ФИЗИКА

А. Д. Александров и В. В. Овчинникова

ЗАМЕЧАНИЯ К ОСНОВАМ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ[1]

§ 1. Формулировка и обсуждение результата

1. В настоящей работе доказывается, что для вывода преобразований Лоренца достаточно закона постоянства скорости света, тогда как принцип относительности, требования линейности и даже непрерывности преобразований оказываются лишними. Возможность обойтись без требования линейности была установлена Г. Вейлем и даже еще Лиувиллем.[2] Но наш метод совершенно отличен от метода Вейля, к тому же мы обходимся даже без требования непрерывности.

Закон распространения света от точечного источника выражается формулой:

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2} = c\,(t-t_0), \tag{1}$$

где x_0, y_0, z_0 — пространственные координаты источника, а t_0 — время испускания света.

Вопрос касается таких преобразований пространственно-временных координат x, y, z, t, при которых не изменяется ни вид формулы (1), ни величина c. Само собой разумеется, при преобразовании переменных x, y, z, t величины x_0, y_0, z_0, t_0 подвергаются в формуле (1) такому же преобразованию. Предполагается, что переменные x, y, z, t принимают все возможные значения от $-\infty$ до $+\infty$ и величины x_0, y_0, z_0, t_0 могут также иметь любые значения.

При этих условиях дело сводится к доказательству следующей математической теоремы: *любое взаимно однозначное преобразование, сохраняющее формулу (1), есть „общее преобразование Лоренца“*.

При этом под общим преобразованием Лоренца понимается преобразование, являющееся комбинацией следующих преобразований:

1) преобразования Лоренца частного вида

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},\ y' = y,\ z' = z,\ t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}\,x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}; \tag{2}$$

2) ортогональных преобразований переменных x, y, z (включая перенос начала и перемену знака);

---

[1] Математическая часть этой работы была в основном выполнена мною с В. В. Овчинниковой в 1951 г. При подготовке работы к печати я сделал некоторые изменения и добавил § 1. *А. Александров*.

ematische Analyse des Raumproblems, стр. 63.

3) переноса начала отсчета t (т. е. преобразования $t' = t + a$);

4) умножения всех переменных x, y, z, t на одно и то же число.

Не исключается, конечно, что некоторые из этих преобразований могут отсутствовать, или, иными словами, сводиться к тождественному преобразованию. „Общность“ этих требований в сравнении с обычными преобразованиями Лоренца состоит не в присоединении переносов начала и ортогональных преобразований, а в допущении умножения x, y, z, t на одно и то же число, т. е. в допущении пропорционального изменения масштабов пространственных и временной координат. То, что при умножении всех координат $x, \ldots, x_0, \ldots, t_0$ на одно и то же число формула (1) сохраняется, очевидно. Однако такое преобразование всегда исключают; этот пункт мы еще обсудим несколько дальше.

Данное определение общих преобразований Лоренца чисто алгебраическое в соответствии с математической постановкой самого вопроса, когда x, y, z, t рассматриваются просто как переменные в формуле (1). Соответственно и величина v в формулах (2) появляется просто как параметр, от которого зависит преобразование. Но можно, как известно, представить любое общее преобразование Лоренца более наглядно, имея в виду, что x, y, z имеют смысл прямоугольных координат. Общее преобразование Лоренца от переменных x, y, z, t к x', y', z', t' представляется как последовательность следующих преобразований: 1) перенос начала отсчета t; 2) перенос начала осей x, y, z; 3) вращение осей x, y, z (так, чтобы ось x стала параллельной скорости одной системы относительно другой); 4) преобразование Лоренца вида (2); 5) вращение и, если нужно, перемена направления осей x, y, z (так, чтобы они совпали с осями x', y', z'); 6) пропорциональное изменение масштабов, равносильное умножению x, y, z, t на одно и то же число.[1]

В формулированной выше теореме заранее не предполагается не только линейность, но даже и непрерывность преобразования. Соответственно решающим сказывается именно доказательство линейности преобразования, сохраняющего формулу (1). Это доказательство проводится дальше в § 2 посредством достаточно простых соображений, принадлежащих по существу элементарной геометрии. Мы исходим при этом из следующей геометрической интерпретации стоящей задачи.

Представим себе четырехмерное эвклидово пространство, в котором задана система прямоугольных координат x, y, z, t. Тогда уравнение (1) определяет в этом пространстве конус с вершиной в точке

---

[1] Общее преобразование Лоренца можно также записать следующим образом. Если $\mathbf{r}$ — радиус-вектор точки (x, y, z) и $\mathbf{v}$ — вектор скорости, то

$$\mathbf{r}' = \lambda\left[\mathbf{r} + \left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - 1\right)\frac{(\mathbf{r}\mathbf{v})\,\mathbf{v}}{v^2} - \frac{\mathbf{v}t}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + \mathbf{a}\right];$$

$$t' = \lambda\left[\frac{t - \frac{(\mathbf{r}\mathbf{v})}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + b\right].$$

Эти формулы можно найти, напр., у В. Паули (Теория относительности, стр. 24, изд. 1947) с той разницей, что там исключено умножение на общий множитель λ и перенос начала координат на вектор $\mathbf{a}$, так же как перенос отсчета времени на b.

(x_0, y_0, z_0, t_0) и с осью, параллельной оси t. Вершина конуса может быть любой, но направление осей рассматриваемых конусов и их растворы одинаковы.

Преобразование от x, y, z, t к x', y', z', t', естественно, интерпретируется как взаимно однозначное преобразование четырехмерного пространства, сопоставляющее каждой точке с координатами x, y, z, t точку с координатами x', y', z', t'.

