Algebra R II – ćwiczenia nr ... hmmm...

25 maja 2012

Zadanie 1. Pokazać, że jeśli na przestrzeni $V = \mathbb{R}_2[\,\cdot\,]$ forma kwadratowa jest określona wzorem

$$q(v) = \int_{-1}^{1} v^2(t)(3t - 5t^3)\mathsf{d}t,$$

to istnieją formy ψ_1, ψ_2 takie, że

$$\forall\, v \in V \quad q(v) = \psi_1(v)\psi_2(v).$$

Wyznaczyć formy ψ_1, ψ_2. Sformułować ogólne kryterium przedstawialności danej formy kwadratowej w postaci iloczynu dwóch jednoform.

Zadanie 2. Stosując metodę Lagrange'a znaleźć w przestrzeni $\mathbb{R}^n$ układ współrzędnych i odpowiadającą mu bazę diagonalizującą i sygnaturę dla form kwardratowych: **(a)** $n = 3$, $q(x) = {x_1}^2 + 2x_1x_2 + 2{x_2}^2 + 4x_2x_3 + 5{x_3}^2$, **(b)** $n = 4$, $q(x) = x_1x_2 + {x_3}^2 + {x_4}^2$, **(c)** $n = 3$, $q(x) = x_1x_2 + 4x_2x_3 + 6x_3x_1$, **(d)** $n \in \mathbb{N}$, $q(x) = x_1x_2 + x_2x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n$.

Zadanie 3. Sprawdzić, że forma kwadratowa $q : {\mathbb{R}^2}_2 \to \mathbb{R}$ określona wzorem

$$q(X) = \operatorname{tr}\Big(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} X^T X\Big)$$

ma w bazie

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

macierz diagonalną.