Algebra R II – ćwiczenia nr 8

Zadanie 1. Definiujemy formę liniową na przestrzeni macierzy $n \times n$ o współczynnikach rzeczywistych $(R^n{}_n)$ wzorem $\varphi_A(B) = \mathrm{tr}\,(AB)$. Udowodnić, że odwzorowanie

$$R^n{}_n \ni A \longmapsto \varphi_A (R^n{}_n)^*$$

jest bijekcją. Wykazać także, że jeśli $\varphi \in (R^n{}_n)^*$ ma własność $\varphi(AB) = \varphi(BA)$ to φ jest proporcjonalne do śladu.

Zadanie 2. Niech $V = \mathbb{K}_n[\,\cdot\,]$, gdzie $n \geqslant 3$. Sprawdzić, że operator $P \in$End(V) określony wzorem

$$(Pv)(t) = v(5) + (t-5)\dot{v}(5) + \frac{1}{2}(t-5)^2\ddot{v}(5)$$

jest operatorem rzutowym. Znaleźć opis podprzestrzeni V_0, $V_1 \subset V$ takich, że P jest rzutem na V_1 wzdłuż V_0. Znaleźć rząd i ślad P.

Zadanie 3. Określmy $F \in$End$(\mathbb{R}^4)$ wzorem

$$F(\mathbf{x}) = (x^1 + x^3)\mathbf{a} + (x^2 + x^4)\mathbf{b},$$

gdzie

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \end{bmatrix}.$$

Znaleźć wartości własne i wektory własne operatora F oraz (jeśli isnieje) bazę $\mathbb{R}^4$ złożoną z jego wektorów własnych. *Wskazówka: rachunki są łatwiejsze, jeśli wybierze się właściwą bazę, np. warto znaleźć* $F(\mathbf{a})$, $F(\mathbf{b})$ *oraz* $\ker(F)$*.*

Zadanie 4. Zbadać dla jakiej wartości $t \in \mathbb{C}$ macierz $B = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ t & t+3 \end{bmatrix}$ można wyrazić jako wielomian od macierzy $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$. Znaleźć ten wielomian.

Zadanie 5. Określmy $F \in$End$(\mathbb{R}^4)$ wzorem

$$F(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{bmatrix}.$$

Znaleźć wielomian φ taki, że $\varphi(F) = F^{-1}$, obliczyć F^{-1}. Udowodnić, że dla dowolnego operatora $F \in$End(V) takiego, że $\det F \neq 0$ operator F^{-1} da się wyrazić jako wielomian od F. *Wskazówka: twierdzenie Cayleya-Hamiltona.*