Теорема утверждает, что *если такое преобразование переводит каждый из указанных конусов в такой же конус, то оно есть общее преобразование Лоренца.* Дело сводится к доказательству того, что такое преобразование линейно, после чего дальнейшее не представляет ничего нового. Так как вывод преобразований Лоренца в предположении линейности известен и ряд его вариантов можно найти в учебниках, мы этого вывода воспроизводить не будем.[1]

2. Рассмотрим теперь физическую сторону формулированного результата. Не вдаваясь здесь в анализ понятий системы отсчета и пространственно-временных координат, мы принимаем, что в многообразии событий определяются пространственные и временные координаты x, y, z, t. Термин „координаты" будет пониматься в смысле пространственных и временных координат.

Мы вводим следующее определение. *Лоренцовой мы называем такую систему координат, в которой закон распространения света от точечного источника выражается формулой (1).*

Ясно, что речь идет об инерциальных системах; но в данной формулировке мы отвлекаемся от этого и в определение вводим только закон распространения света в форме (1). Поэтому, чтобы заранее не навязывать представлений, связанных с термином „инерциальная система", мы предпочитаем ввести новый термин — „лоренцова система координат".

Формулированная в п. 1 теорема сводится, очевидно, к следующему:

Преобразование от одной лоренцовой системы к другой (при условии, что скорость света с остается неизменной) есть общее преобразование Лоренца.

В этом не содержится еще, однако, никаких *физических* утверждений, так как мы только ввели определение и формулируем касающуюся его *математическую* теорему. Определение имеет физический смысл лишь тогда, когда определяемое понятие отражает некоторое физическое содержание. Иными словами, лоренцовы системы еще должны реально существовать, т. е. быть связанными с физическими процессами. Соответственно мы имеем в виду следующее основное положение:

(A). *Существуют лоренцовы системы координат, т. е. системы, в которых закон распространения света от точечного источника выражается формулой (1).*

Это утверждение констатирует уже некоторое реальное обстоятельство и является физическим законом.

В этой связи представляется полезным заметить, что иногда в вопросе об определении и законе допускается путаница. Она проистекает, в частности, от недостаточного понимания того, что определение имеет физический смысл только при том условии, если оно

---

[1] См. напр., Рашевский. Риманова геометрия и тензорный анализ, 1953, стр. 259, 262.

отражает нечто объективное. Иными словами, определение само по себе остается пустым, если оно не дополнено утверждением о реальном существовании определяемого объекта; а такое утверждение представляет уже не определение, а закон или констатацию факта. Короче, как формулировки законов бессмысленны без определений, так и определения бессодержательны без законов. Отделить одно от другого можно только условно в абстрактной схеме теории.[1]

Формулированное положение (А) о существовании лоренцовых систем еще недостаточно. Ведь и по теории неподвижного эфира такая система существует — это система, связанная с эфиром; но тут она одна. Поэтому положение (А) должно быть дополнено. Соответственно можно формулировать следующий закон:

(В). *Всякое общее преобразование Лоренца возможно*, так что вместе с одной лоренцовой системой существуют и любые другие.

(Здесь имеется в виду физическая возможность, и существование лоренцовых систем понимается, конечно, не в том смысле, что они все должны быть в данный момент в наличности. Но мы не будем вдаваться в анализ глубоко встающего здесь вопроса о соотношении реальной возможности и действительности.)

Для завершения формулировки основ теории относительности остается добавить принцип относительности:

(С). *Все лоренцовы системы равноправны; или выражения физических законов инвариантны относительно общих преобразований Лоренца.*[2]

Однако принцип относительности не нужен для вывода преобразований Лоренца и, соответственно, их непосредственных следствий.

Заметим еще, что формулированные положения о лоренцовых системах включают фактически утверждение об эвклидовости пространства.

Закон постоянства скорости света без всяких предположений о характере метрики пространства можно формулировать следующим образом.

В некоторых („лоренцовых" или инерциальных) системах отсчета свет распространяется во все стороны с одинаковой скоростью, так что если r означает расстояние от источника, то

$$r = c(t - t_0). \tag{3}$$

Эвклидовость пространства равносильна существованию такой системы координат, в которой расстояние выражается известной формулой

$$r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}. \tag{4}$$

---

[1] Напр., утверждают, будто понятие одновременности пространственно разделенных событий есть вопрос простого условия (см., напр., „Курс физики" под ред. Н. Д. Папалекси, т. II, стр. 539). Это глубочайшее заблуждение происходит в результате отрыва определения от закона. В частности, когда Эйнштейн в своей классической работе ввел определение одновременности, он явно указал, что предполагает возможность провести его без противоречий, и уже здесь заключалось не определение, а гипотеза; без ее оправдания определение было бы бессмысленным. (См. Принцип относительности, серия „Классики естествознания", стр. 137.) Мы уже не говорим о том, что эйнштейновское определение одновременности основано на з а к о н е постоянства скорости света.

[2] По поводу понятия „равноправности" систем, так же как о принципе относительности вообще см., в частности, статью А. Д. Александрова в „Вестнике Ленинградского университета", № 8, 1953.

Если такая система координат может быть введена в системе отсчета, где имеет место закон (3), то соединение (3) и (4) дает формулу (1)

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}=c\,(t-t_0). \tag{1}$$

Таким образом, наш вывод преобразований Лоренца может считаться основанным или на законе постоянства скорости света в виде формулы (1), или на этом же законе в форме (3) и на предположении об эвклидовости пространства, выраженном формулой (4).

