezultă $(Ux - Uy)_+ = 0$, adică $Ux \leqslant Uy$.

q.e.d.

DEFINIȚIA 6.3. *Fie $A : X \to 2^X$; A se numește T-acretivă dacă* $\forall (x, u)$ și $(y, v) \in G(A)$, $\exists x^* \in \mathfrak{J}_+ (x - y)_+$, *astfel încît*

$$< x^*, u - v > \geqslant 0.$$

Exemplu. Un operator $A : L^p(S, \Sigma, \mu) \to L^p(S, \Sigma, \mu)$ este T-acretiv, dacă și numai dacă

$$\forall (x, u), (y, v) \in G(A) \text{ are loc}$$

$$\int\limits_{\{t / x(t) \geqslant y(t)\}} (u(t) - v(t)) \cdot ((x(t) - y(t))^{p-1} \mathrm{d}\mu(t) \geqslant 0.$$

Ca urmare directă se obține faptul că dacă $f : R \to R$ este o aplicație monotonă, atunci operatorul în $L^p (1 < p < + \infty)$ definit prin:

$$G(A) = \{(x, u) \, / \, (x(t), u(t)) \in G(f) \ \text{a.p.t.}\}$$

este T acretiv.

PROPOZIȚIA 6.5. *Fie $A : X \to 2^X$; A este T-acretiv dacă și numai dacă*

$$\forall (x, u), \ (y, v) \in G(A), \ \forall \lambda, p \in R_+ \text{ și } \forall z \in (x - y)_+^{\perp},$$

$$\| (x - y)_+ \| \leqslant \| (1 - \mu)(x - y)_+ + (\lambda (u - v + z)_+ \mu (x - y)_+ \|.$$

Demonstraţie. După definiţia 6.3 şi propoziţia 6.2, A este T-acretiv, dacă şi numai dacă pentru orice (xu), $(y, v) \in G(A)$, $< x_s^*, x - y > \geqslant 0$, adică

$$\forall\, b \in R_+ \text{ şi } \forall\, z \in ((x-y)_+)^\perp,$$

$$\lim_{\lambda \to 0_+} \frac{\|(x-y) + \lambda \sup(u - v + z, -b(x-y)_+)\| - \|(x-y)_+\|}{\lambda} \geqslant 0$$

ceea ce este echivalent cu :

$$\|(x-y)_+\| \leqslant \|(x-y)_+ + \lambda \sup(u - v + z, -b(x-y)_+)\|, \ \forall\, \lambda > 0$$

deoarece aplicaţia $\lambda \to \dfrac{\|x + \lambda y\| - \|x\|}{\lambda}$ este crescătoare. Dacă acum utilizăm faptul că : $\sup(x, y) = (x-y)_+ + y$, rezultă :

$$\|(x-y)_+\| \leqslant \|(1 - \lambda b)(x-y)_+ + (\lambda(u - v + z) + \lambda b(x-y)_+)_+\|.$$

q.e.d.

Lema 6.2. *Fie* $x, y \in X$; *există* $x^* \in \partial \left(\dfrac{1}{2} \|x_+\|^2\right)$ *astfel încît* $< x^*, y > = \|x_+\| \lim\limits_{\lambda \to 0_+} \dfrac{\|(x + \lambda y)_+\| - \|x_+\|}{\lambda}$.

Demonstraţie. Limita de mai sus există pentru că aplicaţia $t \to \|(x + ty) + \|$ este convexă; notăm această limită prin $\varphi(x, y)$. Observăm că $\varphi(x, y) \leqslant \|y_+\|$, aplicaţia $y \to \varphi(x, y)$ este subliniată şi $\varphi(x, ax + y) = a\|x_+\| + \varphi(x, y)$, $\forall\, a \in R$, relaţii care se demonstrează uşor folosind pe cele din demonstraţia lemei 6.1.

Fie acum $F = \{u = \alpha(x + y),\ \alpha \in R\}$ şi $< l, u > = \alpha \|x_+\| \varphi(x, x + y)$. Atunci l este o formă liniară pe F, astfel încît $< l, u > \leqslant \|x_+\| \varphi(x, u)$; în plus $u \to \|x_+\| \varphi(x, u)$ este subliniară; există o formă liniară x^* astfel încît $x^* = l$ pe F şi $< x^*, u > \leqslant \|x_+\| \varphi(x, u)$ $\forall\, u \in X$. Avem :

$$< x^*, x + y > = \|x_+\| \varphi(x, x + y) = \|x_+\|^2 + \|x_+\| \varphi(x, y).$$

Dar $< x^*, x > \leqslant \|x_+\|^2$ şi $< x^*, y > \leqslant \|x_+\| \varphi(x, y)$ deci $< x^*, x > = \|x_+\|^2$ şi $< x^*, y > = \|x_+\| \varphi(x, y)$. Se verifică uşor şi faptul că $\|x^*\| \leqslant \|x_+\|$.

Astfel: $2 < x^*, u - x > - \| u_+ \|^2 + \| x_+ \|^2 \leqslant 2 \| x_+ \| \| u_+ \| - \| u_+ \|^2 - \| x_+ \|^2 \leqslant 0$

adică $* \in \partial \left(\frac{1}{2} \| x_+ \|^2 \right)$.

q.e.d.

PROPOZIȚIA 6.6. 1) *Dacă A este o aplicație T-acretivă atunci $\forall \lambda > 0$, $(I + \lambda A)^{-1}$ este o T-contracție de la $R(I + \lambda A)$ în X.*

2) *Să presupunem că $\forall x \in X$, $\mathfrak{J}_+(x_+) = \partial\left(\frac{1}{2} \| x_+ \|^2\right)$; dacă pentru orice $\lambda > 0$, $(I + \lambda A)^{-1}$ este o T-contracție a lui $R(I + \lambda A)$ în X, atunci A este T-acretivă.*

Demonstrație. 1) Fie (x,y), $(y,v) \in G(A)$ și $\lambda > 0$. După propoziția 6.5, luînd $\mu = 1$ și $z = -\frac{1}{\lambda}(x,y)_-$, avem

$$\| (x - y)_+ \| \leqslant \| (\lambda(u - v) + (x - y))_+ \|.$$

Dacă $x + \lambda u = y + \lambda v$, rezultă

$$(x - y + \lambda(u - v))_+ = (x - y + \lambda(u - v))_- = 0 \quad \text{și deci} \quad x - y = 0.$$

Prin urmare $(I + \lambda A)^{-1}$ este univocă și T-contracție.

2) Fie (x,u), $(y,v) \in G(A)$; după lema 6.2 și datorită faptului că $\mathfrak{J}((x - y)_+) = \partial \left(\frac{1}{2} (x - y)_+^2 \right)$ există $x^* \in \mathfrak{J}_+((x - y)_+)$ astfel încît:

$$\| (x - y)_+ \| \lim_{\lambda \to 0+} \| (x - y) + \lambda(u - v))_+ \| - \| (x - y)_+ \| = < x^*, u - v >.$$

Cum primul membru este pozitiv pentru orice $\lambda > 0$, $< x^*, u - v >$ este pozitiv și deci A este T-acretiv.

DEFINIȚIA 6.4. *Fie X un spațiu Banach reticulat. Se spune că X are proprietatea P dacă și numai dacă*

$$\| x_+ \| = \| y_+ \|, \ \| x_- \| = \| y_- \| \Rightarrow \| x \| = \| y \|.$$

Exemple de spații Banach reticulate care au proprietatea P sînt $C(X)$, cu X compact $L^p(S, \Sigma, \mu)$ $1 \leqslant p \leqslant +\infty$. De asemenea orice spațiu Hilbert are proprietatea P, deoarece $\| x \|^2 = \| x_+ \|^2 + \| x_- \|^2$.

LEMA 6.3. *Dacă X are proprietatea P, atunci*

$$\| x_+ \| \leqslant \| y_+ \|, \quad \| x_- \| \leqslant \| y_- \| \Rightarrow \| x \| \leqslant \| y \|$$

Demonstrație. Într-adevăr, $\| x_+ \| = \alpha \| y_+ \|$ și $\| x_- \| = \beta \| y_- \|$, unde

$$0 \leqslant \alpha \leqslant 1 \text{ și } 0 \leqslant \beta \leqslant 1.$$

Fie $z = \alpha y_+ - \beta y_-$; avem $z_+ = \alpha y_+$ și $z_- = \alpha y_-$, de unde $\| z \| = \| x \|$, din cauza proprietății P. Pe de altă parte, $\| z \| \leqslant \| y \|$, deoarece:

$$|z| = \alpha y_+ + \beta y_- \leqslant y_+ + y_- = |y|$$

și deci $\| x \| \leqslant \| y \|$.

