Algebra R II – ćwiczenia nr 2

Zadanie 1. Niech $V = \mathbb{R}_2[\cdot]$ będzie, przestrzenią wielomianów o współczynnikach rzeczywistych stopnia nie większego niż 2. Odwzorowanie φ_x, które przyporządkowuje wielomianowi $v \in V$ jego wartość w ustalonym punkcie x, $\varphi_x(v) = v(x)$ jest odwzorowaniem liniowym o wartościach w $\mathbb{R}$ czyli elementem V^*. Pokazać, że układ $(\varphi_{-1}, \varphi_0, \varphi_1)$ tworzy bazę w V^*. Znaleźć macierze odwzorowań φ_x dla $x \in \{-1, 0, 1\}$ w bazie $e = (e_1, e_2, e_3)$, $e_1(t) = 1$, $e_2(t) = t$, $e_3(t) = t^2$ w V i bazie (1) w $\mathbb{R}$ *(wektory wierszowe)*.

Zadanie 2. Znaleźć bazę f w V dualną do bazy $\varphi = (\varphi_{-1}, \varphi_0, \varphi_1)$ z poprzedniego zadania. Znaleźć także bazę ε w V^* dualną do bazy e. Zapisać kowektory φ_x dla $x \in \{-1, 0, 1\}$ w bazie ε. Porównać $[\varphi_x]^1{}_e$ z $[\varphi_x]^\epsilon$.

Zadanie 3. Niech $V = \mathbb{K}^3$. Sprawdzić, że formy liniowe ϕ_k, $k = 1, 2, 3$ dane wzorami

$$\phi_k(\begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{bmatrix}) = x^1 + x^2 + x^3 - 2kx^k$$

tworzą bazę przestrzeni V^*. Znaleźć macierz operatora F^* w tej bazie, jeśli

$$F(\begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^2 \\ x^3 \\ x^1 \end{bmatrix}.$$

Zadanie 4. Niech $F \in \mathrm{End}(V)$, $w \in V$ oraz $\phi \in V^*$. Operator $\mathrm{End}(V) \ni G = w \otimes \phi$ określamy wzorem

$$G(v) = \phi(v)w.$$

Udowodnić, że $\mathrm{tr}(G \circ F) = \phi(F(w))$. Ślad (tr) rozumiemy jako ślad macierzy operatora (tzn sumę wyrazów diagonalnych) w wybranej bazie. Dowodzi się, że ślad nie zależy od wyboru bazy.

Zadanie 5. Dla $w \in V$ oraz $\phi \in V^*$ operator $F \in \mathrm{End}(V)$ określamy wzorem

$$F = \mathrm{id}_V - w \otimes \phi.$$

Udowodnić, że F jest nieodwracalny wtedy i tylko wtedy gdy $\phi(w) = 1$.