3. В преобразовании от одной лоренцовой системы к другой сам собой появляется параметр v, и хотя в определении лоренцовых систем нет речи об их взаимном движении, оказывается, что v представляет собой величину скорости движения одной системы относительно другой, так как при постоянном x из формул (2) следует

$$\Delta x'=-\frac{v\Delta t}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}},\quad \Delta t'=\frac{\Delta t}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}, \tag{5}$$

так что

$$\frac{\Delta x'}{\Delta t'}=-v, \tag{6}$$

и точно так же при постоянном x'

$$\frac{\Delta x}{\Delta t}=v. \tag{7}$$

Остальные преобразования, входящие в общее преобразование Лоренца, ничего здесь не меняют, кроме того, что движение происходит, вообще говоря, в любом направлении, а не только вдоль оси x. В частности, умножение координат на общий множитель не изменяет отношения $\dfrac{\Delta x}{\Delta t}$.[1]

Следовательно, *лоренцовы системы движутся друг относительно друга прямолинейно и равномерно.*

Далее, хотя бы в силу линейности общего преобразования Лоренца, оказывается, что тело, движущееся в отношении одной лоренцовой системы равномерно и прямолинейно, будет двигаться так же относительно любой другой. Поэтому, если в одной верен закон инерции, то он верен и в любой другой, или, иными словами, *тот факт, что лоренцовы системы — инерциальные, следует из инерциальности одной из них.*

---

[1] Из формул, данных в подстрочном примечании на стр. 96, следует, что при постоянном r

$$\Delta \mathrm{r}'=-\lambda\frac{\mathrm{v}\,\Delta t}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}},\quad \Delta t'=\frac{\lambda\,\Delta t}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}},$$

так что

$$\frac{\Delta \mathrm{r}'}{\Delta t'}=-\mathrm{v}.$$

Аналогично при постоянном r′ получим $\dfrac{\Delta \mathrm{r}}{\Delta t}=\mathrm{v}$.

Вопрос можно поставить и иначе. Можно формулировать закон, что *с любым телом отсчета, движущимся по инерции, связывается лоренцова система координат.* Но так как тело отсчета в связанной с ним системе неподвижно, то в любой другой лоренцовой системе оно движется прямолинейно и равномерно. Это значит, что всякое тело, „предоставленное самому себе", движется в лоренцовой системе прямолинейно и равномерно, т. е. имеет место закон инерции.

Таким образом, *закон инерции уже заключается в утверждении, что с любым телом, „движущимся по инерции", связывается лоренцова система координат.*

Однако при абстрактном изложении теории нет необходимости класть в основу закон инерции; он должен, скорее, рассматриваться как первый закон динамики. Соответственно нет нужды класть в основу и самое понятие инерциальной системы. Частная теория относительности исторически основывается прежде всего на электродинамике, и поэтому естественно принять за основу при ее построении понятие лоренцовой системы, опирающееся на закон распространения света. Это дает самый короткий путь к собственному ядру теории — преобразованиям Лоренца. Конечно, возможны и существуют другие системы логического построения теории, отправляющиеся от других предпосылок. В частности, всё равно имеет место закон, что всякая лоренцова система есть вместе с тем инерциальная. Это и есть собственно закон постоянства скорости света в той его форме, что в отношении всякой инерциальной системы свет распространяется с одинаковой скоростью. Но мы как бы переворачиваем формулировку этого закона, когда берем за исходное понятие лоренцовой системы и утверждаем, что во всякой лоренцовой системе тело, „предоставленное само себе", движется прямолинейно и равномерно. Как только что было показано, закон инерции в этой форме вытекает из его справедливости для одной лоренцовой системы или из того, что с телом, „предоставленным самому себе", связывается лоренцова система.

4. Как уже было замечено, пропорциональное изменение масштабов пространственных и временных координат, очевидно, не нарушает формулы (1) закона распространения света. Поэтому, естественно, мы должны были включить в общее преобразование Лоренца умножение всех координат на любой общий множитель. Однако изменение масштабов всегда исключают из преобразований Лоренца. Это не кажется нам вполне правильным, так как не только формула (1) не меняется при общем изменении масштабов, но и вообще выражения физических законов инвариантны относительно пропорциональных изменений масштабов, поскольку никаких преимущественных масштабов не существует. Соответственно принцип относительности, строго говоря, утверждает инвариантность выражений физических законов относительно общих преобразований Лоренца.

Совершенно аналогично формулы эвклидовой геометрии инвариантны относительно пропорционального изменения масштабов прямоугольных координат. Но, например, в геометрии Лобачевского это не так, поскольку там нет подобия фигур и существуют отрезки, выделенные по своим геометрическим свойствам (например, сторона правильного треугольника с суммой углов, равной 90°), подобно тому, как прямой угол или радиан выделены по своим геометрическим свойствам.

В теории относительности нет преимущественных, выделенных в силу общих законов, единиц длины и времени, но в отличие от классической теории в ней есть преимущественная, выделенная в силу общих законов, скорость — скорость света c. Поэтому здесь допустимы только пропорциональные изменения масштабов для пространственных и временных координат совместно, тогда как в классической теории единицы времени можно менять независимо. Это, кстати, отражает в самой простой форме взаимосвязь пространства и времени, установление которой составляет главную особенность теории относительности. Неодинаковое изменение масштабов длин и времени ведет к изменению фундаментальной постоянной c. Самое правильное, с абстрактной точки зрения, выбрать единицы так, чтобы было $c = 1$, и тогда эта постоянная просто исчезнет из выражений законов физики. Такие масштабы будут объективно преимущественными в соответствии с особой ролью скорости света. Между прочим, в астрономии расстояния давно измеряют световыми годами.