PROPOZIȚIA 6.7. *Fie X cu proprietatea P; atunci orice T-contracție pe X este o contracție și orice operator T-acretiv este acretiv.*

Demonstrație. Fie U o T-contracție; pentru orice $x, x' \in D(U)$, avem: $\| (Ux - Uy)_+ \| \leqslant \| (x-y)_+ \|$ și $\| (Ux - Uy)_- \| \leqslant \| (x-y)_- \|$, deci, $\| Ux - Uy \| \leqslant \| x - y \|$ după lema precedentă.

Fie acum A un operator T-acretiv; după propoziția 6.6 și proprietatea P a spațiului X, avem:

$$\forall (x,u),\ (y,v) \in G(A) \text{ și } \forall \lambda > 0,\ \| x - y \| \leqslant \| x - y + \lambda(u - v) \|$$

adică A este acretiv.

q.e.d.

PROPOZIȚIA 6.8. *Orice spațiu Banach reticulat are o normă echivalentă pentru care proprietatea P să fie verificată.*

Demonstrație. Într-adevăr, $p(x) = \| x_+ \| + \| x_- \|$ este o normă pe X, echivalentă cu $\| \cdot \|$, deoarece $\| x \| \leqslant p(x) \leqslant 2 \| x \|$, în care X are proprietatea P (dar în care nu mai este reticulat).

COROLAR. *Orice operator T-acretiv în $(X, \| \cdot \|)$ este acretiv în (X, p).*

DEFINIȚIA 6.5. *Aplicația $S_t : C \to C$ se numește semigrup de T-contracții dacă verifică condiția de semigrup continuu în t iar $\forall t \geqslant 0$, S_t este o T-contracție a lui C.*

PROPOZIȚIA 6.9. 1) *Dacă A_s este generatorul unui semigrup de T-contracții, atunci A_s este T-acretiv.*

Demonstrație. Fie $x, y \in D(A_s)$ și $x^* \in \mathfrak{J}_+ ((x-y)_+)$

atunci

$$< x^*, \frac{x - S_t x}{t} - \frac{y - S_t y}{t} > = x^*, (x - y)_+ - (x - y)_- -$$

$$- (S_t x - S_t y)_+ + (S_t x - S_t y)_- > \geqslant \| (x - y)_+ \|^2 - < x^*, S_t x - S_t y)_+ >$$

dar $< x^*, (S_t x - S_t y)_+^{\cdot} > \leqslant \| (S_t x - S_t y)_+ \| \quad \| x - y \| \leqslant \| (x - y)_+ \|^2$

de unde afirmaţia.

q.e.d.

PROPOZIŢIA 6.10. *Fie A, T-acretiv astfel încît $R(I + \lambda A) \supset \overline{D(A)}$, $\forall 0 < \lambda < \varepsilon$; atunci*

$$S_t x = \lim_n \left(I + \frac{t}{n} A\right)^{-n} x$$

există pentru $\forall x \in \overline{D(A)}$ şi $t > 0$ şi S_t este un semigrup de T-contracţii pe $D(A)$.

Demonstraţie. Cum A este T-acretiv, el este un operator acretiv pe (X,p) şi atunci limita de mai sus există conform teoremei 5.1. Să arătăm că S_t este o T-contracţie a lui $\overline{D(A)}$ în $\overline{D(A)}$. Fie $Q_\lambda = (I + \lambda A)^{-1}$ şi $x, y \in \overline{D(A)}$. Cum $Q\lambda$ este o T-contracţie şi Q_λ^n este tot o T-contracţie, $\forall_n \in N$; prin urmare, utilizînd continuitatea aplicaţiei $x \to x_+$, avem :

$$\| (S_t x - S_t y)_+ \| = \| \lim_n \left(Q_{\frac{t}{n}}^n (x) - Q_{\frac{t}{n}}^n (y) \right)_+ \| \leqslant \quad \| (x - y)_+ \|.$$

q.e.d.

Referinţe. Operatorii T-acretivi au fost introduşi de B. Calvert [43] [44] şi studiaţi de K. Sato [160] [161]. Rezultatele expuse aici sînt luate din [140].

§ 7. APLICAŢII *P*-COMPACTE

Revenind la noţiunea de schemă de aproximare proiecţional completă definită în capitolul III, § 3, în cazul în care $X = Y$ se ia $X_n = Y_n$ şi $Q_n = P_n$ iar X_n şi P_n ca în definiţia 5.3, capitolul II, adică în continuare vom presupune că X este un spațiu cu o schemă de aproximare de tip π_1, $\{X_n,P_n\}$.

Definiția 7.1. *O aplicație* $T:D\subseteq X\to X$ *se numește P-compactă (proiecțional compactă) dacă* $\forall\lambda\geqslant 0$ *aplicația* $T_\lambda = T+\lambda I$ *este A-proprie în raport cu schema* $\{X_n, P_n\}$.

T se numește local P-compactă dacă și numai dacă $\forall x_0\in D$ *există sferă* $\bar S(x_0,r)\subset D$, *astfel încît T să fie P-compactă pe* $\bar S(x_0,r)$.

Teorema 7.1. *Fie* $T:\bar D\to X$ *o aplicație continuă, mărginită și P-compactă iar D o submulțime deschisă și mărginită a lui X cu* $0\in D$; *dacă* $Tx+\lambda x\neq 0$ $\forall x\in\partial D$ și $\lambda\geqslant 0$, *atunci*

$$d\,[T;D,0]=\{1\}$$

și în particular există $x_0\in D$ *astfel încît* $Tx_0=0$.

Demonstrație. Vom defini pentru orice $t\in[0,1]$ și $x\in\bar D$ aplicația $T_t(x)=(1-t)Tx+tx$; cum pentru $x\in\bar D$ și orice $t,s\in[0,1]$ avem: $\|T_tx-T_sx\|=|t-s|\ \|Tx-x\|$ și T este mărginită, rezultă că $T_t(x)$ este uniform continuă în t în raport cu $x\in\bar D$. În plus, pentru orice $t\in[0,1]$, aplicația T_t este A-proprie. Într-adevăr, pentru $0\leqslant t\leqslant 1$, fixat, aplicația : $T_t+\dfrac{t}{1-t}I$ este A-proprie iar pentru $t=1$, $T_1=I$ care evident este A-proprie.

Vom arăta că $T_tx\neq 0$ pentru $x\in\partial D$ și $t\in[0,1]$.

Într-adevăr, să presupunem că am avea $T_{t_0}x_0=0$ pentru $x_0\in\partial D$ și $t_0\in[0,1]$; atunci, dacă $t_0=1$, $T_1x_0=x_0=0\in\partial D$ ceea ce este o contradicție; dacă $t_0<1$, atunci $Tx_0+\lambda_0x_0=0$, cu $\lambda_0=\dfrac{t_0}{1-t_0}\geqslant 0$, ceea ce nu se poate datorită presupunerii că $Tx+\lambda x\neq 0$ pe ∂D.

Prin urmare putem aplica teorema 3.1. (c) capitolul III și astfel $d[T_t;D,0]$ este independent de $t\in[0,1]$, deci pentru $T_1=I$ și $T_0=T$, avem

$$d\,[T;D,0]=d\,[I;D,0].$$

Cum $I_n=I|_{X_n}$ și $d\,[I_n;D_n,0]=1,\forall n$, rezultă $d\,[I;D,0]=\{1\}$. Existența unui punct x_0 cu $Tx_0=0$ rezultă acum din teorema 3.1(b), capitolul III.

q.e.d.

Ca o consecinţă a acestei teoreme obţinem următoarea teoremă de punct fix pentru o importantă clasă de aplicaţii.

COROLAR. *Fie S o aplicaţie : $\bar{D} \to X$ astfel încît aplicaţia $T = I - S$ să fie continuă, mărginită şi P compactă iar $0 \in D$. Dacă $Sx - x \neq 0$ $\forall x \in \partial D$ şi $\gamma \geq 1$, atunci $d[I-S; D, 0] = \{1\}$ şi în particular S are un punct fix în D.*

Demonstraţie. Dacă punem $\lambda = \gamma - 1$, condiţia $Sx - \gamma x \neq 0$ pentru $x \in \partial D$ şi $\gamma \geq 0$ este echivalentă cu condiţia $Tx + \lambda x \neq 0$ $\forall x \in \partial D$ şi $\lambda \geq 0$, şi atunci afirmaţia rezultă din teorema 7.1.

q.e.d.

TEOREMA 7.2. *Fie $D \subset X$ deschisă şi $T : D \to X$ o aplicaţie continuă, local P-compactă care satisface condiţia :*
$\forall x_0 \in D$, există $\bar{S}(x_0, r) \subset D$, astfel încît T_λ să fie biunivocă pe $S(x_0, r)$, $\forall \lambda \geq 0$;
atunci $T_\lambda(D)$ este deschisă în X, $\forall \lambda \geq 0$

Demonstraţie. E suficient să arătăm că T_λ admite o omotopie $T_{\lambda,t}(x)$ solubilă local A-proprie, pentru că atunci putem aplica teorema 3.3 capitolul III.

