Algebra R II – ćwiczenia nr 3

W czasie trzecich zajęć powtórzymy materiał z zajęć nr 2, a jak się uda zrobimy jeszcze jakieś zadania dotyczące wyznaczników:

Zadanie 1. Nie obliczając wyznacznika pokazać, że

$$\det\begin{bmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & b & b^2 \end{bmatrix}, \qquad \det\begin{bmatrix} 1 & a & a^3 \\ 1 & b & b^3 \\ 1 & c & c^3 \end{bmatrix} = (a+b+c)\det\begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & b & b^2 \end{bmatrix}.$$

Zadanie 2. Obliczyć wyznaczniki

$$\det\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \quad \det\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\det\begin{bmatrix} x & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ -1 & x & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & -1 & x & \cdots & 0 & a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & a_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & a_n \end{bmatrix}, \quad \det\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-2 & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n-1 & n & n \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & n & n & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n-1 & n & n & \cdots & n & n & n \\ n & n & n & \cdots & n & n & n \end{bmatrix}.$$

Zadanie 3. Wyprowadzić wzór rekurencyjny na D_n i znaleźć jawną postać wzoru na D_n:

$$D_n = \det\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -2 & 3 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -2 & 3 \end{bmatrix},$$

$$D_n = \det\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 3 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$