Обычно изменение масштабов исключают посредством специального рассуждения, как это сделано, например, в упоминавшейся классической работе Эйнштейна. Но в этом нет никакой надобности. Дело обстоит гораздо проще. Подобно тому как исключение изменения масштабов в геометрии осуществляется простой фиксацией отрезка, играющего роль единицы длины, так и здесь достаточно фиксировать два события — две точки многообразия пространства-времени и принять интервал между ними за единицу.

Интервал между событиями — точками (x_1, y_1, z_1, t_1), (x_2, y_2, z_2, t_2) есть по определению величина

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 - c^2 (t_1 - t_2)^2. \qquad (8)$$

Он, как известно, инвариантен относительно преобразований Лоренца при неизменных масштабах; умножение же всех координат на одно число λ приводит к умножению интервала на λ^2. Поэтому, фиксируя значение интервала для двух точек, мы исключаем изменение масштабов при переходе от одной лоренцовой системы к другой.[1]

Таким образом, хотя пропорциональные изменения масштабов и входят в общие преобразования Лоренца и должны учитываться в принципе относительности, они несущественны и легко исключаются простой фиксацией единичного интервала.

Исключение изменения масштабов путем фиксации единичного интервала приводит к известным выводам о лоренцовом сокращении и об изменении промежутков времени. Если единичный интервал фиксирован, так что изменение масштабов исключено, и системы K и K' движутся друг относительно друга вдоль оси x, то координаты в них связаны частным преобразованием Лоренца. Поэтому вывод лоренцова сокращения и изменения промежутков времени получается

---

[1] При неизменном интервале должно быть $\lambda^2 = 1$, т. е. $\lambda = \pm 1$. Но умножение времени t на -1, т. е. перемена знака t, исключено, так как в формуле закона распространения света $r = c(t - t_0)$ слева стоит расстояние $r = \sqrt{(x - x_0)^2 + \ldots}$, которое положительно.

здесь обычным путем. Никакие дополнительные соображения и принцип относительности здесь совершенно не нужны.[1]

5. К сказанному можно еще добавить, что из общих преобразований Лоренца следует известным путем релятивистский закон сложения скоростей. Пропорциональные изменения масштабов здесь вообще не играют роли, так как скорость определяется отношением $\frac{\Delta x}{\Delta t}$.[2]

Таким образом, мы убеждаемся, что *как преобразования Лоренца, так и вся релятивистская кинематика (лоренцово сокращение, закон сложения скоростей и др.) могут быть выведены из инвариантности закона постоянства скорости света в форме (1) или из инвариантности того же закона в форме (3): $r = c(t - t_0)$ и эвклидовости пространства без привлечения принципа относительности и каких бы то ни было дополнительных соображений.*

Постоянство скорости света выражает в наиболее простой форме ту взаимную связь пространства и времени, раскрытие которой составляет ядро теории относительности.[3]

6. Мы исходили из требования неизменности формулы закона распространения света в виде

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2} = c\,(t-t_0). \tag{1}$$

Так как слева здесь стоит расстояние, которое всегда $\geqslant 0$, то изменение знака времени невозможно. Иными словами, общие преобразования Лоренца, сохраняющие формулу (1), не допускают перестановки

---

[1] Известный вывод преобразований Лоренца, данный в классической работе Эйнштейна (см. Принцип относительности. Сер. „Классики естествознания", стр. 146—148 или В. Паули. Теория относительности, стр. 23), содержит фактически дополнительное предположение. Эйнштейн получает формулы преобразования

$$x' = \varphi(v)\frac{x - vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \quad y' = \varphi(v)\,y, \quad z' = \varphi(v)\,z, \quad t' = \varphi(v)\frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

и доказывает посредством „соображений симметрии", что $\varphi(v) = 1$. Но здесь используются не только „соображения симметрии". В действительности предполагается, что множитель φ зависит только от скорости. А между тем и в неподвижных друг относительно друга системах можно выбирать разные единицы, так что будет $\varphi \neq 1$. Таким образом, уже здесь делается предположение, что в системах K и K' фиксированы физически одинаковые единицы. В нашем же выводе все лишние соображения устраняются, а не формулированное явно и точно предположение о выборе физически одинаковых единиц заменяется точным указанием на фиксацию единичного интервала.

[2] Обратимся к формулам, данным в подстрочном примечании на стр. 96. Пусть точка M в системе K движется со скоростью $\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{u}$. Дифференцируя $\mathbf{r}'$ по t', подставляя $d\mathbf{r} = \mathbf{u}dt$ и деля $d\mathbf{r}'$ на dt' (так что множитель λ сократится), получим релятивистский закон сложения скоростей в общем виде:

$$\frac{d\mathbf{r}'}{dt'} = \mathbf{u}' = \frac{\mathbf{u}\sqrt{1-v^2/c^2} + \left(1-\sqrt{1-v^2/c^2}\right)\frac{(\mathbf{uv})\,\mathbf{v}}{v^2} - \mathbf{v}}{1-\frac{(\mathbf{uv})}{c^2}},$$

а если $\mathbf{u}$ параллельно $\mathbf{v}$, так что $\frac{(\mathbf{uv})\,\mathbf{v}}{v^2} = \mathbf{u}$, то $u' = \frac{u-v}{1-\frac{uv}{c^2}}$,

[3] Это замечание развито в общей форме в статье А. Д. Александрова («Вестник Ленинградского университета», № 8, 1953). Высказанные там общие соображения по поводу структуры теории относительности получают здесь, как нам кажется, достаточно точное обоснование.

прошедшего и будущего. Физически это можно понять, если вспомнить, что свет распространяется от источника, обратный же процесс схождения шаровой волны из бесконечности в природе не встречается.