Fie pentru orice $x_0 \in D$, $\bar{S}(x_0, r) \subset D$ astfel încît T să fie P-compactă pe $\bar{S}(x_0, r)$ şi $T(\bar{S}(x_0, r)$ să fie mărginită iar T_λ să fie biunivocă pe $\bar{S}(x_0, r)$, $\forall \lambda \geq 0$. Să definim aplicaţia $T_{\lambda,t}(x) : \bar{S}(x_0, r) \times [0,1] \to X$ prin :

$$T_{\lambda,t}(x) = (1-t)\, T_\lambda(x) + t\, T_\lambda(x_0) + t(x - x_0), \ \lambda \geq 0$$

şi să observăm că $T_{\lambda,0}(x) = T_\lambda(x)$, $x \in \bar{S}(x_0, r)$ $T_{\lambda,t}(x)$ este A-proprie pentru orice $t \in [0,1]$ şi este continuă în t, uniform pentru $x \in \bar{S}[x_0, r]$.

Într-adevăr, e evident că $T_{\gamma,0}(x) = T_\gamma(x)$ este A-proprie pe $\bar{S}(x_0, r)$; de asemenea $T_{\lambda,1}(x) = x + T_\lambda(x_0) - x_0$ este A-proprie deoarece este sumă a două aplicaţii A-proprii. Dacă $t \in (0,1)$, atunci avem :

$$(1-t)^{-1}\, T_{\lambda,t}(x) = T(x) + \lambda' x + \frac{t}{1-t}\,(T_\lambda(x_0) - x_0)$$

cu $\lambda' = \lambda + \dfrac{t}{1-t} > 0$ şi deci şi în acest caz $T_{\lambda,t}$ este A-proprie.

Pe de altă parte din mărginirea lui $T(\bar{S}(x_0, r))$ şi din egalitatea :

$$T_{\lambda,t}(x) - T_{\lambda,s}(x) = (s-t)\,[T_\lambda(x) - T_\lambda(x_0) - (x - x_0)]$$

rezultă că pentru orice $\lambda \geqslant 0$, $T_{\lambda,t}(x)$ este continuă în t, uniform pentru $x \in \overline{S}(x_0, r)$.

Să definim acum $H_{\lambda,t} : \overline{S}(x_0, r) \times [0,1] \to X$ prin $H_{\lambda,t}(x) = T_{\lambda,t}(x) - T_\lambda(x_0)$.

Atunci $H_{\lambda,t}(x) \neq 0$, $\forall x \in \partial S(x_0,r)$ și $t \in [0,1]$: într-adevăr, dacă presupunem că $H_{\lambda,t}(x)=0$ pentru un $x_1 \in \partial S(x_0,r)$ și $t_1 \in [0,1]$, atunci dacă $t_1=0$, $0=H_{\lambda,1}(x_1) = x_1 - x_0$, deci $x_1 = x_0 \in \partial S$, ceea ce nu se poate; dacă $t_1 < 1$, atunci

$$Tx_1 + \lambda' x_1 = Tx_0 + \lambda' x_0, \text{ cu } \lambda' = \lambda + \frac{1}{1-t_1} \geqslant 0$$

ceea ce contrazice faptul că T_λ este biunivocă pe $\overline{S}(x_0, r)$. Prin urmare proprietatea ii) din definiția omotopiei solubile are loc; în plus, conform teoremei 3.2. capitolul III, $d[H_{\lambda,t}; S(x_0,r),0]$ este bine definit și independent de $t \in [0,1]$. Condiția iii) rezultă din faptul că $d[H_{\lambda,1}, S(x_0, r), 0] = d[I - x_0; S(x_0, r), 0] = \{1\}$, deoarece dacă punem $Vx = x - x_0$, $\forall x \in \overline{S}(x_0, r)$ și $V_n = P_n V P_n = I_n - P_n x_0$, atunci rezultă ușor că există n_0 astfel încît $0 \notin V(\partial S(x_0, r) \cap X_n)$ pentru $n \geqslant n_0$ (deoarece în caz contrar ar rezulta că $x_0 \in \partial S(x_0, r)$) și deci $d[V_n; S(x_0, r) \cap X_n, 0]$ este bine definit și egal cu 1.

q.e.d.

COROLAR. *Fie $T : D \to X$, D deschis, T continuă și local P-compactă, local acretivă și local biunivocă pe D; atunci $T_\lambda(D)$ e deschis $\forall \lambda \geqslant 0$*

Demonstrație. Pentru $x_0 \in D$, există $\overline{S}(x_0,r) \subset D$ pe care T este biunivocă; să presupunem că există $\lambda > 0$ și $x \neq y \in S(x_0,r)$ cu $Tx + \lambda x = Ty + \lambda y$; atunci pentru $x^* \in \mathfrak{J}(x-y)$, rezultă: $<x^*, Tx - Ty> + <x^*, x-y> = 0$.

Dar T fiind acretiv fie $S(x_0,r)$, rezultă $<x^*, Tx - Ty> > 0$; atunci în mod necesar $<x^*, x-y> = \| x-y \| \varphi(\| x-y \|) \leqslant 0$ și deci $\| x-y \| = 0$ adică $x = y$. Prin urmare T_λ este biunivocă pe $\overline{S}(x_0,r)$, $\forall x \geqslant 0$ și se poate aplica teorema precedentă.

q.e.d.

DEFINIȚIA 7.2. *Vom spune că aplicația continuă $T : D \subset X \to X$ satisface condiția (S) modificată dacă $x_n \xrightarrow[n]{} x$, $x_n \in X_n \cap D$, $x \in D$, $P_n x \in D$, și $<\mathfrak{J}(x_n - P_n x), Tx_n - TP_n x> \to 0$ implică $x_n \xrightarrow[n]{} x$.*

PROPOZIŢIA 7.1. *Fie X reflexiv cu proprietatea (I) şi $D \subset X$ deschis pe care este dată aplicaţia $T: D \to X$, continuă şi local acretivă satisfăcînd condiţia (S) modificată. Atunci T este local P-compactă.*

Demonstraţie. Fie $x_0 \in D$ şi $S(x_0,r) \subset D$ astfel încît T să fie acretivă pe $\bar{S}(x_0,r)$. Vom demonstra că există $\bar{S}(x_0,r_0) \subset \bar{S}(x_0,r)$ cu $r_0 < r$, astfel încît pentru orice $\lambda \geqslant 0$, aplicaţia $T_\lambda = T + \lambda I$ să fie A-proprie pe $\bar{S}(x_0,r_0)$.

Cazul I. Fie $\lambda = 0$ şi fie $r_0 < r$, $x_n \in X_n \cap \bar{S}(x_0,r_0)$ $n \geqslant 1$ un şir astfel încît $P_n T x_n \xrightarrow[n]{} y$ pentru un $y \in X$. Cum X este reflexiv, $\bar{S}(x_0,r_0)$ este slab compactă şi trecînd la un subşir, putem presupune că $X_n \underset{n}{\rightharpoonup} x$, $x \in \bar{S}(x_0,r_0)$ şi $P_n x \in \bar{S}(x_0,r_0)$ pentru n suficient de mare. Pentru X sînt verificate condiţiile propoziţiei 5.6 capitolul II şi deci $P_n^* \mathfrak{J} x = \mathfrak{J} x, \forall x \in X_n$, cu $\mathfrak{J}$ o aplicaţie de dualitate.

Cum $x_n - P_n x \underset{n}{\rightharpoonup} 0$, $P_n T x_n \to y$, T este continuu iar $\mathfrak{J}$-slab continuu rezultă că :

$$< \mathfrak{J}(x_n - P_n x),\ Tx_n - TP_n x > =$$

$$= < P_n^* \mathfrak{J}(x_n - P_n x),\ Tx_n - TP_n x > =$$

$$= < \mathfrak{J}(x_n - P_n x),\ P_n Tx_n - P_n TP_n x > \to < \mathfrak{J}(0), y - Tx > = 0.$$

Dar T satisface condiţia (S) modificată şi deci $x_n \xrightarrow[n]{} x$; atunci $Tx_n \xrightarrow[n]{} Tx$ şi din $P_n Tx_n \xrightarrow[n]{} y$ rezultă :

$$\| P_n Tx_n - Tx_n \| \leqslant \| P_n Tx_n - P_n Tx \| + \| P_n Tx - Tx \| \leqslant$$

$$\leqslant \| P_n \| \ \| Tx_n - Tx \| + \| P_n Tx - Tx \| \xrightarrow[n]{} 0$$

şi deci $Tx = y$. Prin urmare T este A-proprie pe $\bar{S}(x_0, r_0)$.

