Algebra R II – ćwiczenia nr 6

Zadanie 1. Sprawdzić, że ślad operatora $F \in$End(V) jest dobrze zdefiniowany, tzn. jego wartość $\mathrm{tr}\,(F) = \mathrm{tr}\,([F]^e{}_e)$ nie zależy wyboru od bazy e w przestrzeni V. Obliczyć ślad oraz wyznacznik operatorów F i G jeśli $V = \mathbb{K}_n[\,\cdot\,]$, $a \in \mathbb{K}$

$$F(v)(t) = tw'(t) + aw(t), \qquad G(w)(t) = w(t+a).$$

Zadanie 2. Sprawdzić, że $\mathrm{tr}\,(A_1 A_2 \cdots A_n) = \mathrm{tr}\,(A_n A_1 A_2 \cdots A_{n-1})$.

Zadanie 3. Niech $V = V_1 \oplus V_2$. Operator rzutu na V_1 wzdłuż V_2 definiujemy wzorem

$$P^2{}_1(v) = v_1,$$

gdzie $v = v_1 + v_2$ jest rozkładem v na składowe z V_1 i V_2 związanym ze strukturą sumy prostej. Sprawdzić, że operator ten jest istotnie rzutem (tzn. jego kwadrat jest równy jemu samemu) i znaleźć macierz $P^2{}_1$ w bazie standardowej jeśli $V_1 = \ker M$, $V_2 = \mathrm{im}\, M$,

$$M = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Zadanie 4. Sprawdzić, że jeśli operator $P \in$End(V) jest rzutem, tzn. $P = P^2$ to $V = \ker P \oplus \mathrm{im}\, P$.

Zadanie 5. Przedstawić macierz A w postaci $A = \alpha P_1 + \beta P_2$ gdzie P_1 i P_2 są rzutami.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Zadanie 6. Definiujemy formę liniową na przestrzeni macierzy $n \times n$ o współczynnikach rzeczywistych $(\mathbb{R}^n{}_n)$ wzorem $\varphi_A(B) = \mathrm{tr}\,(AB)$. Udowodnić, że odwzorowanie

$$\mathbb{R}^n{}_n \ni A \longmapsto \varphi_A \in (\mathbb{R}^n{}_n)^*$$

jest bijekcją. Wykazać także, że jeśli $\varphi \in (\mathbb{R}^n{}_n)^*$ ma własność $\varphi(AB) = \varphi(BA)$ to φ jest proporcjonalne do śladu.