Однако вместо формулы (1) всегда пишут

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2-c^2(t-t_0)^2=0. \tag{9}$$

Само собой ясно, что произведенное здесь возведение в квадрат влечет возможность изменения знака времени. То же получается при выводе преобразований Лоренца из требования неизменности закона распространения света в его дифференциальной форме, например, из требования неизменности волнового уравнения, как это было сделано Н. А. Умовым. [1] Это также физически понятно, потому что, так сказать, дифференциальные электромагнитные процессы протекают в обе стороны.

В дополнение к нашему выводу общих преобразований Лоренца из требования неизменности формулы (1) мы докажем попутно, что они выводятся также и из требования неизменности формулы (9), причем, конечно, появляется еще возможность изменения знака времени.

В четырехмерной геометрической интерпретации, о которой говорилось в п. 1, уравнения (1) определяют не полные конусы, а только половины полных конусов, обращенные отверстием в сторону положительных значений координаты t. Уравнения же (9) определяют полные конусы. Соответственно речь идет о следующей геометрической теореме:

Взаимно однозначное преобразование, переводящее каждый полный конус (9) в такой же конус, есть общее преобразование Лоренца с возможным добавлением изменения знака координаты t.

Наконец, вместо закона постоянства скорости света можно принять за основу закон ограниченности скоростей: *всякое воздействие распространяется не быстрее света, чем с некоторой скоростью c.* Этот закон можно выразить в соответствующих координатах неравенством

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2} \leqslant c\,(t-t_0). \tag{10}$$

Мы докажем теорему, что *преобразование, не нарушающее этого неравенства, есть также общее преобразование Лоренца.*

Геометрически неравенство (10) определяет в четырехмерном пространстве телесный конус. Соответственно теорема утверждает, что *взаимно однозначное преобразование, переводящее каждый телесный конус (10) в такой же конус, есть общее преобразование Лоренца.*

Таким образом, закон ограниченности скоростей вполне может быть положен в основу теории относительности вместо закона постоянства скорости света.[2] Тогда неизменность предельной скорости c получится как следствие, потому что формула (1) инвариантна относительно общих преобразований Лоренца. То, что c есть скорость света, отсюда, конечно, никак не следует; но это касается уже не кинематики теории относительности, а электродинамики.

---

[1] См. Н. А. **Умов**. Условия инвариантности волнового уравнения. Журн. Русск. физ.-хим. общ., физич., т. 44 (1912), № 6, стр. 349—354.

[2] См. статью В. А. Фока в «Вестнике Ленинградского университета» № 4, 1949.

§ 2. Доказательство линейности преобразований, сохраняющих формулу закона распространения света

1. Мы докажем здесь, что преобразования координат, сохраняющие формулу закона распространения света, или закона ограниченности скоростей, линейны. Согласно указанной в § 1 геометрической интерпретации, мы рассматриваем четырехмерное эвклидово пространство, где введены прямоугольные координаты x, y, z, t. Преобразование от x, y, z, t к x', y', z', t' понимается как преобразование пространства, сопоставляющее каждой точке (x, y, z, t) точку (x', y', z', t').

Вопрос приводится к доказательству трех теорем, в формулировках которых предполагается, что речь идет о взаимно однозначных преобразованиях четырехмерного пространства.

Теорема 1. *Преобразование, переводящее каждый конус*

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}=c(t-t_0) \tag{1}$$

в такой же конус, линейно.[1]

Теорема 2. *Преобразование, переводящее каждый полный конус*

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=c^2(t-t_0)^2 \tag{2}$$

в такой же конус, линейно.

Теорема 3. *Преобразование, переводящее телесные конусы*

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}\leqslant c(t-t_0) \tag{3}$$

в такие же конусы, линейно.

Аналитическое представление как рассматриваемых конусов, так и преобразований не будет, однако, играть в наших выводах никакой роли. Существенно только то, что речь идет о конусах одинакового раствора и с одинаково направленными осями.

Далее известно, что всякое взаимно однозначное преобразование, переводящее прямые в прямые, линейно.[2] Поэтому достаточно доказать чисто геометрическое утверждение, что каждое из рассматриваемых преобразований переводит прямые в прямые. Доказательство этого и составляет содержание данного параграфа.

Наши рассуждения будут иметь чисто геометрический характер, и хотя они относятся к четырехмерному пространству, для наглядности можно представить себе трехмерное пространство, так как существенные моменты в доказательстве оказываются совершенно такими же, если рассматривать обычные конусы в трехмерном пространстве. Вообще теоремы 1—3 и их доказательства дословно переносятся на случай любого числа измерений $n > 2$.[3]

---

[1] Когда мы говорим, что преобразование переводит конус K в конус K', подразумевается, что конус K переходит в целый конус K', а не в его часть, т. е. не только каждой точке конуса K сопоставляется точка конуса K', но и, обратно, каждая точка конуса K' сопоставлена какой-либо точке конуса K.

[2] См., напр., Б. Н. Делоне и Д. А. Райков. Аналитическая геометрия, т. I, гл. II, § 27, 33.

[3] В двухмерном случае теоремы, аналогичные теоремам 1—3, не имеют места. Напр., в теореме 1 в этом случае речь шла бы о преобразованиях, переводящих друг в друга пары полупрямых $|x-x_0|=c(t-t_0)$. Такое преобразование вовсе не обязано быть линейным, так как, очевидно, может включать любые неравномерные растяжения и сжатия, сохраняющие направления этих полупрямых.

Мы обратимся прежде всего к доказательству теоремы 1; потом будет показано, что доказательство теорем 2 и 3 может быть сведено к повторению рассуждений, доказывающих теорему 1.

2. В пунктах 2—4, говоря о конусах, мы непременно имеем в виду конусы (1).