Cazul II. Fie $\lambda > 0$; cum T este acretivă pe $\bar{S}(x_0, r)$ atunci T_λ este şi ea acretivă, deoarece

$$< \mathfrak{J}(x-y),\ T_\lambda x - T_\lambda y > = < \mathfrak{J}(x-y),\ Tx - Ty > +$$

$$+ \lambda < \mathfrak{J}(x-y),\ x - y >$$

$$\geqslant \lambda \| x - y \| \ \varphi(\| x - y \|) \ \forall x, y \in \bar{S}(x_0, r).$$

Această inegalitate arată şi faptul că pentru $r_0 < r$ aplicaţia T_λ verifică condiţia modificată (S) pe $\bar{S}(x_0, r_0)$. Rezultă atunci ca în cazul I că T este A-proprie pe $\bar{S}(x_0, r_0)$, adică în definitiv T este local P-compactă.

q.e.d.

Drept consecinţă a acestei propoziţii şi a teoremei 7.1 obţinem :

TEOREMA 7.3. *Fie X reflexiv cu proprietatea (I)* şi $T : D \to X, D$ *deschis, o aplicaţie continuă local acretivă, satisfăcînd condiţia (S) modificată. Dacă T este local biunivocă, atunci $T(D)$ este deschis,* $\forall \lambda \geqslant 0$.

COROLAR. *Fie $X = H$ un spaţiu Hilbert, $T = D \to X, D$ deschis, o aplicaţie continuă, local monotonă, satisfăcînd condiţia (S) modificată; dacă T este local biunivocă, atunci $T_\lambda(D)$ este deschisă pentru orice* $\lambda \geqslant 0$.

O consecinţă a acestui corolar este următorul rezultat al lui Browder şi Minty :

COROLAR. *Fie $D \subset H$ deschis şi $T = D \to H$ continuă şi tare monotonă adică astfel încît :*

$$< Tx - Ty,\ x - y > \geqslant c \| x - y \|^2,\ \forall\, x, y \in D$$

atunci $T(D)$ este deschis.

Un alt rezultat, caz particular al teoremei 7.3, este

COROLAR. *Dacă D este o submulţime deschisă în l^p, $1 < p < +\infty$ şi T o aplicaţie local biunivocă şi local-acretivă a lui D în l^p, satisfăcînd condiţia modificată (S), atunci $T_\lambda(D)$ este deschisă în l^p $\forall \lambda \geqslant 0$.*

Vom da acum următoarea teoremă de existenţă (surjecţie).

TEOREMA 7.4. *Fie X reflexiv, cu proprietatea (I) şi $T : X \to X$ o aplicaţie acretivă, demicontinuă cu proprietatea că :*

$$< \mathfrak{J}x,\ Tx > \geqslant \alpha(\| x \|)\ \| \mathfrak{J}x \| \quad \forall\, x \in X,$$

unde $\alpha : R_+ \to R_+$ este astfel încît $\alpha(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} +\infty$.

Atunci $T(X) = X$.

Vom da în prealabil cîteva leme.

LEMA 6.1. *Fie X_0 un spaţiu Banach de dimensiune finită şi $T : X_0 \to X_0$ o aplicaţie continuă astfel încît pentru orice $x \in X_0$ cu $\| x \| = r$, $< \mathfrak{J}x,\ Tx > \geqslant 0$; atunci există $x_0 \in S(0, r) = S_r$ astfel încît $Tx_0 = 0$.*

Demonstrație. Fie $U = I - T$; e suficient să arătăm că U are un punct fix. Fie $V : S_r \to S_r$ definită prin

$$V = \begin{cases} Ux & \text{pentru } Ux \in S_r \\ r\dfrac{Ux}{\|Ux\|} & \text{pentru } Ux \notin S_r \end{cases}$$

V este continuă pe S_r și după teorema de punct fix a lui Brouwer are un punct fix $x_0 \in S_r$, $Vx_0 = v_0$. Dacă $\|x_0\| < r$, atunci și $\|Vx_0\| < r$ și deci avem $Vx_0 = Ux_0 = x_0$. Dacă $\|x_0\| = r$, atunci $\|Vx_0\| = r$ și prin urmare $\|Ux_0\| \geqslant r$; deci $Ux_0 = \lambda x_0$, cu $\lambda = \dfrac{\|Ux_0\|}{r} \geqslant 1$. Observăm că $\lambda > 1$, ne duce la o contradicție deoarece avem:

$$< \mathfrak{J}x_0, Ux_0 > = < \mathfrak{J}x_0, x_0 > - < \mathfrak{J}x_0, Tx_0 > \leqslant < \mathfrak{J}x_0, x_0 >$$

în timp ce: $< \mathfrak{J}x_0, Ux_0 > = \lambda < \mathfrak{J}x_0, x_0 > > < \mathfrak{J}x_0, x_0 >$

Prin urmare $\lambda = 1$ și deci $Ux_0 = x_0$.

q.e.d.

LEMA 7.2. *Fie X un spațiu Banach reflexiv cu proprietatea (I) și $T : X \to X$ acretivă și demicontinuă și fie $r > 0$ astfel încît $< \mathfrak{J}x, Tx > \geqslant 0, \forall x$ cu $\|x\| = r$; atunci $\forall n$, aplicația $T_n = P_n T$ are un zero în $X_n \cap S_r$.*

Demonstrație. Fie P_n^* adjunctul lui P_n; atunci $P_n^* : X^* \to X_n^*$. Fie $\mathfrak{J}_n = P_n^* \mathfrak{J}$; aceasta este aplicația de dualitate de la X_n în X_n^*. Într-adevăr după corolarul propoziției 5.6 capitolul II, $\mathfrak{J}_n x = \mathfrak{J}x$, $\forall x \in X_n$ și deci $\|\mathfrak{J}_n x\| = \|\mathfrak{J}x\|$ iar $< \mathfrak{J}_n x, x > = < \mathfrak{J}x, x > = \|x\| \varphi(\|x\|)$. În plus avem:

$$< \mathfrak{J}_n x, T_n x > = < \mathfrak{J}x, P_n Tx > = < P_n^* \mathfrak{J}x, Tx > = < \mathfrak{J}x ; Tx > \geqslant 0$$

$\forall x \in X_n$ cu $\|x\| = r$. După lema 7.1 rezultă că T_n are un zero în $X_n \cap S_r$.

q.e.d.

PROPOZIȚIA 7.2. *În condițiile lemei 7.2, există $x_0 \in S_r$ astfel încît $Tx_0 = 0$.*

Demonstrație. După lema precedentă, $\forall n$ există $x_n \in S_r \cap X_n$ astfel încît $T_n x_n = 0$. Fie

$G_n = \{x_n, x_{n+1}, \ldots\} \subset S_r$; există x_0 aparținînd intersecției închiderilor slabe ale mulțimilor G_n.

Vom arăta că $Tx_0 = 0$. Fie $y \in X_n$, n fixat, pentru orice x_k, $k \geqslant n$, are loc:

(1) $$< \mathfrak{J}(y - x_k),\ Ty - Tx_k > \geqslant 0.$$

Cum $y, x_0 \in X_k$, avem:

$$< \mathfrak{J}(y - x_k),\ Tx_k > = < P_k^* \mathfrak{J}(y - x_k),\ Tx_k > = < \mathfrak{J}(y - x_k),\ P_k Tx_k > = 0$$

Prin urmare din (1) rezultă:

(2) $$< \mathfrak{J}(y - x_k),\ Ty > \geqslant 0,\ k \geqslant n.$$

Fie $h : S_r \to R$ dată prin $h(x) = < \mathfrak{J}(y - x),\ Ty >$; h este continuă în topologia slabă pe X pentru că $\mathfrak{J}$ este slab continuă; în plus, datorită lui (2) h este nenegativă pe G_n și deci h are aceeași proprietate pe închiderea slabă a lui G_n, în particular pentru x_0; astfel $< \mathfrak{J}(y - x_0),\ Ty > \geqslant 0$. Cum aceasta are loc pentru $y \in X_n$, $\forall n \geqslant 1$, rezultă că pentru orice $x \in X$, avem:

$$< \mathfrak{J}(P_n x - x_0),\ TP_n x > \geqslant 0 \quad n \geqslant 1.$$

Dar $P_n x \underset{n}{\to} x$ implică $TP_n x \underset{n}{\to} Tx$ și

$\mathfrak{J}(P_n x - x_0) \underset{n}{\to} \mathfrak{J}(x - x_0)$; prin urmare

(3) $$< \mathfrak{J}(x - x_0),\ Tx > \geqslant 0\ \forall x \in X.$$

Fie $x \in X$, $t > 0$ și $x_t = x_0 + tx$; din (3) rezultă $< \mathfrak{J}(x_t - x_0),\ Tx_t > = < \mathfrak{J}(tx),\ Tx_t > \geqslant 0$ deci $< \mathfrak{J}x,\ Tx_t > \geqslant 0$ și trecînd la limită cu $t \to 0$ rezultă

$$< \mathfrak{J}x,\ Tx_0 > \geqslant 0,\ \forall x \in X.$$

Înlocuind x prin $(-x)$, obținem $< \mathfrak{J}x, Tx_0 > \leqslant 0$ de unde $< \mathfrak{J}x,\ Tx_0 > = 0$. X fiind reflexiv, $\mathfrak{J}$ este surjectivă și astfel $Tx_0 = 0$.

q.e.d.

