Algebra R II – ćwiczenia nr 5

Zadanie 1. Określmy operator $F \in L(\mathbb{R}_2[\,\cdot\,], {\mathbb{R}^2}_2)$ wzorem $F(v) = v(S)$ gdzie

$$S = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Znaleźć jądro, obraz i rząd odwzorowania F. Znaleźć także takie bazy e i f w przestrzeniach, odpowiednio, $\mathbb{R}_2[\,\cdot\,]$ i ${\mathbb{R}^2}_2$ aby macierz ${[F]^f}_e$ miała postać kanoniczną.

Zadanie 2. Niech $V = \mathbb{K}_3[\,\cdot\,]$. Odwzorowanie liniowe $F \in$End(V) określmy wzorem $(Fv)(t) = v(t+1)$. Przedstawić $F^T(\varphi_1)$ w postaci kombinacji liniowej form $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$, gdzie

$$\varphi_1(v) = v(-3), \quad \varphi_2(v) = v(2), \quad \varphi_3(v) = v(3), \quad \varphi_4(v) = v(4).$$

Zadanie 3. Niech D będzie odwzorowaniem liniowym w $\mathbb{K}_n[\,\cdot\,]$ reprezentującym różniczkowanie, tzn $D(v)(t) = v'(t)$. Wykazać, że jeśli $[A, D] = 0$ to $A = u(D)$, gdzie u jest wielomianem.