Лемма 1. *Никакие три конуса K_1, K_2, K_3 не могут пересекаться так, чтобы K_1 и K_2 имели ту же общую часть, что K_1 и K_3.* (Здесь имеется в виду, что конусы действительно пересекаются, а не касаются вдоль образующих).

Доказательство. Пусть конусы K_1 и K_2 пересекаются. Проведем трехмерную плоскость P через вершину одного из них перпендикулярно его оси и будем двигать ее параллельно в направлении оси. Когда плоскость пересечет оба конуса K_1 и K_2, она будет пересекать их по двум сферам S_1 и S_2, которые лежат вне друг друга, так как иначе один конус лежал бы в другом и конусы не пересекались бы. (Это следует из того, что конусы имеют одинаковый раствор и параллельные оси.)

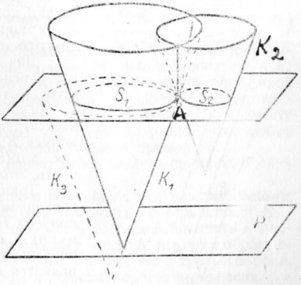

Рис. 1.

При движении плоскости эти сферы расширяются и в некоторый момент коснутся друг друга в некоторой точке A. (См. рис. 1, где дана соответствующая картина для трехмерного случая, когда сферы S_1 и S_2 заменяются окружностями.) Очевидно, что из всех точек пересечения конусов K_1 и K_2 точка A является самой „нижней“ (если оси конусов считать направленными вверх).

Рассмотрим теперь другой конус K_3. Если он пересекает конус K_1 так же, как конус K_2, то точка A должна быть самой нижней точкой пересечения конусов K_1 и K_3. Поэтому сфера S_3, по которой плоскость P пересекает конус K_3, также касается сферы S_1 в точке A.

Если, в частности, сферы S_1 и S_2 лежат по одну сторону от касательной плоскости в точке A, то, как легко видеть, конусы K_1 и K_3 касаются вдоль образующей, идущей через точку A. Если же сферы S_1 и S_2 лежат по разные стороны, то касаются друг друга конусы K_1 и K_2. Так или иначе, конус K_3 касается одного из конусов K_1 или K_2, т. е. не пересекает его. Стало быть, никакой конус K_3 не может пересекать конус K_1 так же как конус K_2, и лемма доказана.

Лемма 2. *Преобразование, переводящее конусы (1) в такие же конусы, переводит их образующие в образующие, а вершины в вершины.*

Доказательство. Возьмем какой-либо из рассматриваемых конусов K и его образующую L. Продолжим эту образующую за вершину конуса и возьмем на ее продолжении две точки A_1, A_2 так, что A_2 лежит дальше от вершины конуса K. Возьмем конусы K_1, K_2 с вершинами в точках A_1, A_2 (рис. 2). Так как конусы K, K_1, K_2 имеют одинаковые растворы и направления осей, то они касаются друг друга, и общей частью как конусов K, K_1, так и конусов K, K_2 будет как раз образующая L.

После преобразования конусы перейдут в такие же конусы K', K'_1, K'_2, и вследствие взаимной однозначности преобразования общая часть как конусов K, K_1, так и конусов K, K_2, т. е. образующая L, переходит в общую часть L'. Следовательно, общая часть конусов K', K_1' совпадает с общей частью K', K_2'.

Для конусов K', K_1' есть три априорные возможности расположения: 1) вершина одного лежит на другом, и тогда их общая часть есть образующая одного из них; 2) вершина одного лежит внутри другого, и тогда конусы не имеют общих точек; 3) вершина каждого из конусов лежит вне другого, и тогда конусы пересекаются.

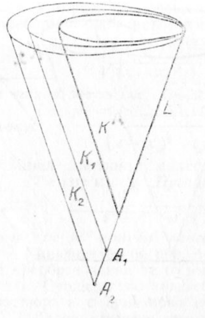

Рис. 2.

Для конусов K', K_1' вторая возможность исключена, так как они имеют общую часть L'.

Третья возможность также исключается, так как, по лемме 1, никакие три конуса K', K_1', K_2' не могут пересекаться так, чтобы K' и K_1' имели ту же общую часть, что K' и K_2'.

Таким образом, остается только первая возможность, и тогда общая часть L' конусов K', K_2' есть образующая одного из них и, соответственно, бесконечная часть образующей другого. Следовательно, L' является если не целой образующей конуса K', то, по крайней мере, полупрямой, составляющей часть образующей конуса K'. Этим доказано, что любая образующая L конуса K переходит либо в целую образующую, либо в полупрямую, составляющую часть образующей конуса K'.

Однако любые две образующие L и M конуса K имеют общую точку — вершину конуса. Поэтому после преобразования они переходят в полупрямые L' и M', которые также должны иметь общую точку. Это возможно только в том случае, если обе линии L' и M' являются целыми образующими конуса K', а не их частями.

Итак, образующая переходит в целую образующую; вершина, как единственная общая точка образующих, переходит в вершину. Лемма доказана.

Лемма 3. *Любая прямая, имеющая направление какой-нибудь образующей рассматриваемых конусов, переходит при рассматриваемом преобразовании в такого же рода прямую.*

Доказательство. Если прямая M имеет направление образующей, то любая ее полупрямая L, идущая в ту же сторону, как и образующая, является сама образующей одного из конусов. Поэтому, как следует из леммы 2, при преобразовании она переходит в одну из образующих L'.

Проведем прямую M' вдоль L'. Так как полупрямую L можно провести из любой точки прямой M, то ясно, что после преобразования все точки прямой M попадают на прямую M'. Иными словами, вся прямая M переходит в прямую M', имеющую направление образующей, или в часть прямой M'.

Остается доказать, что прямая M переходит именно в целую прямую M'.