Demonstrația teoremei 7.4. Fie y fixat în X şi să considerăm aplicația $T_y : X \to X$ dată prin $T_y x = Tx - y$ care este tot acretivă. Fie r suficient de mare astfel încît $c(r) \geqslant \|y\|$; atunci pentru $x \in X$, cu $\|x\| = r$, avem :

$$< \mathfrak{J}x, T_y x > = < \mathfrak{J}x, Tx > - < \mathfrak{J}x, y > \geqslant c(r) \|\mathfrak{J}x\| -$$

$$- \|y\| \quad \|\mathfrak{J}x\| - \|\mathfrak{J}x\| \ ((c(r) - \|y\|) \geqslant 0.$$

Putem prin urmare aplica propoziția 7.2 şi rezultă că T_y are un zero în sfera S_r, adică există x_0 astfel încît $Tx_0 = y$.

q.e.d.

Referințe. Operatorii P compacți au fost introduşi de Petryshyn [141]—[147], teoreme de punct fix pentru operatori P-compacți apar în [141], [146]. O bogată bibliografie privind această clasă de operatori poate fi găsită în lucrarea lui Petryshyn [145]. Rezultatele prezentate în acest paragraf privind operatorii local P-compacți şi local acretivi precum şi teoremele de invarianță de domenii sînt luate din [149]. Teorema 7.4 de existență a soluției ecuației funcționale $Tx=y$ este a lui Browder — de Figueiredo [40].

Mai recomandăm lucrarea lui Tucker şi Petryshyn [150].

BIBLIOGRAFIE

1. Aubin I.P., *Approximation des espaces des distributions et des opérateurs differentiels.* Bull. Soc. Math. France, Mémoire, **12**, 1967, 139 p.
2. Asplund E., *Averaged norms,* Israel J. Math. **5** (1967), p. 227—233.
3. Asplund E., *Positivity of duality mappings.* Bull. Amer. Math. Soc. **73** (1967), p. 200—203.
4. Asplund E. — Rockefellar R.T., *Gradients of convex functions-Trans.* Amer. Math. Soc., **139** (1969), p. 443—467.
5. Barbu V., *Weak solutions for nonlinear functional equations in Banach spaces.* Ann. di Mat. pura e appl. **IV, LXXXVII**, p. 87—110.
6. Barbu V., *Dissipative sets and nonlinear perturbated equations in Banach spaces.* Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, **XXVI** (1972), p. 365—390.
7. Barbu V., *Continuous perturbations of nonlinear m-accretive operators in Banach spaces.* Bool. U.M.I. (**4**), *6* (1972), p. 270—278.
8. Barbu V., *Semigrupuri de contracții.* Editura Academiei, 1974.
9. Barbu V. — Cellina A., *On the surjectivity of multivalued dissipative mappings.* Bool. U.M.I. (**3**) (1970), p. 817—826.
10. Benilan Ph., *Une remarque sur la convergence des semigroupes nonlineair* s. C. R. Acad. Sci. **272** (1971), p. 1182—1134.
11. Benilan Ph., *Solutions faibles d'équations d'évolution dans un espace réflexif.* Séminaire Deny sur les semigroupes nonlinéaires, Orsay, 1970—1971.
12. Beurling A. — Livingston A. E., *A theorem on duality mappings in Banach spaces.* Ark. Math., **4** (1962), p. 405—411.
13. Bishop E. — Phelps R., *The support functionals of a convex set.* Proc. Symp. on pure math., **7** (1963), p. 27—35.
14. Bonic R. — Reis Fl., *A caracterisation of Hilbert spaces.* Annais da Acad. Brasil de Ci, **38** *3*, (1966), p. 239—241.
15. Bourbaki, N., *Fonctions d'une variable réele.* Chap. 1,2,3, IX, livre IV, Hermann, Paris.
16. Brezis H., *Semi-groups nonlinéaires et applications.* Symp. sur les problèmes d'évolution. Instituto Naz. di Alta Mat. Roma, 1970.
17. Brezis H., *On a problem of Kato.* Comm. Pure Appl. Math., **24** (1971), p. 1—6.
18. Brezis H., *Opérateurs maximaux monotones et semigroupes de contractions dans les espaces de Hilbert.* Notes de cours, Université de Paris, 1971.
19. Brezis H., *Propriétés régularisantes de certaines semigroupes nonlinéaires.* Israel J. Math., **9**, (1971), p. 513—534.
20. Brezis H., *Crandall M. — Pazy A., Perturbations of nonlinear maximal monotone sets.* Comm. Pure Appl. Math., **23** (1970), p. 123—144.
21. Brezis H. — Pazy A., *Accretive sets and differential equations in Banach spaces.* Israel J. of Math., **8** (1970), p. 367—383.

22. Brezis H — Pazi A., *Semigroups of nonlinear contractions on convex sets.* J. Funct. Anal., **6** 2, (1970), 237—280.
23. Brezis M. — Pazy A., *Convergence and approximation of nonlinear semigroups of nonlinear operators in Banach spaces.* J. Func. Anal., **1** (1972).
24. Brøndsted A., *Conjugate convex functions in topological vector spaces.* Mat. phys. Medd. Dansk Vid. Selsk, **34** (1964), p. 2—27.
25. Brønsted A., *Rockafellar R.T., On the subdifferentiability of convex functions.* Proc. Amer. Math. Soc., **16** (1965), p. 605—611.
26. Browder F., *Nonlinear equation of evolution.* Ann. of Math., **80** (1964), p. 485—523.
27. Browder F., *Multivalued and monotone non-linear mappings and duality mappings in Banach spaces.* Trans. Amer. Math. Soc., **118**, (1965), p. 338—361.
28. Browder F., *Problèmes non-linéaires* . Univ. of Montreal, Press, 1966.
29. Browder F., *Fixed points theorems for non-linear semicontractive mappings in Banach spaces.* Arch. Mech. and Anal., **21** (1966), p. 259—270.
30. Browder F., *On a theorem of Beurling and Livingston.* Canadian J. Math., **17** (1967), p. 367—372.
31. Browder F., *Nonlinear accretive operators in Banach spaces.* Bull. Amer. Math. Soc. **73** (1967), p. 470—476.
32. Browder F., *Nonlinear mappings of non-expansive and accretive type in Banach spaces.* Bull. Amer. Math. Soc. 73, (1967), p. 875—882.
33. Browder F., *Nonlinear equations of evolution and nonlinear accretive operators in Banach spaces.* Bull. Amer. Math. Soc., **73** (1967), p. 867—874.
34. Browder F., *Nonlinear monotone and accretive operators in Banach spaces.* Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., **61**, (1968), p. 388—393.
35. Browder F., *On the fixed point theory of multivalued mappings in topological vector spaces.* Math. Ann., **177** (1968), p. 283—301.
36. Browder F., *Nonlinear maximal monotone operators in Banach spaces.* Math. Ann., **175**, (1968), p. 89—113.
37. Browder F., *Nonlinear eigenvalue problems and Galerkin approximations.* Bull. Amer. Math. Soc., **74**, (1968), p. 651—656.
38. Browder F., *Nonlinear variational inequalities and maximal monotone mappings in Banach spaces.* Math. Ann., **73** (1969), p. 213—232.
39. Browder F., *Nonlinear operators and nonlinear equations of evolution in Banach spaces.* Proc. Symp. Nonlin. Funct. Anal. Chicago. Amer. Math. Soc., **18**, *II*, (1972).
40. Browder F., *de Figuieredo D.G, J—monotone nonlinear operators in Bana chspaces.* Koukl. Nederl. Akad. Wetersch, **69** (1966), p. 412—420.
41. Browder F. — Petryshyn W., *The topological degree and Galerkin approximation for noncompact operators in Banach spaces.* Bull. Amer. Math. Soc., **74**, (1968), p. 641—646.
42. Browder F. — Petryshyn W., *Approximation methods and the generalised topological degree for nonlinear mappings in Banach spaces.* J. Fund. Anal., **3**, (1968), p. 217—245.
43. Calvert B., *Nonlinear evolution equations in Banach lattices.* Bull. Amer. Math. Soc, **76** (1970), p. 845—950.
44. Calvert B, *Nonlinear equations of evolution.* Pacific J. Math., **39** (1971), p. 293—350.
45. Clarkson J.A., *Uniformly convex spaces.* Trans. Amer. Math. Soc., **40**, (1936), p. 396—414.