Для доказательства возьмем на прямой M' любую точку A', и пусть A — та точка, которая переходит при данном преобразовании в точку A'. Возьмем конус K с вершиной в точке A; при преобразовании он перейдет в конус K' с вершиной в точке A' (так как, по лемме 2, вершина переходит в вершину).

Так как вершина конуса K' лежит на прямой M', то он имеет образующую N', идущую вдоль M'. Пусть N — образующая конуса K, переходящая в указанную образующую N'. (Такая образующая существует, потому что, по условию, конус K переходит в целый конус K', и, по лемме 2, образующие переходят в образующие.)

Образующая N', несомненно, содержит хотя бы часть полупрямой L', вдоль которой проведена прямая M'. Но L' соответствует образующей L, лежащей на прямой M, и потому вследствие взаимной однозначности преобразования образующая N должна содержать соответствующую часть L. Это значит, что образующая N, а вместе с ней и точка A, лежит на прямой M. Этим доказано, что любая точка A' прямой M' отвечает некоторой точке A прямой M.

Таким образом, прямая M переходит в целую прямую M', что и требовалось доказать.

3. Все двумерные плоскости по отношению к конусам разбиваются на три класса. Пусть P — произвольная плоскость пространства и K — какой-либо конус с вершиной на плоскости P. Будем называть P плоскостью первого рода, если она пересекает конус K по двум образующим, второго рода, если она не пересекает конус K, и третьего рода, если она соприкасается с конусом K. Очевидно, что это деление не зависит от выбора конуса K с вершиной в плоскости P.

Лемма 4. *Двумерные плоскости первого рода при преобразовании переходят снова в двумерные плоскости.*

Доказательство. Рассмотрим в пространстве произвольную двумерную плоскость P первого рода и конусы, вершины которых лежат на ней. Эта плоскость пересечет все конусы по пересекающимся образующим. Вся плоскость будет покрыта сетью прямых, имеющих направление образующих, причем все они разбиваются на два семейства. Все прямые одного семейства параллельны, а через каждую точку плоскости проходят две прямые из разных семейств. Эти прямые, имеющие направление образующих наших конусов, мы назовем просто прямыми, так как о других прямых у нас не будет речи.

В результате преобразования конусы перейдут в конусы, указанные прямые перейдут, согласно лемме 3, в такие же прямые, так что плоскость P перейдет в какое-то множество, покрытое двумя семействами прямолинейных образующих.

Рассмотрим две произвольные прямые на плоскости P из одного семейства. При преобразовании возможны только два случая: либо прямые остались параллельными, и тогда плоскость, очевидно, перешла в целую плоскость, как того требует лемма, либо они перешли в пару скрещивающихся прямых.

Пусть две прямые из одного семейства перешли в пару скрещивающихся прямых. Эти последние определяются четырьмя точками.

Но четыре точки, не лежащие в одной двумерной плоскости, определяют в четырехмерном пространстве некоторую трехмерную плоскость, которая есть не что иное, как обычное трехмерное эвклидово пространство. А так как любая прямая другого семейства должна пересекать обе эти прямые, то она также лежит в этом трехмерном пространстве, и образ P можно рассматривать в простом трехмерном пространстве.

Возьмем три прямые L_1, L_2, L_3 одного семейства. Если хотя бы две из них перешли в параллельные прямые, то лемма справедлива. Покажем, что перейти в попарно скрещивающиеся прямые они не могли. Пусть образы L_1', L_2', L'_3 этих прямых попарно скрещиваются. Тогда возможны два случая: прямые L_1', L_2', L_3' либо лежат в параллельных плоскостях, либо не лежат.

Первый случай невозможен по следующим соображениям. Прямые L_1', L_2', L_3', согласно лемме 3, идут вдоль образующих конусов. Параллельные друг другу плоскости Q_1, Q_2, Q_3, в которых лежат эти прямые, проходя через вершины параллельных конусов равного раствора, пересекают эти конусы по двум семействам прямых, так что прямые каждого семейства параллельны друг другу. Поэтому хотя бы две из прямых L_1', L_2', L_3' должны быть в этом случае параллельны, что противоречит их скрещиванию.

В невозможности второго случая можно убедиться следующим образом. Проведем через L_1' и L_2' параллельные друг другу плоскости Q_1 и Q_2. Прямая L_3', не будучи параллельна этим плоскостям, пересечет Q_1 в некоторой точке A'. Пусть A — перешедшая в A' точка плоскости P. Через точку A в плоскости P проходит прямая M второго семейства, пересекающая все прямые L_1, L_2, L_3. Образ M' прямой M является прямой, проходящей через A' и некоторую точку прямой L_1'. Поэтому M' целиком лежит в Q_1, но тогда M' не может пересечь прямую L_2', которая лежит в Q_2. Это противоречит наличию пересечения M с L_2.

Лемма 4 доказана.

4. Лемма 5. *Любая прямая преобразуется в прямую.*

Доказательство. Возьмем произвольную прямую L и на ней точку. Пусть эта точка будет вершиной конуса K. Проведем через прямую L две плоскости так, чтобы каждая из них пересекала конус K по двум образующим. (Достаточно провести одну плоскость через прямую L и ось конуса K, а другую так же через прямую L под малым углом к оси конуса K.)

В результате преобразования построенные плоскости перейдут в плоскости, так как это плоскости первого рода, а прямая L перейдет в прямую как их пересечение.

Следовательно, преобразование, переводящее наши конусы в такие же конусы, переводит любую прямую в прямую.

Как уже было сказано вначале, относительно взаимно однозначных преобразований, переводящих прямые в прямые, известно, что каждое такое преобразование является линейным. Следовательно, преобразование, которое мы рассматриваем, линейно, и, тем самым, теорема 1 доказана.