46. Corduneanu A., *La somme de deux générateurs infinitesimals*. An. St. Univ. Al. I. Cuza, Iaşi, fasc. 1, 1972.
47. Crandall M., *Differential equations on convex sets*. J. Math. Soc. Japan, **22** (1970), p. 443—455.
48. Crandall M., *Semigroups of nonlinear transformations in Banach spaces*. Contributions to Nonlinear Funct. Anal., Ed. Zarantonello Acad. Press, 1971.
49. Crandall M. — Pazy A., *On accretive sets in Banach spaces*. J. Funct. Anal., **5** (1970), p. 204—217.
50. Crandall M. — Pazy A., *Non linear semigroups of conractions and dissipative sets*. J. Funct. Anal., **3** (1969), p. 376—418.
51. Crandall M. — Pazy A., *Nonlinear evolution equations in Banach spaces*. Israel J. Math. (to appear).
52. Crandall M.—Liggett T., *Generation of semigroups of nonlinear transformations on general Banach spaces*. Amer. J. Math. **93** (1971), p. 265—298.
53. Crandall M.—Liggett T., *A theorem and a counterexample in the theory of semigroups of nonlinear transf.* Trans. Amer. Math. Soc. (to appear).
54. Cristescu R., *Spaţii liniare ordonate şi operatori liniari*. Ed. Acad., 1970.
55. Cudia D.F., *On the localisation and direction a lisation of uniform convexity*. Bull. Amer. Math. Soc., **69** (1963).
56. Cudia D.F., *The geometry of Banach spaces. Smoothness*. Trans. Amer. Math. Soc., **110** (1964), p. 284—314.
57. Da Prato G., *Somme d'applications nonlinéaires dans des cônes et équations d'évolution dans des espaces d'opérateurs*. J. Math. Pures et Appl., **49** (1970), p. 289—348.
58. Da Prato G., *Somme d'applications nonlinéaires*. Symp. Math. Acad. Press (1971), p. 233—268.
59. Da Prato G., *Applications accrétives dans des espaces d'opérateurs hermitiens*. Atti Lincei, **4 LII** (1972), p. 485—489.
60. Day M.M., *Reflexive Banach spaces not isomorphic to uniformly convex spaces*. Bull. Amer. Math. Soc., **47** (1941), p. 313—317.
61. Day M.M., *Uniform convexity* III. Bull. Amer. Math. Soc., **49** (1943), p. 745—750.
62. Day M.M. , *Uniform convexity in factor and conjugate spaces*. Ann. Math. **2**, *45* (1944), p. 375—389.
63. Day M.M., *Strict convexity and smoothness of normed spaces*. Trans. Amer. Math. Soc., **78** (1955), p. 516—528.
64. Day M.M., *Normed spaces*. Springer Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1958.
65. Dincă G., *Operatori monotoni în teoria plasticităţii*, Ed. Acad., Buc., 1972.
66. Dorroh I.R., *Semigroups of nonlinear transformations-Michigan*. Math. J. **12** (1965), p. 317—320.
67. Dorroh I.R., *Semigroups of nonlinear transformations*. Notices Amer. Math. Soc., **15** (1968), p. 128.
68. Dorroh I.R., *Some classes of semigroups of nonlinear transformations and their generators*. J. Math. Soc. Japa, **20**, *3* (1968), p. 437—455.
69. Dorroh I.R., *A non linear Hille-Yosida-Phillips theorem*, J. Func. Anal., **5** (1969), p. 345—353.
70. Dunford N.—Schwartz J., *Linear operators*. Part I, New York, 1958.
71. Enflo P., *Banach spaces which can be given an equivalent uniformly convex norm*, Israel J. of Math., **13**, *3—4* (1972), p. 281—289.
72. Fan K. — Glicksberg I., *Some geometric properties of spheres in a normed linear space*. Duke Math. J., **25** (1958), p. 553—568.

73. DE FIGUEIREDO G., *Fixed points theorems for nonlinear operators and Galerkin approximations*. J. Diff. Eq. **3** (1967), p. 271—281.
74. DE FIGUEIREDO G., *Topics in nonlinear functional Analysis*. Univ. of Maryland, 1967.
75. GODINI G., *Contribuţii la studiul geometriei spaţiilor Banach* (teză). St. cerc., mat., **24**, *2* (1972), p. 193—238.
76. GOLOMB M. — *Tapia R.A., The metric gradient in normal linear spaces*. Numerische Math. Band 2, Heft 2, 1972, p. 115—125.
77, GOSSEZ J.P., *A note on multivalued monotone operators*. Mich. Math. J. **17**, *4* (1970).
78. GOSSEZ J.P., *Ensembles virtuellement convexes et opérateurs monotones*. Bull. Sci. Math. Paris, 2^{e} série, *94* (1970), p. 73—80.
79. GOSSEZ J.P., *Opérateurs monotones non-linéaires dans les espaces de Banach non-réflexifs*. J. Math. Anal. and Appl. **34**, *2* (1971), p. 371—395.
80. GOSSEZ J.P., *On the range of a coercive maximal monotone operator in a nonreflexive Banach space*. Proc. Amer. Math. Soc. (to appear).
81. GOSSEZ J.P., LAMI DOZO E., *Some geometric properties related to the fixed point theory for nonexpansive mappings*. Pacific J. Math., **40** (1972), p. 565—573.
82. HALKIN , H., *Finite convexity in infinite dimensional spaces*. Proc. Coll. Convexity Copenhagen 1965, Ed. W. Fenchel, 1967, p. 126—131.
83. HEINZ E., *An elementary analytic theory of the degree of mappings in n-dimensional spaces.* J. Math. Mech., **8** (1959), p. 231—274.
84. HILLE E. — PHILLIPS R., *Functional analysis and semigroups*. Amer. Math. Soc. Coll. Publ. **39** (1957).
85. HOLMES R., *A course on optimisation*. Springer Verlag, 257, 1972.
86. IANELLI M., *Nonlinear semigroups on cones of a nonreflexive Banach space*. Boll. Un. Mat. Ital. **3** (1970), p. 412—419.
87. JAMES R., *Reflexivity and the supremum of linear functionals*. Ann. of Math. **66**, *1* (1957), p. 159—169.
88. JAMES R., *Characterisations of reflexivity*. Studia Mat. **XXIII** (1964), p. 205—216.
89. JAMES R., *Reflexivity and the sup of linear functionals*. Israel J. of Math., **13**, *3—4* (1972), p. 289—301.
90. KAČUROVSKI R.I. *On monotone operators and convex functionals*. Uspehi Mat. Nauk, **15**, *4* (1960), p. 213—215.
91. KAČUROVSKI R.I., *Monotone operators in Banach spaces*. Dokl. Akad. Nauk. S.S.S.R., *163* (1965), p. 559—562.
92. KAČUROVSKI R.I., *Nonlinear monotone operators in Banach spaces*. Uspehi Mat. Nauk, **23**, *2* (1968), p. 121—168.
93. KADEÇ M.I., *Spaces isomorphic to a locally uniformly convex space*. Izv. Vyss. Ucebn. Zaved. Mat., **13** (1959), p. 51—57.
94. KATO T., *Demicontinuity, hemicontinuity and monotonicity*. II. Bull. Amer. Soc. **70** (1964), p. 548—550.
95. KATO T., *Demicontinuity, hemicontinuity and monotonicity* II. Bull. Amer. Soc., **73** (1967), p. 886—889.
96. KATO T., *Nonlinear semigroups and evolution equation*. J. Math. Soc. Japan, **19**, *4* (1967), p. 508—519.
97. KATO T., *Accretive operators and nonlinear evolution equation in Banach spaces*. Proc. Symp. Nonlin. Funct. Anal. *18*, Chicago, Amer. Math. Soc., (1970), p. 138—161.