5. Теорема 2 доказывается совершенно так же. Разница состоит в том, что неполные конусы (1) заменяются полными конусами (2) и образующие их являются уже целыми прямыми, а не полупрямыми. Леммы 1 и 2 для этого случая формулируются дословно так же. Однако в их доказательствах появляются некоторые изменения.

Два полных конуса (2) всегда пересекаются, если только они не касаются по образующей. Для их пересечения возможны два случая: первый, когда вершина каждого из двух конусов лежит вне другого (этот случай соответствует тому, когда пересекаются неполные конусы), и второй случай, когда вершина одного конуса лежит внутри другого (этот случай соответствует тому, когда неполные конусы не пересекаются). Оба эти случая должны быть учтены в лемме 1. Воспроизводить доказательство леммы 1 для полных конусов мы не считаем нужным; оно может быть проведено аналогично доказательству для случая неполных конусов.

Доказательство леммы 2 теперь крайне просто. Мы берем три конуса, касающихся вдоль образующей. Теперь, когда речь идет о полных конусах, эта образующая есть общая часть любых двух из них. После преобразования это свойство должно сохраниться, а по лемме 1 это невозможно, если конусы стали пересекаться. Следовательно, они остались касающимися, так что их общая образующая перешла в образующую.

Этим доказано, что образующие переходят в образующие, и так как теперь образующая — это целая прямая, то лемма 3 оказывается лишней: она заключается в лемме 2.

После этого остается дословно повторить выводы пп. 3 и 4 (леммы 4 и 5), и теорема 2 доказана.

6. Теорема 3 может быть сведена к теореме 1 благодаря следующей лемме.

Лемма 6. *Преобразование, переводящее телесные конусы (3) в такие же конусы, переводит их поверхности в поверхности.* Поверхность телесного конуса (3) есть не что иное, как конус (1), так что преобразование, переводящее телесные конусы (3) в такие же конусы, переводит конусы (1) в такие же конусы.

Таким образом, задача сводится к доказательству леммы 6.

Докажем сначала, что *при преобразовании, переводящем телесные конусы (3) в такие же конусы, вершина конуса переходит в вершину.*

Пусть K_0 — телесный конус (3) и A — его точка, отличная от вершины. Телесный конус K_1 с вершиной A содержится в K_0. После преобразования конусы K_0 и K_1 перейдут в конусы K_0' и K_1', причем K_1' будет содержаться в K_0'. Поэтому никакая точка конуса K_1' и, в частности, точка A', получающаяся из точки A, не может быть вершиной конуса K_0'. Этим доказано, что любая точка A конуса, не являющаяся его вершиной, не переходит при преобразовании в вершину. Но в таком случае в вершину конуса K_0' может перейти только вершина конуса K_0. А так как конус K_0 переходит в целый конус K_0', то тем самым его вершина неизбежно переходит в вершину конуса K_0'.

Докажем теперь, что любая точка, лежащая на поверхности конуса K_0 и отличная от вершины, переходит в точку на поверхности конуса K_0'.

Пусть точка A лежит на поверхности конуса K_0 и отлична от его вершины. Рассмотрим все конусы (3), содержащие точку A и содержащиеся в K_0, и назовем их конусами K. Очевидно, они все касаются поверхности конуса K_0 вдоль образующей, идущей через точку A, и последовательно вложены один в другой; т. е., если K_1 и K_2 — любые два из этих конусов, то либо K_1 содержится в K_2, либо K_2 содержится в K_1. После преобразования это свойство сохраняется, так что конусы K переходят в конусы K', так же последовательно вложенные друг в друга.

Допустим, что после преобразования точка A перешла во внутреннюю точку A' конуса K_0'. Тогда, как очевидно, существуют конусы, содержащиеся к K_0', содержащие точку A', но не содержащиеся один в другом. Поэтому по крайней мере один из них не будет конусом K'. Иными словами, если точка A' лежит внутри конуса K_0', то существует содержащий ее конус Q', содержащийся в K_0' и не являющийся конусом K'.

Пусть B' — вершина конуса Q' и B — точка, переходящая в B' при данном преобразовании. Если Q — конус с вершиной B, то он как раз переходит в конус Q', поскольку вершина переходит в вершину.

Вместе с тем, так как конус Q' содержит точку A', то конус Q содержит точку A, т. е. является один из конусов K. А тогда конус Q' есть один из конусов K', что противоречит, однако, его выбору.

Полученное противоречие показывает, что точка A не может переходить во внутреннюю точку конуса K_0', т. е. каждая точка поверхности конуса K_0 остается при преобразовании на поверхности.

Остается теперь доказать, что поверхность конуса K_0 переходит во всю поверхность конуса K_0'. Так как конус K_0 переходит в целый конус K_0', то это равносильно тому, что никакая точка изнутри конуса K_0 не может перейти на поверхность.

Но если точка A лежит внутри конуса K_0, то можно указать содержащие ее конусы Q_1 и Q_2, содержащиеся в K_0, но не содержащиеся один в другом. После преобразования эти конусы перейдут в конусы Q_1' и Q_2' с тем же свойством. Между тем, если бы точка A попала после преобразования на границу конуса K_0', то из любых двух содержащих ее конусов, лежащих в K_0', один содержался бы в другом. Стало быть, точка A не может попасть на поверхность конуса K_0'.

Таким образом, доказано, что точки поверхности конуса K_0, и только они, переходят в точки поверхности конуса K_0', т. е. вся поверхность конуса K_0 переходит во всю поверхность конуса K_0'. Лемма 6 доказана, и вместе с этим теорема 3 сведена к теореме 1.