98. KATO T., *Differentiability of nonlinear semi-groups.* Global Anal. Proc. Symp. Pure Math. Amer. Math. Soc., 1970.
99. KLEE V.L., *Some new results on smoothness and rotundity in normed linear spaces.* Math. Ann., **139** (1959), p. 51—63.
100. KOMURA J., *Nonlinear semigroups in Hilbert space.* J. Math. Soc. Japan **19**, *4* (1967), p. 493.
101. KOMURA J., *Differentiability of nonlinear semigroups.* J. Math. Soc. Japan., **21** (1969), p. 375—402.
102. KÖTHE G., *Topologische linear Räume.* Springer Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1960.
103. KREIN M.G., *Sur quelques questions de la géométrie des ensembles convexes situés dans un espace linéaire normé et complet.* Dokladî Acad. Nauk. S.S.S.R., **14** (1937), p. 5—7.
104. LINDENSTRAUSS. J, *On the moduls of smoothness and divergent series in Banach spaces.* Mich. Math. J., **10** (1963).
105. LINDENSTRAUSS J., *On nonseparable reflexive Banach spaces.* Bull. Amer. Math. Soc., **72** (1966), p. 967—970.
106. LIONS J.L., *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites nonlinéaires.* Dunod. et Gauthier Villars Ed. Paris, 1969.
107. LIONS J.L., STAMPACCHIA G., *Variational inequalities.* Comm. Pures Math., **20** (1967), p. 493—519.
108. LOVAGLIA A.R., *Locally uniformly convex Banach spaces.* Trans. Amer. Math. Soc., **78** (1955), p. 225—238.
109. MARINESCU G., *Spații normale.* Ed. Acad., București, 1956.
110. MARINESCU G., *Espaces vectoriels pseudotopologiques et théorie de distributions.* Veb. Deutscher Verlag des Wissenschaften Berlin, 1965.
111. MARINESCU G., *Tratat de analiză funcțională.* Vol. I, Ed. Acad. R.S.R., 1971.
112. MARINESCU G., *Tratat de analiză funcțională.* Vol. II., Ed. Acad. R.S.R., 1972.
113. MILMAN R., *On some criteria for the regularity of spaces of the type* (B), Dokl. Acad. Nauk. S.S.S.R. N.S., **20** (1938), p. 243—246.
114. MAZUR S., *Über konvexe Mengen in linearen normierte Räume.* Studia Math., **4** (1933), p. 70—84.
115. MERMIN J., *Accretive operators and nonlinear semigroups.* Thesis, Univ. of California, Berkeley, 1968.
116. MERMIN J., *On exponential limit formula for nonlinear semi-groups.* Trans. Amer, Math. Soc., **150** (1970), p. 469—476.
117. MINTY G., *On the maximal domain of a monotone function.* Mich. Math. J., **8** (1961) , p. 135—137.
118. MINTY G., *Monotone nonlinear operators in Hilbert spaces.* Duke Math. J., **29** (1962) p. 341—1346.
119. MINTY G., *On the monotonicity of the gradient of a convex function.* Pacific, J. Math., **14** (1964), p. 243—247.
120. MINTY G., *On a monotonicity method for the solution of nonlinear equation in Banach spaces.* Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **50** (1963), p. 1038—1041.
121. MINTY G., *A theorem on maximal monotone sets in Hilbert space.* J. Math. Appl. **11** (1965), p. 434—439.
122. MINTY G., *Monotone operators and certain systems of nonlinear ordinary differential equations.* Proc. Symp. on System. The Theory Polytechnic Instit. of Brooklyn, 1965, p. 39—55.

123. Miyadera J., *Note on nonlinear contraction semigroups.* Proc. Amer. Math. Soc., **21** (1969), p. 219–225.
124. Miyadera J., *On the convergence of nonlinear semigroups.* Tôhoku. Math. J., **21** (1969), p. 221–236.
125. Miyadera J., *Some remarks on semigroups of nonlinear transformations.* Tohoku Math. J., **23** (1971), p. 254–258.
126. Miyadera J., *On the convergence of nonlinear semigroups II.* J. Math. Soc. Japan., **21**, *3* (1969), p. 203–412.
127. Miyadera J.-Oharu S., *Approximation of semigroups of nonlinear operators.* Töhoku Math. J., **2**, *22* (1970), p. 24–47.
128. Moreau J.J., *Fonctionnelles sous-différentiables.* C.R. Acad. Sci. Paris, **257** (1963), p. 4117–4119.
129. Moreau J.J., *Proximité et dualité dans un espace de Hilbert.* Bull. Soc. Math. Grance, **93** (1965), p. 273–299.
130. Moreau J.J., *Fonctionelles convexes.* Sém Eq. Der. Part. College de France, 1967.
131. Mosco U., *A remark on a theorem of F.E. Browder.* J. Math. Anal. Appl. **20** (1967), p. 90–93.
132. Mosco U., *Convergence of convex sets and of solutions of variational inequalities.* Arch. Math. **3**, *4* (1969), p. 510–585.
133. Mosco U., *On the continuity of the Young — Fenchel transform.* J. of Math. Anal. and Appl., **35**, *3* (1971), p. 518–535.
134. Neuberger J.W., *An exponential formula for one parameter semigroup of nonlinear transformations.* J. Math. Soc. Japan **18** (1966), p. 154–157.
135. Neuberger J.W., *Product integral formulas for nonlinear nonexpansive semigroups and nonexpansive evolution systems.* J. Math. Mech., **19**, *19* (1969), p. 403–410.
136. Oharu S., *Note on the representation of semigroups of nonlinear operators.* Proc. Japan. Acad., **42** (1966), p. 1149–1154.
137. Oharu S., *On the generation of semigroups of nonlinear contractions.* J. Math. Soc. Japan., **22**, *4* (1970), p. 526–550.
138. Pascali Dan, *Operatori neliniari.* Ed. Acad. R.S.R., 1973.
139. Pazy A., *Semigroups of nonlinear contractions in Hilbert spaces.* Problems in nonlinear Anal. C.I.M.E. IV Varenna 1970, p. 343–430. Ed. Cremonese, Roma, 1971.
140. Picard C., *Opérateurs T-acretifs d'un espace de Banach reticulé. Séminaire sur les semigroupes et les opérateurs nonlinéaires,* Orsay, 1970–1971.
141. Petryshyn W.V., *On a fixed point theorem for nonlinear P-compact operators in Banach spaces.* Bull. Amer. Math. Soc., **72** (1966), p. 329–334.
142. Petryshyn W.V., *On nonlinear P-compact operators in Banach spaces with application to constructive fixed-point theorems.* J. Math. Anal. Appl. **15** (1966), p. 228–242.
143. Petryshyn W.V., *On the approximative solvability of nonlinear equations.* Math Ann., **177** (1968), p. 156–164.
144. Petryshyn W.V.. *On the proiectional solvability and the Fredholm alternative for equations involving linear A-proper operators.* Arch. Rat. Mech. Anal. **30**, (1968), p. 270–284.
145. Petryshyn W.V., *Nonlinear equations involving noncompact operators.* Proc. Symp. Nonlinear Funct. Anal. Chicago **18**, part I, (1968), p. 206–233.
146. Petryshyn W.V., *Fixed point-theorems involving P-compact, semi-accretive and accretive operators not defined on all of a Banach space.* J. Math. Anal. Appl., **23** (1968), p. 336–354.

147. PETRYSHYN W.V., *On existence theorems for non-linear equations involving noncompact mappings*, Proc. Nat. Acad. Sci., **67** (1970), p. 326–330.
148. PETRYSHYN W.V., *A characterisation of strict convexity of Banach spaces and other uses of duality mappings*. J. Funct. Anal., **6**, *2* (1970), p. 282–292.
149. PETRYSHYN W.V., *Invariance domain theorem for locally A-proper mappings and its implications*. J. Funct. Anal. **5** (1970), p. 137–159.
150. PETRYSHYN W.V., – TUKER T.S., *On the functional equations involving non-linear generalized P-compact operators*. Trans. Amer. Math. Soc., **135** (1969), p. 343–373.
151. RESTREPO G., *Differentiable norms in Banach spaces*. Bull. Amer. Math. Soc., **70** (1964).
152. RESTREPO G., *Differentiable norms*. Vol. Soc. Mat. Mexicana **2**, *10* (1965), p. 47–55.
153. ROCKAFELLAR R.T., *Extensions of Fenchel's duality theorem for convex functions*. Duke Matz. J., **33** (1966), p. 81–90.
154. ROCKAFELLAR R.T., *Characterisation of the subdifferentials of convex functions*. Pacific J. Math., **33** (1966), p. 497–510.
155. ROCKAFELLAR R.T., *Convex properties of non-linear maximal monotone operators*. Bull. Amer. Math. Soc. (1969), **75**, *1*, p. 74–77.
156. ROCKAFELLAR R.T., *Convex Analysis*. Princeton Univ. Press, 1969.
157. ROCKAFELLAR R.T., *Convex functions, monotone operators and variational inequalities*. Proc. Venice Inst. Monotone Op., 1969.
158. ROCKAFELLAR R.T., *On the maximal monotonicity of subdifferential mappings*. Pacif. J. Math., **33**, *1* (1970), p. 209–217.
159. ROCKAFELLAR R.T., *On the virtual conexity of the domain and range of a non-linear maximal monotone operators*. Math. Anal. **185** (1970), p. 81–90.
160. SATO K., *On the generators of non-negative contraction semigroups in Banach lattices*. J. Math. Soc. Japan, **20** (1968), p. 423–436.
161. SATO K., *On dispersive operators in Banach lattices*. Pacific J. of Math, **33** (1970), p. 429–433.
162. SATO K., *A note on non-linear dispersive operators*. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, **18** (1972), p. 456–473.
163. SCHOENBERG J., *On a theorem of Kirzbraun*, Amer. Math. Monthly **60**, (1953), p.620.
164. SCHWARTZ J., *Non-linear functional analysis*. Courant Institut, 1965, 265 p.
165. SEGAL I., *Non-linear semigroups*, Ann. of Math. **78**, (1963), p. 339–364.
166. SMULIAN V.L., *Sur la dérivabilité de la norme dans l'espace de Banach* Dokl. Akad. Nazk. S.S.S.R., N.S., **27**, (1940), p. 643–648.
167. SMULIAN V.L., *Sur la structure de la sphère unitaire dans l'espace de Banach*. Mat. Sbornik. N.S., **9**, (1941), p. 545–561.
168. STAMPACCHIA G., *Variational inequalities*, Proc of a N.A.T.A. Adv. Study Inst. Venice, 1968.
169. SUNDARESAN K, *Smooth Banach spaces*. Bull. Amer. Math. Soc., **72**, (1966), p. 520–521.
170. SUNDARESAN K., *Smooth Banach spaces*. Math. Ann, **173**, (1968), p. 191–199
171. SCHIOP AL. *Analiză numerică neliniară*. Ed. Acad. R.S.R., 1972, 280 p.
172. TROIANSKI S.L., *Equivalent norms in unseparable B-spaces with an unconditional basis*. Teor. Funkt. Funktional Anal. i priloj. Kharkov, **6**, (1968), p. 59–65.
173. TROIANSKI S.L, *On locally uniformly convex and differentiable norms in certains non-separable Banach spaces*. Studia Math. XXXVII, (1971), p. 173–180.
174. TUCKER T.S. – LERAY, *Schauder Theorem for- P-compact operators and its consequences*, J. of Math. Anal. and Appl., **23**, (1968), p. 355–364.

175. VAINBERG M.M., *Metode variaţionale şi metoda operatorilor monotoni*. Monografie, ruseşte, 1972.
176. WATANABE J. , *Semigroups of non-linear operators on closed convex sets*. Proc. Japan. Acad., **45**, *4*, (1969), p. 219—223.
177. WATANABE J., *On non-linear semigroups generated by cyclically dissipative sets*. J. Fac. Sci. Tokyo **18**, (1971), p. 127—137.
178. WEBB G.F., *Non-linear contraction semi-groups in weakly complete Banach spaces*. Thesis Emary Univ., 1968.
179. WEBB G.F., *Representation of semigroups of non-linear nonexpansive transformations in Banach spaces*. J. Math. Mech., **19**, (1970), p. 159—170.
180. WEBB, G.F., *Non-linear evolution equations and product stable operators on Banach space*. Trans. Amer. Math. Soc., **148**, (1970), p. 273—282.
181. WEBB G.F., *Continuous non-linear perturbations of linear accretive operators in Banach spaces*. J. Funct. Anal. (to appear)
182. YEN C.L., *The range of m-dissipative sets*. Bull. Amer. Math. Soc. (to appear).
183. YOSHIDA K., *Functional Analysis*. Springer Verlag., Berlin, Heidelberg, New York, 1969.

INDEX

APPLICATIONS DE DUALITÉ DANS L'ANALYSE FONCTIONNELLE NON LINÉAIRE

(RÉSUMÉ)

Aux origines, les problèmes d'analyse fonctionnelle non linéaire concernaient surtout les opérateurs compacts, mais les nécessités créées par des problèmes aux limites pour les équations aux dérivées partielles ont imposé l'étude des classes d'opérateurs non compacts.

Ainsi G. Minty, F. Browder, J. Komura et T. Kato ont initié l'étude systématique des applications monotones d'un espace de Banach X dans 2^{X^*} ainsi que celui des applications accrétives de X dans 2^X.

L'instrument essentiel dans l'étude de ces classes d'applications sont les applications de dualité; c'est pourquoi on s'est proposé de faire une étude détaillée des propriétés des applications de dualité dans les espaces de Banach. Cela nous a mené à étudier certaines classes d'espaces parmi lesquels les espaces strictement et uniformément convexes. Les propriétés géométriques de ces espaces sont fréquemment utilisées dans les problèmes non linéaires mais ne se trouvent nulle part groupées. Ainsi dans les deux premiers chapitres on essaye de grouper les résultats significatifs comme les théorèmes de J. James, J. Lindenstrauss, E. Asplund, S. Tröianski. On présente ensuite les propriétés des applications de dualité (le théorème d'Asplund de caractérisation comme sous-différentielle d'une fonction convexe), en insistant sur ses propriétés de continuité dans des espaces de Banach particuliers.

Une série de résultats de caractérisations des espaces de Banach à travers l'application de dualité sont donnés (théorèmes de Smulian, Bonic-Reis, W. Petryshyn).

Dans le troisième chapitre on décrit le degré topologique de Brouwer avec ses principales propriétés (théorème de Borsuk-Ulam)

et on donne une généralisation, due à Browder, aux espaces de Banach. Les applications A-propres sont introduites et on présente le théorème de Petryshyn d'invariance du domaine.

Le IV^e chapitre est consacré aux applications monotones. Parmi les résultats présentés signalons un théorème d'existence (F. Browder) pour une inéquation variationnelle correspondant à une équation fonctionnelle pour un opérateur monotone perturbé, les théorèmes de convexité du domaine d'un opérateur maximal monotone de R.T. Rockafellar et l'étude du degré de l'application de dualité. Dans le dernier chapitre on étudie les opérateurs accrétifs et les semi-groupes de contractions non linéaires en présentant les résultats récents de M. Brézis, A. Pazy, M. Crandall, S. Oharu, T. Kato, T. Liggett.

Entre autres un théorème de type Hille-Yoshida est donné dans les cas d'espaces de Hilbert, ainsi que son extension au cas d'espaces de Hilbert, et son extension au cas d'espaces uniformément convexes au dual uniformément convexe. Dans la présentation des résultats on a sélecté ceux qui mettent en évidence le rôle de l'application de dualité; pour d'autres problèmes non linéaires on peut consulter le Traité d'Analyse fonctionnelle (vol. I^{er} et II^e) du professeur G. Marinescu, ainsi que les monographies de G. Dincă, D. Pascali et A. Schiop pour approfondir l'étude des opérateurs monotones et celle de V. Barbu pour des problèmes concernant les équations d'évolution.

On a cherché que l'exposé soit indépendant et au niveau des connaissances d'analyse fonctionnelles dans le cadre d'un cours général.

Je dois mon orientation vers la problématique de cette monographie au professeur U. Mosco avec lequel j'ai travaillé pendant l'année de spécialisation (avec une bourse C.N.R.) à l'Université de Rome. Une grande partie des résultats ont fait l'objet des séminaires que j'ai tenus en 1971—1972 à l'Université de Rome et en 1973 à l'Institut Mathématique de Bucarest.

Je remercie le professeur G. Marinescu pour m'avoir suggéré d'écrire ce livre et les collègues G. Godini et L. Zsidó pour les discussions utiles eues.

TABLE DES MATIÈRES

Redactor : LUMINIȚA ZORILESCU
Tehnoredactor : PETRU BRUMĂ

Bun de tipar 25.02.1974. Tiraj 1560 ex. Hîrtie scris I A tratată 83%, format 16/610 × 860 de 80 G/m². Coli de tipar 19.

C.Z. pentru biblioteci mari $\left\{\begin{array}{l} 517.93:513.88 \\ 513.88:517.93 \\ 517.43:513.88 \end{array}\right.$

Întreprinderea poligrafică Informația, str. Brezoianu nr. 23—25, București

REPUBLICA SOCIALISTĂ ROMÂNIA

I. P. Informația c. 890

Această lucrare îşi propune să studieze amănunţit aplicaţiile de dualitate în spaţii Banach, deoarece ele s-au dovedit a fi instrumentul de bază în studiul unor clase importante de operatori neliniari, anume al operatorilor monotoni şi acretivi.

Legat de acestea se studiază proprietăţile geometrice ale unor clase de spaţii Banach, cum ar fi spaţiile strict convexe, uniform convexe, cu proprietatea H, cu scheme de aproximare, etc. pentru care sînt date diverse caracterizări cu ajutorul aplicaţiilor de dualitate.

Lei 12

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA